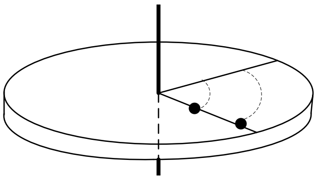
6. Rotasjon.

I dette kapitlet skal vi se på rotasjon av stive legemer. Vi skal først definere noen grunnleggende størrelser, der du først og fremst må bli fortrolig med ***treghetsmoment***. Deretter skal vi se på energi i forbindelse med rotasjon. Til slutt skal vi se på hva som forårsaker rotasjon, og da skal vi komme inn på *kraftmoment* og *spinn*.

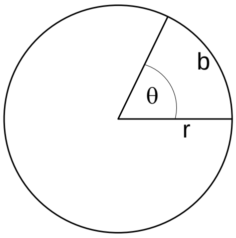
De fleste studentene synes at dette er vanskelige tema. Jeg skal stort sett begrense meg til rotasjon om en fast akse, eller rotasjon om en akse som parallellforskyves (rullende sylinder). Da slipper jeg å benytte vektorer. Men til slutt skal jeg ta for meg de generelle definisjonene og utlede noen viktige setninger, og da kommer vi ikke utenom bruk av vektorer.

6.1. Vinkel, vinkelfart og vinkelakselerasjon.

6.1.1. De grunnleggende definisjonene.



Figuren til venstre viser ei skive som roterer om en fast akse vinkelrett på skivas plan. Dersom skiva er et stivt legeme, vil partikler som er langt fra rotasjonsaksen ha beveget seg en lengre strekning enn partikler som er nær aksen. Men alle partiklene i skiva roterer *samme vinkel* θ. Dette gjør det naturlig å bruke *vinkel* til å beskrive rotasjonsbevegelse.



Vi skal etter hvert se at det er gunstig å måle vinkelen i *radianer*. Figuren til venstre viser at da er

$$\theta = \frac{b}{r} \quad \Leftrightarrow \quad b = r \cdot \theta \,.$$

Siden både *b* og *r* måles i meter, blir θ en ubenevnt størrelse. Men i praksis skriver vi ofte "rad" som benevning for vinkel.

Vi skal definere begrepene ***vinkelfart*** og ***vinkelakselerasjon*** med utgangspunkt i at skiva roterer en liten vinkel $\Delta\theta$ i løpet av et kort tidsintervall Δt. Da får vi:

Vinkelfarten $\omega = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = \dfrac{d\theta}{dt}$.

Vinkelfarten måles i rad/s eller enklere s^{-1}.

På tilsvarende måte definerer vi ***vinkelakserlerasjon*** med utgangspunkt i at vinkelfarten endres med en liten størrelse $\Delta\omega$ i løpet av et kort tidsintervall Δt. Vi får

Vinkelakselerasjonen $\alpha = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t} = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$.

Vinkelakselerasjonen måles i $\mathrm{rad/s^2}$ eller enklere s^{-2} .

La oss se på en liten partikkel i avstand *R* fra rotasjonsaksen. Når skiva roterer en liten vinkel $\Delta\theta$, vil punktet bevege seg en kort strekning

$$\Delta s = R \cdot \Delta\theta \,.$$

Siden *R* er konstant, blir partikkelens fart

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R \cdot \Delta\theta}{\Delta t} = R \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = R \cdot \omega \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \frac{v}{R} \,.$$

Da blir partikkelens akselerasjon

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d\left(R \cdot \omega\right)}{dt} = R \cdot \frac{d\omega}{dt} = R \cdot \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{a}{R} \,.$$

Vi summerer opp:

Ved rotasjon om en fast akse er:

Rotasjonsvinkel $\theta = \dfrac{b}{R}$ der b er buelengde og R er radius.

Vinkelfart $\omega = \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{v}{R}$ der v er farten i avstand R fra aksen.

Vinkelakselerasjon $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = \dfrac{a}{R}$ der a er baneakselerasjonen i avstand R fra aksen.

Begrepet *vinkelfart* kan virke noe abstrakt. Det kan være mer naturlig å snakke om *rotasjons-fart* eller *turtall*, som gjerne oppgis i antall omdreininger pr sekund eller minutt.

Eksempel 6.1.1: En motor har et turtall på 1200 omdreininger pr minutt. Hvilken vinkelfart svarer dette til?

Løsning: Siden en hel omdreining svarer til en vinkel på 2π, vil et turtall på 1200 omdreininger pr minutt svare til en vinkelfart på

$$\omega = \frac{1200 \cdot 2\pi}{60\,\text{s}} = \underline{\underline{40\pi\,\text{rad/s}}} \approx \underline{\underline{125.7\,\text{rad/s}}}\,.$$

Eksempel 6.1.2: Ei stor vindmølle har 50 meter lange møllevinger. Den roterer 15 hele rotasjoner pr minutt.

a) Finn vindmøllas vinkelfart oppgitt i radianer pr sekund.

b) Hvor stor fart har et punkt ytterst på en møllevinge? Gi svaret i m/s og km/time.

Løsning:

a) Når mølla roterer 15 hele rotasjoner pr minutt, der hver rotasjon svarer til en vinkel på 2π radianer, blir vinkelfarten

$$\omega = \frac{15 \cdot 2\pi}{60\,\text{s}} = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}\pi\,\text{rad/s}}} \approx \underline{\underline{1.57\,\text{rad/s}}}\,.$$

b) Et punkt i avstand $R = 50\,\text{m}$ fra rotasjonsaksen vil da ha en fart

$$v = \omega R = \left(1.57\,\text{s}^{-1}\right)\cdot\left(50\,\text{m}\right) = \underline{\underline{78.5\,\text{m/s}}}\,.$$

Siden 1 km/time svarer til $1 \cdot \tfrac{1000\,\text{m}}{60 \cdot 60\,\text{s}} = 0.2778\,\text{m/s}$, vil dette svare til

$$\frac{78.5\,\text{m/s}}{0.2778\left(\text{m/s}\right)/\left(\text{km/time}\right)} = \underline{\underline{283\,\text{km/time}}}\,.$$

Oppgaver: 6.1.1, 6.1.2.

*6.1.2. Rotasjonslikninger ved konstant vinkelakselerasjon.

Vi kan utlede bevegelseslikninger for rotasjon med konstant vinkelakselerasjon på samme måte som vi utledet bevegelseslikningene for translasjon ved konstant akselerasjon. Vi starter med

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad d\omega = \alpha dt\,.$$

Så integrerer vi på begge sider, og benytter at α er konstant:

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \alpha\, dt \quad \Leftrightarrow \quad [\omega]_{\omega_0}^{\omega} = \alpha[t]_0^t \quad \Leftrightarrow \quad \omega - \omega_0 = \alpha(t-0) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\omega = \omega_0 + \alpha t}\,.$$

Dette uttrykket setter vi inn i definisjonslikningen for vinkelfart:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad d\theta = \omega dt = (\omega_0 + \alpha t)dt\,.$$

Vi integrerer på begge sider, og får:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^t (\omega_0 + \alpha t)dt \quad \Leftrightarrow \quad [\theta]_{\theta_0}^{\theta} = \left[\omega_0 t + \alpha \cdot \tfrac{1}{2}t^2\right]_0^t \quad \Leftrightarrow \quad \theta - \theta_0 = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha \cdot t^2 - 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \theta = \underline{\theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2}\,.$$

Vi summerer opp:

Når et stivt legeme roterer om en fast akse med konstant vinkelakselerasjon α en tid *t*, er:

Vinkelfarten	$\omega = \omega_0 + \alpha t\,.$
Tilbakelagt vinkel	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2\,.$

Du ser vel likheten med de tilsvarende likningene for translasjon?

Eksempel 6.1.3: Et svinghjul roterer med 50 omdreininger pr sekund. Vi skal følge et punkt på dette svinghjulet i avstand $R = 0.20\,\text{m}$ fra rotasjonsaksen.

a) Hvor stor fart har dette punktet, og hvor stor sentripetalakselerasjon har det?

b) Svinghjulet bremses ned slik at det stanser helt i løpet av 20 sekunder. Vi antar at vinkelakselerasjonen er konstant under oppbremsingen. Hvor stor vinkel har svinghjulet tilbakelagt under oppbremsingen, og hvor langt har punktet beveget seg?

Løsning:

a) 50 omdreininger pr sekund svarer til en vinkelfart

$$\omega_0 = 50\,\text{s}^{-1} \cdot 2\pi\,\text{rad} \approx 314\,\text{rad/s}\,.$$

Da er farten til et punkt i avstand $R = 0.20\,\text{m}$ fra aksen

$$v_0 = R \cdot \omega_0 \approx 0.20\,\text{m} \cdot 314\,\text{rad/s} = \underline{\underline{62.8\,\text{m/s}}}\,.$$

Merk at "rad" er ubenevnt, slik at vi trygt kan se bort fra det når vi sjekker benevning.
Sentripetalakselerasjonen blir

$$a_N = \frac{v_0^2}{R} = \frac{(62.8\,\text{m/s})^2}{0.20\,\text{m}} = \underline{\underline{19720\,\text{rad/s}^2}}\,.$$

b) Benytter at

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{0\,\text{rad/s} - 314\,\text{rad/s}}{20\,\text{s}} = \underline{-15.7\,\text{rad/s}^2}\,.$$

Tilbakelagt vinkel blir

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 = 0 + 314\,\text{rad/s}\cdot 20\,\text{s} + \tfrac{1}{2}\cdot\left(-15.7\,\text{rad/s}^2\right)(20\,\text{s})^2 = \underline{\underline{3140\,\text{rad}}}\,.$$

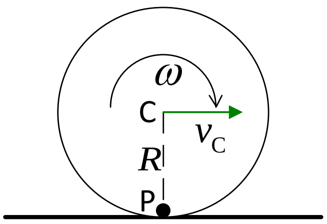
Punktet har da tilbakelagt en strekning

$$s = R\cdot\theta = 0.20\,\text{m}\cdot 3140\,\text{rad} = \underline{\underline{628\,\text{m}}}\,.$$

Oppgave: 6.1.3.

6.1.3. Aksen parallellforskyves. Rulling uten glidning.

Hittil har vi forutsatt at vårt stive legeme roterer om en akse som er i ro. Nå skal vi forsiktig løsne aksen, og tillate at aksen parallellforskyves. Vi skal forutsette at legemet vårt ruller uten å gli. Situasjonen er illustrert nedenfor.

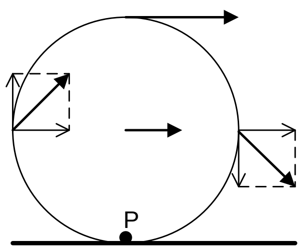


Legemet ruller med en vinkelfart ω uten å gli. La P være det punktet på legemet som i øyeblikket er i kontakt med underlaget. Punktet P vil ha en fart $v_P = \omega R$ i forhold til sentrum C. Men siden legemet ruller uten å gli, må punktet P et kort øyeblikk være i ro. I forhold til underlaget har da sentrum C en fart $v_C = \omega R$.

Dette er såpass viktig at vi rammer det inn:

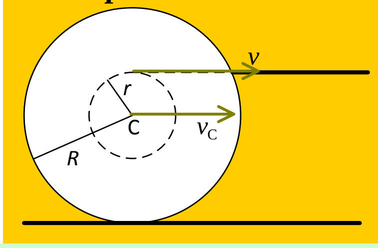
Når et stivt legeme med radius R ruller *uten å gli*, er sammenhengen mellom vinkelfarten ω og rotasjonsaksens fart v_C i forhold til et koordinatsystem i ro gitt ved

$$v_C = \omega\cdot R\,.$$



La oss se nærmere på legemet som ruller uten å gli. De punktene på legemet som er i berøring med underlaget, er *i ro* i det øyeblikket de berører underlaget. Disse punktene utgjør ei linje som vi kan kalle *legemets momentane rotasjonsakse*. Vi kan betrakte legemets bevegelse som en ren rotasjon om denne aksen, og denne aksen er i ro. Figuren til venstre viser hvordan bevegelsen til en sylinder som ruller uten å gli, kan oppfattes som en rotasjon rundt en momentan rotasjonsakse gjennom P.

Eksempel 6.1.4:



En kabeltrommel har indre radius *r* og ytre radius *R*. En tynn kabel er viklet opp på trommelen. Kabelen trekkes av trommelen med en konstant fart *v* (d.v.s. at et vilkårlig punkt på kabelen har fart *v* i forhold til bakken). Da har massesenteret C en fart v_C. Finn v_C uttrykt ved *v*, *R* og *r* når trommelen ruller uten å gli.

Løsning: Kaller kabeltrommelens fart (mer presist: farten til trommel-aksen i forhold til bakken) v_C. Siden trommelen ruller uten å gli, er vinkelfartens størrelse

$$\omega = \frac{v_C}{R}.$$

Farten til det punktet på kabelen som forlater trommelen, er summen av massesenterets fart og et bidrag som skyldes rotasjon rundt aksen gjennom massesenteret:

$$v = v_C + r \cdot \omega = v_C + r \cdot \frac{v_C}{R} = v_C\left(1 + \frac{r}{R}\right)$$

slik at

$$v_C = \underline{\underline{\frac{v}{1+\frac{r}{R}}}}.$$

Vi kan også oppfatte bevegelsen som rotasjon rundt en momentan rotasjonsakse der kabel-trommelen berører bakken. Da er

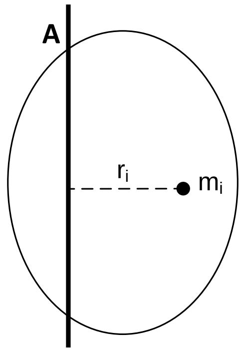
$$\omega = \frac{v_C}{R} = \frac{v}{R+r} \quad \Leftrightarrow \quad v_C = \frac{Rv}{R+r} = \underline{\underline{\frac{v}{1+\frac{r}{R}}}}.$$

Det er mulig å definere en momentan rotasjonsakse for andre bevegelser enn rulling uten glidning, men vi skal nøye oss med denne spesielle situasjonen. Hvis du synes at det er merkelig at berøringspunktet med underlaget er *i ro*, kan du sammenlikne med situasjonen for et legeme som kastes rett oppover. I det korte øyeblikket da legemet snur på toppen av sin bane, har det null fart. Da er det *i ro* et kort øyeblikk.

6.2. Rotasjonsenergi.

Vi skal nå se på den kinetiske energien som et roterende legeme har. Vi skal som før gå ut fra at legemet er stivt, d.v.s. at det ikke endrer form. Vi skal starte med å forutsette at legemet roterer om en fast akse. Deretter skal vi tillate at aksen parallellforskyves. De energiformlene som vi kommer fram til, skal vi deretter kombinere med kjente prinsipper for energibevaring.

6.2.1. Rotasjonsenergi ved rotasjon om en fast akse.



Vi tar for oss et stivt legeme som roterer med vinkelfart ω om den faste aksen **A** som er tegnet med tykk strek på figuren til venstre. Da vil en partikkel i avstand r_i fra aksen ha fart

$$v_i = \omega r_i .$$

Dersom denne partikkelen har masse m_i, får den en kinetisk energi

$$W_i = \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 = \tfrac{1}{2} m_i \left(\omega r_i\right)^2 = \tfrac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 .$$

Den samlede kinetiske energien til alle partiklene i hele legemet blir da summen av bidragene fra hver partikkel:

$$W_{\mathrm{rot}} = \sum W_i = \sum \tfrac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \tfrac{1}{2}\left(\sum m_i r_i^2\right)\omega^2 .$$

I den siste overgangen har vi benyttet at ω er den samme for alle partiklene i legemet, slik at ω er en felles faktor som kan settes utenfor summetegnet.

Størrelsen $\sum m_i r_i^2$ avhenger av legemets form og størrelse, og av hvordan aksen er plassert i forhold til legemet. Denne størrelsen kalles ***legemets treghetsmoment om den valgte aksen***, og gis symbolet I ("moment of **I**nertia"), og er så viktig at vi rammer den inn:

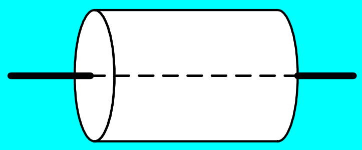
> Et legemes treghetsmoment om en akse A er
> $$I_{\mathrm{A}} = \sum m_i r_i^2$$
> der m_i er massen til en partikkel i legemet i avstand r_i fra aksen.

Treghetsmomentet avhenger ikke bare av legemets masse. Det avhenger også av legemets form, og av hvor aksen er plassert. Det er derfor meningsløst bare å snakke om "legemets treghetsmoment". Vi må også presisere legemets form og aksens plassering i forhold til legemet.

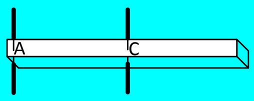
Når treghetsmomentet til legemet om aksen A er kjent, kan vi finne legemets kinetiske energi når det roterer om aksen (og aksen er i ro) slik:

> Legemets kinetiske energi på grunn av rotasjon om en fast akse A er
> $$W_{\mathrm{rot}} = \tfrac{1}{2}\left(\sum m_i r_i^2\right)\omega^2 = \tfrac{1}{2} I_{\mathrm{A}} \cdot \omega^2$$
> der $I_{\mathrm{A}} = \sum m_i r_i^2$ er legemets treghetsmoment om aksen.

Hvordan finner vi treghetsmomentet for et legeme om en bestemt akse? I praksis tar vi utgangspunkt i formler fra tabeller, og omformer disse formlene om nødvendig. Vi skal snart se hvordan dette kan gjøres. I eksemplene nedenfor er det tilstrekkelig å vite at:



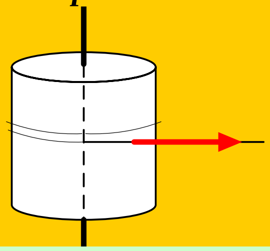
En massiv, homogen sylinder med masse m og radius R har et treghetsmoment $I = \frac{1}{2}mR^2$ om sylinderens symmetriakse. Høyden (lengden) til sylinderen spiller ingen rolle.



En tynn stav med masse m og lengde L har et treghetsmoment $I_C = \frac{1}{12}mL^2$ om en akse vinkelrett på staven gjennom massesenteret, og treghetsmoment $I_A = \frac{1}{3}mL^2$ om en akse vinkelrett på staven gjennom et endepunkt av staven.

Du finner utledning av disse uttrykkene i kap. 6.3.2. Nå skal vi konsentrere oss om hvordan vi kan bruke dem i praktiske situasjoner.

Eksempel 6.2.1:



Ei masseløs, ustrekkelig, 5 meter lang snor vikles opp på en sylinder som har masse 1.00 kg og radius 0.10 m. Sylinderen kan rotere uten friksjon om en fast akse. Vi trekker i snora med konstant kraft på 10 Newton inntil hele snora er viklet av sylinderen. Snora glir ikke på sylinderen. Hvor stor vinkelfart får sylinderen?

Løsning: Når vi vikler snora av sylinderen, utfører vi et arbeid

$$W = F \cdot s = 10\,\text{N} \cdot 5.00\,\text{m} = 50\,\text{J}\,.$$

Denne energien er gått over i rotasjons-kinetisk energi for sylinderen, som har treghets-moment

$$I = \tfrac{1}{2}mR^2 = \tfrac{1}{2}\cdot(1.00\,\text{kg})\cdot(0.10\,\text{m})^2 = 0.0050\,\text{kg}\cdot\text{m}^2\,.$$

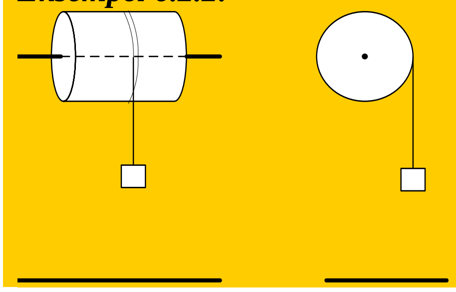
Vi har da at

$$\tfrac{1}{2}I\omega^2 = W \quad\Leftrightarrow\quad \omega = \sqrt{\frac{2W}{I}} = \sqrt{\frac{2\cdot 50\,\text{J}}{0.0050\,\text{kg}\cdot\text{m}^2}} \approx \underline{\underline{140\,\text{s}^{-1}}}\,.$$

Dette tilsvarer $\dfrac{140}{2\pi} \approx 22$ omdreininger pr sekund.

Neste eksempel viser hvordan vi kombinerer ulike former for kinetisk energi, og benytter at den mekaniske energien er bevart. Vi må dessuten benytte sammenhengen mellom vinkelfart og farten til et punkt på sylinderens periferi.

Eksempel 6.2.2:



Vi tar den samme sylinderen med masse $m = 1.00\,\text{kg}$ og samme snor som i eksemplet foran, men fester nå et lodd med masse $m_{\text{lodd}} = 1.00\,\text{kg}$ i enden av snora. Så slipper vi loddet. Hvor stor fart har loddet, og hvor stor vinkelfart har sylinderen når loddet har falt 5.00 meter?
Vi forutsetter at snora ikke glir på sylinderen.

Løsning: Her må du ikke falle for fristelsen til å si at kraften i snora er lik loddets tyngde, og regne på samme måte som i eksemplet ovenfor. Kraften i snora må være *mindre* enn loddets tyngde, ellers kan ikke loddet få noen akselerasjon nedover. Vi må isteden regne slik:

Når loddet har falt en strekning $h = 5.00$ meter, har det tapt potensiell energi. Denne energien er gått over til kinetisk energi. Men både loddet og sylinderen har fått kinetisk energi. Vi må da merke oss at når sylinderen roterer med vinkelfart ω, vil et punkt på overflaten av sylinderen ha fart $v = \omega R$. Siden snora ikke glir på sylinderen, må også loddet ha denne farten

$$v = \omega R \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \frac{v}{R}.$$

Da kan vi sette opp energilikningen nedenfor, når nullnivå for potensiell energi legges i loddets laveste punkt. Merk at sylinderens potensielle energi i tyngdefeltet er konstant, og inngår derfor ikke i energilikningen nedenfor:

$$m_{\text{lodd}} gh = \tfrac{1}{2} m_{\text{lodd}} v^2 + \tfrac{1}{2} I \omega^2 .$$

Nå lønner det seg å sette inn uttrykkene for I og ω:

$$m_{\text{lodd}} gh = \tfrac{1}{2} m_{\text{lodd}} v^2 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2} m_{\text{syl}} R^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 = \tfrac{1}{2} m_{\text{lodd}} v^2 + \tfrac{1}{4} m_{\text{syl}} v^2 = \left(\tfrac{1}{2} m_{\text{lodd}} + \tfrac{1}{4} m_{\text{syl}}\right) v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{m_{\text{lodd}} gh}{\tfrac{1}{2} m_{\text{lodd}} + \tfrac{1}{4} m_{\text{syl}}}} = \sqrt{\frac{(1.00\,\text{kg}) \cdot (9.81\,\text{m/s}^2) \cdot (5.00\,\text{m})}{\tfrac{1}{2} \cdot 1.00\,\text{kg} + \tfrac{1}{4} \cdot 1.00\,\text{kg}}} = \underline{\underline{8.09\,\text{m/s}}} .$$

Da er sylinderens vinkelfart

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{8.09\,\text{m/s}}{0.10\,\text{m}} = \underline{\underline{80.9\,\text{s}^{-1}}} .$$

Oppgave: 6.2.1.

6.2.2. Energi når aksen beveger seg.

Vi har tidligere sagt at den kinetiske energien til et legeme med masse M kan skrives

$$W_{\text{kin}} = \tfrac{1}{2} M \cdot v_{\text{CM}}{}^2 + \sum \tfrac{1}{2} m_i \left(v_i'\right)^2$$

der v_{CM} er farten til massesenteret, m_i er massen til partikkel i i legemet, og v_i' er farten til partikkel i i forhold til massesenteret.

Det første leddet i energiformelen blir da den kinetiske energien til en *partikkel* med masse M og fart v_{CM}, der vi ikke tar hensyn til rotasjon eller andre bevegelser rundt massesenteret. Det siste leddet er kinetisk energi på grunn av bevegelsen rundt massesenteret. Men når vi har et roterende legeme der rotasjonsaksen går gjennom massesenteret, har vi nettopp vist at

$$\sum \tfrac{1}{2} m_i \left(v_i'\right)^2 = \tfrac{1}{2} I_{\text{CM}} \cdot \omega^2$$

der I_{CM} er treghetsmomentet om aksen gjennom massesenteret og ω er vinkelfarten til det roterende legemet. Dermed får vi at:

Et stivt legeme har masse M og treghetsmoment I_{CM} om en akse gjennom massesenteret. Når dette legemet roterer med vinkelfart ω om denne aksen samtidig som aksen parallellforskyves med fart v_{CM}, er legemets kinetiske energi gitt ved

$$W_{\mathrm{kin}} = \tfrac{1}{2} M v_{\mathrm{CM}}{}^2 + \tfrac{1}{2} I_{\mathrm{CM}} \omega^2$$

Eksempel 6.2.3: En homogen sylinder med masse M og radius R ruller uten å gli med fart v. Finn sylinderens kinetiske energi.

Løsning: Når sylinderen ruller uten å gli, er sylinderens berøringspunkt med bakken i ro. Da har sylinderens akse en fart

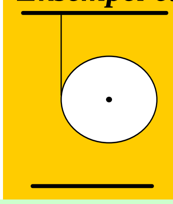
$$v_{\mathrm{CM}} = \omega R \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \frac{v_{\mathrm{CM}}}{R}.$$

Dette gir en kinetisk energi

$$W_{\mathrm{kin}} = \tfrac{1}{2} M v_{\mathrm{CM}}{}^2 + \tfrac{1}{2} I_{\mathrm{C}} \omega^2 = \tfrac{1}{2} M v_{\mathrm{CM}}{}^2 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2} M R^2\right)\left(\frac{v_{\mathrm{CM}}}{R}\right)^2$$

$$= \tfrac{1}{2} M v_{\mathrm{CM}}{}^2 + \tfrac{1}{4} M v_{\mathrm{CM}}{}^2 = \underline{\underline{\tfrac{3}{4} M v_{\mathrm{CM}}{}^2}}$$

Eksempel 6.2.4:



Ei masseløs snor er viklet opp på en homogen sylinder som har radius $R = 0.10\,\mathrm{m}$. Den ene enden av snora festes i taket. Sylinderen holdes med horisontal akse, og slippes. Snora vikles av sylinderen uten å gli. Vi forutsetter at aksen holder seg horisontal mens den faller. Finn farten til massesenteret (d.v.s. sylinderaksen) når det har falt 2.00 m.

Løsning: Siden snora er festet i taket, og ikke glir på sylinderen, har vi samme situasjon som når sylinderen ruller uten å gli. Da er sylinderens kinetiske energi gitt ved

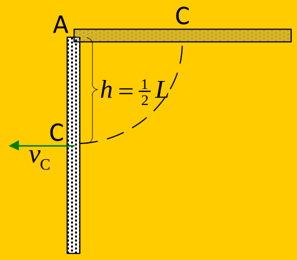
$$W_{\mathrm{kin}} = \tfrac{3}{4} M v_{\mathrm{CM}}{}^2.$$

Vi legger nullnivå for potensiell energi i sylinderaksens laveste punkt, og får denne energi-likningen:

$$Mgh = \tfrac{3}{4} M v_{\mathrm{CM}}{}^2 \quad \Leftrightarrow \quad v_{\mathrm{CM}} = \sqrt{\tfrac{4}{3} gh} = \sqrt{\tfrac{4}{3} \cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 2.00\,\mathrm{m}} = \underline{\underline{5.11\,\mathrm{m/s}}}.$$

I eksempelet over beregnet vi endring i potensiell energi ved å se på endringen i den potensielle energien for *massesenteret* (mer presist: ved å anta at all masse er konsentrert i massesenteret). Dette er en generell regel som alltid gjelder når et legeme beveger seg i tyngdefeltet. I neste eksempel skal vi også benytter dette, og vi viser også hvordan vi kan løse et rotasjons-problem på to forskjellige måter:

Eksempel 6.2.5:



En tynn, homogen stav med lengde L og masse m kan rotere fritt om enden A i et vertikalt plan. Finn farten til massesenteret C når staven passerer loddrett posisjon på to måter:

a) Ved å betrakte dette som en ren rotasjon om et punkt A som står i ro.

b) Ved å betrakte dette som om massesenteret C beveger seg samtidig som det er en rotasjon om massesenteret.

Løsning: Uansett hvordan vi betrakter problemet, må vi benytte bevaring av mekanisk energi. Vi legger nullnivå for potensiell energi gjennom det laveste punktet for massesenteret C. Når staven er i start-tilstanden, er derfor den potensielle energien

$$W_{\text{pot}} = mgh = mg\cdot\tfrac{1}{2}L = \underline{\tfrac{1}{2}mgL}\,.$$

Siden den kinetiske energien i start-tilstanden er lik null, får vi at den kinetiske energien i loddrett posisjon er

$$W_{\text{kin}} = W_{\text{pot}} = \tfrac{1}{2}mgL\,.$$

Videre ser vi at massesenteret C roterer i en sirkel med radius h, slik at sammenhengen mellom v_C og vinkelfarten ω blir

$$v_C = \omega h = \omega\cdot\tfrac{1}{2}L \quad\Leftrightarrow\quad \omega = \frac{2v_C}{L}\,.$$

a) Ved en ren rotasjon om A må vi benytte at treghetsmomentet til en stav om en akse gjennom A vinkelrett på staven er $I_A = \frac{1}{3}mL^2$. Da gir bevaring av energi:

$$\tfrac{1}{2}I_A\omega^2 = \tfrac{1}{2}mgL \quad\Leftrightarrow\quad \left(\tfrac{1}{3}mL^2\right)\cdot\left(\frac{2v_C}{L}\right)^2 = mgL \quad\Leftrightarrow\quad \tfrac{4}{3}v_C{}^2 = gL \quad\Leftrightarrow\quad v_C = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}\sqrt{3gL}}}\,.$$

b) Når dette betraktes som en rotasjon om et bevegelig massesenter, må vi benytte at treghetsmomentet om en akse gjennom massesenteret er $I_C = \frac{1}{12}mL^2$. Da får vi

$$\tfrac{1}{2}mv_C{}^2 + \tfrac{1}{2}I_C\omega^2 = \tfrac{1}{2}mgL \quad\Leftrightarrow\quad mv_C{}^2 + \left(\tfrac{1}{12}mL^2\right)\cdot\left(\frac{2v_C}{L}\right)^2 = mgL$$

$$\Leftrightarrow\quad mv_C{}^2 + \tfrac{4}{12}mv_C{}^2 = mgl \quad\Leftrightarrow\quad \tfrac{4}{3}v_C{}^2 = gL \quad\Leftrightarrow\quad v_C = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}\sqrt{3gL}}}$$

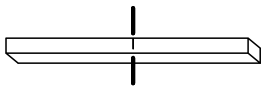
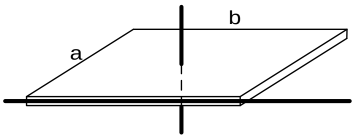
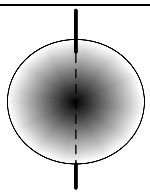
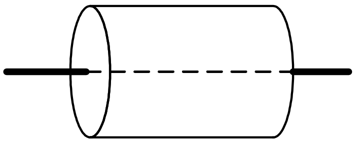
Oppgaver: 6.2.2, 6.2.3.

6.3. Beregning av treghetsmoment.

I våre innledende eksempler har vi klart oss med treghetsmoment for en sylinder om en akse langs symmetriaksen, og treghetsmoment for en tynn stav. Men i praksis får vi bruk for treghetsmoment for mange andre legemer, om flere forskjellige akser. Vi skal nå se hvordan vi kan finne slike treghetsmoment, og vi skal også utlede de treghetsmomentene som vi har brukt hittil.

6.3.1. Bruk av tabell og viktige setninger.

Når vi skal finne treghetsmomentet til vanlige legemer, benytter vi gjerne tabeller over slike treghetsmoment. Du finner en liten tabell nedenfor, der alle legemene har masse m. Det forutsettes at legemene er homogene. Legg merke til at tabellen nedenfor bare oppgir treghetsmomentet om en akse gjennom *massesenteret*.

Legeme	Beskrivelse	Akse	Treghetsmoment
	Tynn stav med lengde L.	Gjennom stavens massesenter, vinkelrett på staven.	$I = \frac{1}{12} mL^2$
	Tynn, rektangulær skive med sidekanter a og b.	Gjennom skivas massesenter, vinkelrett på skiva.	$I = \frac{1}{12} m\left(a^2 + b^2\right)$
		Langs sidekant med lengde b.	$I = \frac{1}{3} ma^2$
	Homogen kule med radius R.	Gjennom kulas sentrum.	$I = \frac{2}{5} mR^2$
	Tynt kuleskall med radius R.		$I = \frac{2}{3} mR^2$
	Homogen sylinder med radius R.	Langs sylinderens symmetriakse.	$I = \frac{1}{2} mR^2$
	Tynt sylinderskall med radius R.		$I = mR^2$

Når vi kjenner treghetsmomentet for et legeme om en akse gjennom massesenteret, kan vi finne legemets treghetsmoment om enhver annen akse som er parallell med den første ved å bruke ***Steiners setning*** (som også kalles ***parallellakse-setningen***). Denne setningen er bevist i kap. 6.3.3.

Dersom et legeme med masse m har treghetsmoment I_{CM} om en akse gjennom massesenteret, er legemets treghetsmoment om en akse A som er parallell med aksen gjennom massesenteret i avstand a fra denne gitt ved

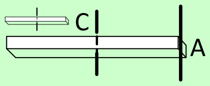
$$I_{\mathrm{A}} = I_{\mathrm{CM}} + ma^2 .$$

Eksempel 6.3.1:

a) Finn treghetsmomentet til en tynn stav med lengde L om en akse vinkelrett på staven gjennom stavens ene endepunkt når du vet at treghetsmomentet om en akse vinkelrett på staven om stavens massesenter er $I_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{12} mL^2$.

b) Finn treghetsmomentet til en sylinder om en akse langs sylinderens overflate parallell med symmetriaksen.

Løsning:

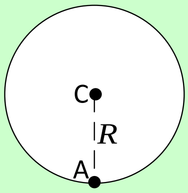
a) 

Jeg vet altså at stavens treghetsmoment om en akse vinkelrett på staven gjennom massesenteret C er

$$I_{\text{CM}} = \tfrac{1}{12} mL^2 .$$

En parallell akse gjennom et endepunkt for staven har avstand $a = \tfrac{1}{2}L$ fra aksen gjennom massesenteret. Da er treghetsmomentet om den nye aksen

$$I_{\text{A}} = I_{\text{CM}} + ma^2 = \tfrac{1}{12} mL^2 + m\left(\tfrac{1}{2}L\right)^2 = \left(\tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{4}\right) mL^2 = \underline{\underline{\tfrac{1}{3} mL^2}} .$$

b) 

Jeg finner i tabellen at sylinderens treghetsmoment om en akse langs sylinderaksen (og dermed gjennom massesenteret) er

$$I_{\text{CM}} = \tfrac{1}{2} mL^2 .$$

En parallell akse langs sylinderens overflate har avstand $a = R$ fra aksen gjennom massesenteret. Da er treghetsmomentet om den nye aksen

$$I_{\text{A}} = I_{\text{CM}} + ma^2 = \tfrac{1}{2} mR^2 + mR^2 = \underline{\underline{\tfrac{3}{2} mR^2}} .$$

Dersom vi har et ***plant*** legeme, har vi en annen nyttig setning som vi kaller ***setningen om det polare treghetsmomentet*** og som også er bevist i kap. 6.3.3:

Dersom et ***plant*** legeme ligger i *x*-*y*-planet, og har treghetsmomentene I_x og I_y om henholdsvis *x*- og *y*-aksen, så er treghetsmomentet I_z om en *z*-akse gjennom origo vinkelrett på *xy*-planet gitt ved

$$I_z = I_x + I_y .$$

Eksempel 6.3.2: Finn treghetsmomentet for en tynn, rektangulær skive med masse *m* og sidekanter *a* og *b* om en akse vinkelrett på planet gjennom et hjørne.

Løsning: Vi bruker først Steiners setning: Av tabellen ser vi at treghetsmomentet om en akse vinkelrett på skiva gjennom skivas massesenter er

$$I_{\text{CM}} = \tfrac{1}{12} m\left(a^2 + b^2\right).$$

Hjørnet ligger i avstand

$$d = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}a\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}b\right)^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

fra massesenteret. Da er treghetsmomentet om aksen gjennom hjørnet

$$I_{\text{A}} = I_{\text{CM}} + md^2 = \tfrac{1}{12} m\left(a^2 + b^2\right) + m\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2$$

$$= \left(\tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{4}\right) m\left(a^2 + b^2\right) = \underline{\underline{\tfrac{1}{3} m\left(a^2 + b^2\right)}}$$

Det er enklere å bruke setningen om det polare treghetsmomentet: Treghetsmomentene om sidekantene er henholdsvis

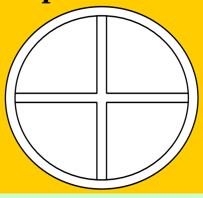
$$I_b = \tfrac{1}{3} ma^2 \text{ og } I_a = \tfrac{1}{3} mb^2 .$$

Da er treghetsmomentet om en akse vinkelrett på skiva gjennom et hjørne gitt ved

$$I_z = I_a + I_b = \tfrac{1}{3}mb^2 + \tfrac{1}{3}ma^2 = \underline{\underline{\tfrac{1}{3}m\left(a^2 + b^2\right)}}.$$

Det er ofte nyttig å tenke seg at legemer er bygd opp av enklere legemer som vi kan finne treghetsmomentet til. Treghetsmomentet til det sammensatte legemet er da summen av treghetsmomentene til del-legemene.

Eksempel 6.3.3:



Et hjul er bygd opp av en tynn ring med masse m_{ring} og radius R, og to tynne staver som hver har masse m_{stav} og lengde $2R$ slik figuren viser. Finn hjulets treghetsmoment om en akse vinkelrett på hjulets plan gjennom hjulets sentrum.

Løsning: Hver av de to stavene har treghetsmoment

$$I_{\text{stav}} = \tfrac{1}{12}m_{\text{stav}}\left(2R\right)^2 = \tfrac{1}{3}m_{\text{stav}}R^2$$

om en akse vinkelrett på staven gjennom stavens midtpunkt. Ringens treghetsmoment om den samme aksen er

$$I_{\text{ring}} = m_{\text{ring}}R^2.$$

Samlet treghetsmoment for hele hjulet er da

$$I = I_{\text{ring}} + 2I_{\text{stav}} = m_{\text{ring}}R^2 + 2\cdot\tfrac{1}{3}m_{\text{stav}}R^2 = \underline{\underline{\left(m_{\text{ring}} + \tfrac{2}{3}m_{\text{stav}}\right)R^2}}.$$

Oppgaver: 6.3.1, 6.3.2.

Noen ganger klarer vi ikke å beregne treghetsmomentet til et legeme om en gitt akse ved hjelp av de reglene som vi har sett på ovenfor. Da må vi gå tilbake til definisjonen, og beregne treghetsmomentet med integrasjon. Grunnprinsippene er vist nedenfor, der vi utleder formler som vi allerede har benyttet. En mer generell framgangsmåte for rotasjonssymmetriske legemer er vist i et lite tillegg.

*6.3.2. Beregning av treghetsmoment med integrasjon.

Vi har definert treghetsmomentet til et legeme om en akse A ved

$$I_{\text{A}} = \sum m_i r_i^2$$

der r_i er avstanden fra aksen til et massepunkt med massen m_i. Når vi skal beregne treghetsmoment for legeme ved hjelp av integrasjon, må vi erstatte summetegnet i definisjonen med et integral:

$$I_{\text{A}} = \int r^2\,dm$$

der r er avstanden fra aksen til et massepunkt med massen dm, og vi integrerer over hele legemet. Dette krever som regel at vi integrerer i rommet (eller i alle fall i planet), og vi skal derfor begrense oss til enkle situasjoner som kan handteres uten å ty til dobbelt- eller trippel-integral.

Eksempel 6.3.4: Beregn treghetsmomentet til en tynn, homogen stav med lengde L og masse m om en akse vinkelrett på staven i disse tilfellene:

a) Aksen går gjennom stavens ene endepunkt.

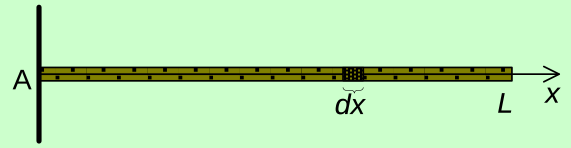
b) Aksen går gjennom stavens massesenter (midtpunkt).

Løsning: Det lønner seg ofte å innføre *tetthet* ρ som hjelpestørrelse. I denne situasjonen betrakter vi *tetthet* som masse pr lengdeenhet. Siden staven er homogen, er da

$$\rho = \frac{m}{L} = \frac{dm}{dx} \quad \Leftrightarrow \quad dm = \frac{m}{L}dx\,.$$

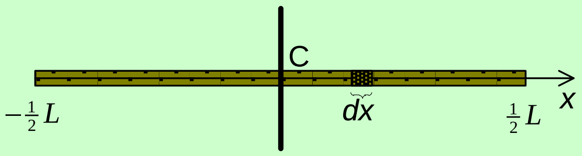
Her er x avstanden fra aksen til massepunktet med masse dm. Da blir:

a)



$$I_{\mathrm{A}} = \int_{x=0}^{x=L} x^2\,dm = \int_0^L x^2 \frac{m}{L}dx = \frac{m}{L}\cdot\left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^L = \frac{m}{L}\cdot\tfrac{1}{3}L^3 = \underline{\underline{\tfrac{1}{3}mL^2}}\,.$$

b)



$$I_{\mathrm{C}} = \int_{x=-\frac{1}{2}L}^{x=\frac{1}{2}L} x^2\,dm = \int_{-\frac{1}{2}L}^{\frac{1}{2}L} x^2 \frac{m}{L}dx = \frac{m}{L}\cdot\left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_{-\frac{1}{2}L}^{\frac{1}{2}L} = \frac{m}{L}\cdot\tfrac{1}{3}\left(\left(\tfrac{1}{2}L\right)^3 - \left(-\tfrac{1}{2}L\right)^3\right) = \underline{\underline{\tfrac{1}{12}mL^2}}\,.$$

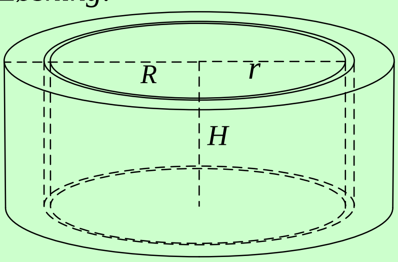
Legg merke til at du kan finne treghetsmomentet i b) ved å benytte resultatet i a) og Steiners formel slik:

$$I_{\mathrm{A}} = I_{\mathrm{C}} + ma^2 \quad \Leftrightarrow \quad I_{\mathrm{C}} = I_{\mathrm{A}} - ma^2 = \tfrac{1}{3}mL^2 - m\cdot\left(\tfrac{1}{2}L\right)^2 = \underline{\underline{\tfrac{1}{12}mL^2}}\,.$$

Det er litt verre å finne treghetsmomentet til en rett, homogen sylinder om symmetriaksen:

Eksempel 6.3.5: Beregn treghetsmomentet for en rett, homogen sylinder med masse m, radius R og høyde H om symmetriaksen.

Løsning:



Vi benytter sylinderskall-teknikken. Et tynt sylinderskall med tykkelse dr i avstand r fra sylinderaksen har volum

$$dV = 2\pi r\cdot H\cdot dr\,.$$

Volumet av hele sylinderen er

$$V = \pi R^2\cdot H\,.$$

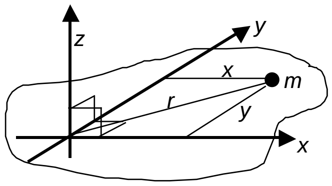
Siden sylinderen er homogen, er tettheten den samme over alt:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{dm}{dV} \quad \Leftrightarrow \quad dm = \frac{m\cdot 2\pi r\cdot H\cdot dr}{\pi R^2 H} = \frac{2mr}{R^2}dr\,.$$

Da blir treghetsmomentet om symmetriaksen:

$$I_{\mathrm{C}} = \int_0^R r^2 dm = \int_0^R r^2\cdot\frac{2mr}{R^2}dr = \frac{2m}{R^2}\cdot\int_0^R r^3 dr = \frac{2m}{R^2}\cdot\left[\tfrac{1}{4}r^4\right]_0^R = \frac{m}{2R^2}\cdot R^4 = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}mR^2}}\,.$$

*6.3.3. Bevis for setningene.

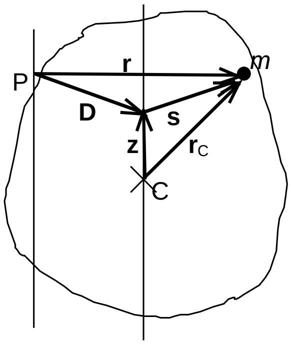


Vi starter med setningen om det polare treghetsmomentet. Figuren viser et plant legeme som ligger i *xy*-planet. Avstanden fra origo til et massepunkt m_i er r_i. Av figuren ser vi at

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 \,.$$

Da blir treghetsmomentet til det plane legemet om *z*-aksen

$$I_z = \sum m_i r_i^2 = \sum m_i \left(x_i^2 + y_i^2 \right) = \sum m_i x_i^2 + \sum m_i y_i^2 = \underline{\underline{I_y + I_x}} \,.$$



Så var det Steiners setning. Figuren viser et legeme med massesenter C. Legemet består av småbiter med masse m_i. Gjennom massesenteret er det trukket en akse, og treghetsmomentet om denne aksen er

$$I_\mathrm{C} = \sum m_i \mathbf{s}_i^2$$

der vi summerer over hele legemet (på figuren er indeksene *i* ikke tatt med for oversiktens skyld). Det er også tegnet inn en annen akse gjennom P, parallell med den første i avstand *D*. Treghetsmomentet om aksen gjennom P er

$$I_\mathrm{P} = \sum m_i \mathbf{r}_i^2 \,.$$

Figuren må oppfattes slik at vektorene **D**, **r** og **s** ligger i et plan vinkelrett på de to aksene. Da blir

$$\mathbf{r}_i^2 = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i = \left(\mathbf{D} + \mathbf{s}_i \right) \cdot \left(\mathbf{D} + \mathbf{s}_i \right) = \mathbf{D}^2 + 2\mathbf{D} \cdot \mathbf{s}_i + \mathbf{s}_i^2$$

slik at

$$\begin{aligned} I_\mathrm{P} &= \sum m_i \mathbf{r}_i^2 = \sum m_i \left(\mathbf{D}^2 + 2\mathbf{D} \cdot \mathbf{s}_i + \mathbf{s}_i^2 \right) = \mathbf{D}^2 \sum m_i + 2\mathbf{D} \cdot \sum m_i \mathbf{s}_i + \sum m_i \mathbf{s}_i^2 \\ &= D^2 \cdot m + 2\mathbf{D} \cdot \sum m_i \mathbf{s}_i + I_\mathrm{C} \end{aligned}$$

Vi må nå vise at

$$\mathbf{D} \cdot \sum m_i \mathbf{s}_i = 0 \,.$$

Det gjør vi ved å sette

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{r}_{\mathrm{C},i} - \mathbf{z}_i$$

slik at

$$\mathbf{D} \cdot \sum m_i \mathbf{s}_i = \mathbf{D} \cdot \sum m_i \left(\mathbf{r}_{\mathrm{C},i} - \mathbf{z}_i \right) = \mathbf{D} \cdot \sum m_i \mathbf{r}_{\mathrm{C},i} - \sum m_i \mathbf{D} \cdot \mathbf{z}_i \,.$$

Her blir

$$\sum m_i \mathbf{D} \cdot \mathbf{z}_i = \mathbf{0}$$

fordi **D** står vinkelrett på $\mathbf{z}_i$, og

$$\sum m_i \mathbf{r}_{\mathrm{C},i} = \mathbf{0}$$

fordi denne summen beregnes med *massesenteret* som origo. Du husker sikkert at massesenterets posisjon er

$$\mathbf{R}_\mathrm{C} = \frac{1}{m} \sum m_i \mathbf{r}_{\mathrm{C},i} \,,$$

slik at summen må bli lik null når origo faller sammen med massesenteret. Dermed står vi igjen med at

$$I_P = D^2 \cdot m + I_C ,$$

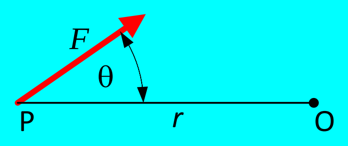
og det var nettopp det vi skulle vise.

6.4. Kraftmoment.

Hittil har vi nøyd oss med å *beskrive* rotasjon, samt se på energi i forbindelse med rotasjon. Nå skal vi se nærmere på hva som kan *forårsake* rotasjon. Vi skal da definere begrep og sette opp formler for rotasjon som tilsvarer begrep og formler for translasjon. Disse definisjonene og formlene er egentlig vektorlikninger. Men vi skal stort sett begrense oss til enkle situasjoner med rotasjon om en fast akse, eller en akse som parallellforskyves. Da kan vi klare oss uten vektor-formalismen. Jeg skal derfor vente med å innføre vektorer til kap. 6.7.

6.4.1. Foreløpig definisjon av kraftmoment.

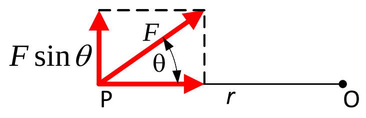
Tenk deg at du skal skyve opp ei dør. Da vil du ganske sikkert skyve vinkelrett på dørflata, og så langt fra hengsel-siden som mulig. Dreie-virkningen til en kraft avhenger nemlig av tre ting: Kraftens størrelse, dens retning, og dens plassering i forhold til rotasjonsaksen. Vi trenger derfor begrepet ***kraftmoment***, som vi foreløpig definerer slik:



Anta at en kraft med størrelse F angriper et legeme i et punkt P. Vi velger et ***momentpunkt*** O. Linja fra O til P har lengde r. Dersom θ er vinkelen mellom linja OP og kraftretningen, har ***kraftmomentet til F om* O** størrelsen

$$\tau = F \cdot r \cdot \sin\theta .$$

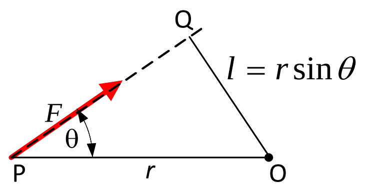
Denne definisjonen kan vi oppfatte på flere måter som vist nedenfor:



Vi kan oppfatte definisjonen som

$$\tau = (F\sin\theta)\cdot r$$

der $F\sin\theta$ er komponenten av kraften vinkelrett på linja OP. Vi kan altså si at kraftmomentet til **F** om O er lik normal-komponenten av **F** multiplisert med avstanden r mellom momentpunktet O og kraftens angrepspunkt. Komponenten langs OP gir ikke noe kraftmoment om O.



Eller vi kan oppfatte definisjonen slik: Vi nedfeller normalen OQ fra momentpunktet O til kraftens angrepslinje. Lengden av linjestykket OQ kalles ***kraftens arm***, og gis symbolet l. Vi ser at $l = r\sin\theta$, slik at kraftmomentets størrelse er

$$\tau = F\cdot(r\sin\theta) = F\cdot l .$$

Det kan derfor være gunstig å oppfatte kraftmoment som "kraft ganger arm".

Eksempel 6.4.1: I figuren ovenfor har kraften størrelsen 10 N, strekningen OP er 0.80 m, og vinkelen θ er 30°. Finn størrelsen av kraftens moment om O.

Løsning: $\tau = F \cdot r \cdot \sin\theta = 10\,\mathrm{N} \cdot 0.80\,\mathrm{m} \cdot \sin 30^\circ = \underline{\underline{4.0\,\mathrm{N\,m}}}$.

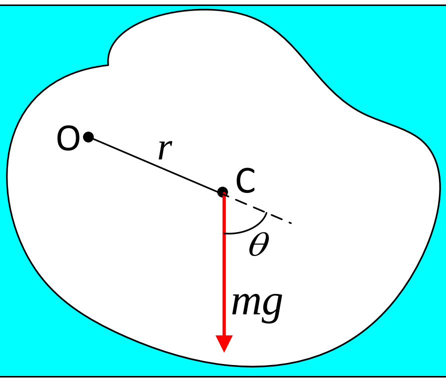
Av eksemplet ovenfor ser vi at kraftmoment har benevningen $\mathrm{N \cdot m}$. Energi har også benevning $\mathrm{N \cdot m}$. Likevel har kraftmoment ingen ting med energi å gjøre.

Et legeme som dreier seg om en fast akse, kan dreie seg *med* eller *mot* urviseren. Vi definerer dreieretningen *mot* urviseren som positiv retning. Da er det naturlig å si at et kraftmoment er positivt dersom det prøver å dreie legemet *mot* urviseren. Kraftmomentet er negativt dersom det prøver å dreie legemet *med* urviseren. Med vår foreløpige definisjon av kraftmoment, må vi selv avgjøre fortegnet til kraftmomentet, gjerne ved hjelp av en figur.

Merk at det har ingen mening å snakke om ”kraftmomentet til kraften **F**”. Vi må også angi hvilket momentpunkt vi bruker. Endrer vi momentpunkt, vil også kraftmomentet endres. Vi må derfor alltid tale om ”kraftmomentet til **F** om momentpunktet O”.

Oppgave: 6.4.1.

Det er svært vanlig at tyngdekraften gir et kraftmoment. Da kan vi benytte setningen nedenfor:



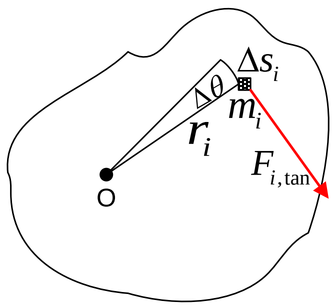
Vi finner kraftmomentet til tyngden $G = mg$ til et legeme om et momentpunkt O ved å anta at denne tyngdekraften angriper i massesenteret C:

$$\tau = mg \cdot r \cdot \sin\theta\,.$$

Denne påstanden skal bevises i kap. 6.7.2 ved å benytte vektor-egenskapene.

Oppgave: 6.4.2.

6.4.2. Arbeid og effekt.



Vi har et stivt legeme som roterer om en fast akse, og skal legge momentpunktet O på denne aksen. Vi skal se på en av de mange partiklene som dette legemet er bygd opp av. Vektorsummen av de kreftene som virker på denne partikkelen er $\mathbf{F}_i$. Det er åpenbart at $\mathbf{F}_i$ må ligge i rotasjons-planet, ellers ville partikkelen forlatt dette planet. Dessuten vet vi at kun kraftkomponenten $F_{i,\tan}$ tangentielt til banen kan utføre arbeid.

Når legemet har rotert en liten vinkel $\Delta\theta$ har en partikkel i avstand r_i fra aksen flyttet seg en strekning $\Delta s_i = r_i \cdot \Delta\theta$. Det samlede arbeidet som utføres på alle partiklene i legemet når det roterer en liten vinkel $\Delta\theta$ er da

$$\Delta W = \sum F_{i,\tan} \cdot \Delta s_i = \sum F_{i,\tan} \cdot r_i \cdot \Delta\theta = \left(\sum \tau_i\right) \cdot \Delta\theta = \tau \cdot \Delta\theta .$$

Her er τ det samlede kraftmomentet om momentpunktet O på rotasjonsaksen. Men summen av kraftmomenter som skyldes *indre* krefter må være lik null, ellers kunne slike kraftmoment fått legemet til å rotere spontant. Vi vet at dette aldri skjer.

Vi kan nå finne det samlede arbeidet ved å integrere. Når legemet har rotert fra en startvinkel θ_1 til en sluttvinkel θ_2 er det utført et arbeid

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} dW = \underline{\underline{\int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau \cdot d\theta}}$$

der τ er summen av kraftmomentene til de ytre kreftene. Dersom τ er konstant, får vi at

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta = \tau \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \underline{\underline{\tau \cdot (\theta_2 - \theta_1)}} .$$

Effekten blir da

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\tau \cdot \Delta\theta}{\Delta t} = \tau \cdot \frac{d\theta}{dt} = \underline{\underline{\tau \cdot \omega}} .$$

Vi har altså funnet at:

Et stivt legeme roterer med vinkelfart ω om en fast akse mens vektorsummen av kraft-momentene til de ytre kreftene har størrelse τ om et momentpunkt på aksen. Når legemet har rotert en vinkel $\Delta\theta$, har de ytre kreftene utført et arbeid

$$\Delta W = \tau \cdot \Delta\theta ,$$

og effekten er

$$P = \tau \cdot \omega .$$

Ved rotasjon er altså ”effekt = kraftmoment ganger vinkelfart”. Ved translasjon er ”effekt = kraft ganger fart”. Du ser vel likheten?

Eksempel 6.4.2: En bilmotor har en effekt på 100 kW ved 3600 omdreininger pr minutt. Hvilket kraftmoment svarer dette til?

Løsning: Vinkelfarten er

$$\omega = \frac{3600 \cdot 2\pi}{60\,\mathrm{s}} = 377\,\mathrm{rad/s} ,$$

slik at effekten blir

$$P = \tau \cdot \omega \quad \Leftrightarrow \quad \tau = \frac{P}{\omega} = \frac{100 \cdot 10^3 W}{377\,\mathrm{s}^{-1}} = \underline{\underline{265\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}}} .$$

Oppgave: 6.4.3.

6.5. Spinn.

6.5.1. Foreløpig definisjon av spinn.

Du husker forhåpentlig at Newtons 2. lov med fordel kan formuleres som

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

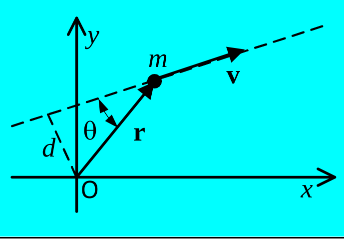
der **F** er vektorsummen av kreftene som virker på et legeme, og $\mathbf{p} = m \cdot \mathbf{v}$ er bevegelses-mengden til legemet.

Vi har nettopp sett at når det gjelder rotasjon, må vi ta hensyn til kraft*momentet*, ikke bare kraften. Fins det da noe bevegelsesmengde*moment* som kan gi oss en tilsvarende sammenheng mellom kraft*moment* og bevegelsesmengde*moment*?

Svaret er *ja*. Men før vi går i gang, skal vi erstatte det tungvinte uttrykket *bevegelsesmengde-moment* med det enklere uttrykket ***spinn***.

Egentlig er spinn en vektor. Men på samme måte som for kraftmoment skal vi i første omgang oppfatte spinnet som en skalar størrelse.

Vi starter pent og forsiktig med spinnet til en *partikkel* med masse *m* og fart *v*:



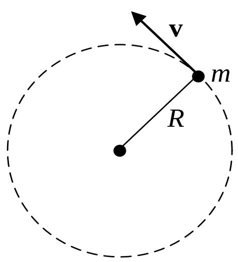
En partikkel med masse *m* beveger seg med fart *v* langs en rett linje som ligger i *x*-*y*-planet i avstand *d* fra et ***momentpunkt*** O slik figuren til venstre viser. Partikkelens ***spinn*** i forhold til O har da størrelsen

$$L = r \cdot (mv) \cdot \sin\theta \,.$$

Det er vanlig å definere rotasjon *mot* urviseren som positiv dreieretning. Legemer som roterer *mot* urviseren får da *positivt* spinn. Partikkelen på figuren i ramma ovenfor har derfor *negativt* spinn.

Merk at spinn er ikke en egenskap ved et legeme slik som masse og bevegelsesmengde er. Spinnet avhenger også av hvor vi plasserer momentpunktet O.

I kap 6.7.2 skal vi gi en vektor-definisjon av spinn. Ved å benytte vektor-formen får vi både størrelsen og retningen av spinnet. Vi får også bedre utgangspunkt for å studere de mange egenskapene ved spinnet.



Navnet "spinn" antyder at vi først og fremst skal benytte begrepet i forbindelse med rotasjon. Vi skal nå se nærmere på dette, og skal starte med *en* partikkel med masse *m* som roterer med fart *v* i en sirkelbane med radius *R*. Av figuren til venstre ser du at størrelsen av spinnet om origo er

$$L = r \cdot mv \cdot \sin\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) = \underline{r \cdot mv}\,.$$

Denne partikkelen kan være en av de mange partiklene som inngår i ei tynn skive som roterer med vinkelfart ω om en akse A gjennom origo vinkelrett på skiva. Skivas samlede spinn om aksen A blir da summen av bidragene til disse partiklene:

$$L_\text{A} = \sum r_i m_i v_i = \sum r_i m_i\,(\,\omega r_i\,) = \left(\sum m_i r_i^2\right)\omega = \underline{I_\text{A}\omega}\,.$$

Her har jeg benyttet at for hver partikkel er $v = \omega r$, og at ω er den samme for alle partiklene i et *fast* legeme slik at ω kan settes utenfor summetegnet. Til slutt har jeg benyttet at $I_\text{A} = \sum m_i r_i^2$ er skivas treghetsmoment om aksen.

Hva skjer dersom vi lar mer kompliserte legemer enn tynne skiver rotere om en akse? Kan vi ikke bare snitte opp slike 3-dimensjonale legemer i tynne skiver vinkelrett på aksen og summere bidragene fra hver skive? Dessverre, så enkelt er det nok ikke. Det skyldes at spinn egentlig er en vektor, samt at spinn beregnes om et *punkt* mens treghetsmoment beregnes om en *akse*. Heldigvis er det noen vanlige situasjoner der vi får den samme enkle sammenhengen mellom spinn, treghetsmoment og vinkelfart som vi fant for ei tynn, roterende skive:

Når et *symmetrisk* legeme roterer med vinkelfart ω *om symmetriaksen*, og denne aksen er fast i rommet, er spinnet om et vilkårlig momentpunkt på symmetriaksen gitt ved

$$L_\text{A} = I_\text{A}\omega$$

der I_A er legemets treghetsmoment om rotasjonsaksen.

Merk at:

- Legemet må være *symmetrisk*, men det ikke er nødvendig med *rotasjons*symmetri. Legemet må rotere om denne symmetriaksen som må ligge fast i rommet.
- Spinnet er det samme om ethvert momentpunkt på symmetri- (rotasjons-) aksen. Det er derfor vanlig å snakke om spinnet om denne *aksen*, selv om spinn egentlig er definert i forhold til et *punkt*.

Du finner en noe ufullstendig utledning av påstandene ovenfor i kap 6.7.3.

Eksempel 6.5.1: Beregn størrelse og retning til spinnet til
a) en homogen sylinder med masse m og radius R
b) ei homogen kule med masse m og radius R
som roterer med konstant vinkelfart ω om en fast akse gjennom massesenteret. Spinnet skal beregnes i forhold til et vilkårlig punkt på denne aksen.

Løsning:

a) En homogen sylinder har treghetsmoment $I = \frac{1}{2}mR^2$ om symmetriaksen. Da blir størrelsen av spinnet om et vilkårlig punkt på denne aksen

$$L = I\omega = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}mR^2\omega}}\,.$$

b) Ei homogen kule har treghetsmoment $I = \frac{2}{5}mR^2$ om symmetriaksen. Da blir størrelsen av spinnet om et vilkårlig punkt på denne aksen

$$L = I\omega = \underline{\underline{\tfrac{2}{5}mR^2\omega}}\,.$$

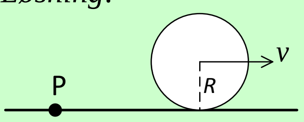
Vi har tidligere vist at den kinetiske energien til et legeme er summen av massesenterets kinetiske energi og kinetisk energi på grunn av bevegelse rundt massesenteret. Vi har en tilsvarende setning for spinn. Setningen er bevist i kap 6.7.4, og kan formuleres slik:

Spinnet til et legeme om et fast punkt O er summen av massesenterets spinn om O og spinnet til legemets enkelte partikler om massesenteret.

Vi skal begrense oss til å benytte setningen på symmetriske legemer som beveger seg slik at symmetriaksen ikke endrer retning i rommet. Da kan vi gå fram som i eksemplet nedenfor:

Eksempel 6.5.2: En sylinder med masse *m* og radius *R* ruller med fart *v* uten å gli på ei horisontal flate. Beregn sylinderens spinn om et vilkårlig fast punkt P på denne flata.

Løsning:



Sylinderens massesenter beveger seg langs flata i en fast avstand *R* over denne flata. Da er massesenterets spinn om P gitt ved

$$R \cdot mv\,.$$

Ved å benytte resultatet i Eksempel 6.5.1a ovenfor, samt at vinkelfarten er

$$\omega = \frac{v}{R}$$

når sylinderen ikke glir på underlaget, får vi at sylinderens spinn om massesenteret blir

$$\tfrac{1}{2}mR^2\omega = \tfrac{1}{2}mR^2 \cdot \frac{v}{R} = \tfrac{1}{2}mR \cdot v\,.$$

Vi legger sammen disse to bidragene, og får at spinnet om et vilkårlig punkt P på flata er

$$I_P = R \cdot mv + \tfrac{1}{2}mR \cdot v = \underline{\underline{\tfrac{3}{2}mvR}}\,.$$

Oppgave: 6.5.1.

6.5.2. Spinnsetningen.

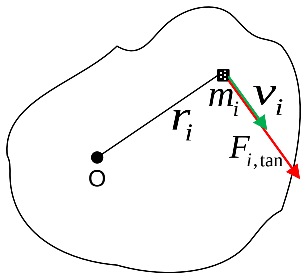
Nå som vi vet hva *spinn* er, skal vi se hva vi kan bruke begrepet til. Jeg skal starte med å formulere ***spinnsetningen***, og nøyer meg med å skrive den på skalar form:

Dersom et fast legeme har spinn L_O om et fast momentpunkt O, er

$$\frac{dL_O}{dt} = \tau_O$$

der τ_O er summen av kraftmomentene om O til de ytre kreftene som virker på legemet. Setningen gjelder også dersom momentpunktet O faller sammen med legemets massesenter, selv om dette ikke er i ro.

Nedenfor finner du en forenklet utledning, der jeg forutsetter at vi har et fast legeme som roterer om en fast akse. Setningen er imidlertid vist mer generelt (på vektorform) i kap. 6.7.5.



Vi deler opp legemet i mange smådeler med masser m_i, fart v_i og avstand r_i fra et fast momentpunkt O. Spinnet til legemet om O er

$$L_{\mathrm{O}} = \sum r_i \cdot m_i v_i \ .$$

Alle massene m_i er konstante. Siden vi har et fast legeme, er også alle avstandene r_i konstante. Ved derivasjon blir da

$$\frac{dL_{\mathrm{O}}}{dt} = \sum r_i \cdot m_i \cdot \frac{dv_i}{dt} \ .$$

Men på grunn av Newtons 2. lov blir

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = F_{i,\tan}$$

slik at

$$\frac{dL_{\mathrm{O}}}{dt} = \sum r_i \cdot m_i \cdot \frac{dv_i}{dt} = \sum r_i \cdot F_{i,\tan} = \tau_{\mathrm{O}} \ .$$

Vi har tidligere kommet fram til at summen av alle kraftmomentene som skyldes indre krefter må være lik null. Dermed framkommer setningen i ramma.

Merk likheten mellom denne setningen og Newtons 2. lov på formen

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \ .$$

Legg også merke til at vi forutsetter at momentpunktet O er *fast* i rommet. Vi kan imidlertid vise at setningen også gjelder dersom vi bruker *massesenteret* som momentpunkt selv om dette beveger seg.

Spinnsetningen er utgangspunkt for flere viktige setninger og fysiske prinsipper. Vi skal starte med å se på *spinnbevaring*, som er like viktig for rotasjon som bevaring av bevegelsesmengde er for translasjon. I neste kapitel skal vi se på *kraftmomentsetningen*, som spiller samme rolle for rotasjon som Newtons 2. lov gjør for translasjon.

6.5.3. Spinnbevaring.

Av sammenhengen $\dfrac{dL_{\mathrm{O}}}{dt} = \tau_{\mathrm{O}}$ ser vi at:

- Dersom $\tau_{\mathrm{O}} = 0$ blir $\dfrac{dL_{\mathrm{O}}}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L_{\mathrm{O}}$ er konstant.

Denne setningen gjelder når O er et fast punkt, eller når vi bruker massesenteret som moment-punkt selv om dette beveger seg. Da har vi altså:

> Dersom summen av de ytre kreftenes kraftmomenter om et fast momentpunkt O eller om massesenteret er lik null, er systemets spinn om dette momentpunktet bevart.

Denne setningen er mye viktigere enn man skulle tro ved første øyekast. Den kommer til anvendelse i en lang rekke situasjoner der rotasjon er involvert. Vi skal imidlertid begrense oss til situasjoner der et symmetrisk legeme roterer med vinkelfart ω om sin symmetriakse, og denne aksen er fast i rommet eller parallellforskyves. Størrelsen av spinnet er da $L = I_A\omega$ der I_A er legemets treghetsmoment om denne aksen. Dette benytter vi i eksemplet nedenfor:

Eksempel 6.5.3: To homogene svinghjul som har treghetsmomenter I_1 og I_2 om sine symmetriakser roterer på samme horisontale aksling med vinkelfart henholdsvis ω_1 og ω_2. Av en eller annen grunn kommer de i kontakt med hverandre, og klistrer seg sammen. Finn vinkelfarten til det sammenklistrede legemet. Se bort fra kraftmoment fra ytre krefter.

Løsning: Siden det ikke virker kraftmoment fra ytre krefter under denne prosessen er spinnet bevart. Før svinghjulene klistrer seg sammen var svinghjulenes samlede spinn

$$L = L_1 + L_2 = I_1\omega_1 + I_2\omega_2 .$$

Etter at svinghjulene er blitt klistret sammen, har vi fått *ett* legeme som har treghetsmoment

$$I = I_1 + I_2 .$$

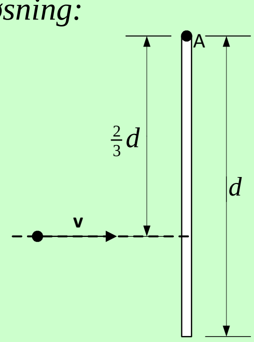
Legemets vinkelfart kalles ω. Da er

$$I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = (I_1 + I_2)\omega \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \underline{\underline{\frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2}}} .$$

Dersom en partikkel med masse m og hastighet $\mathbf{v}$ er involvert, må vi også ta hensyn til spinnet til denne partikkelen slik vi definerte det i starten av dette punktet: $L = mvr\sin\theta$. Eksemplet nedenfor viser hvordan vi da kan gå fram:

Eksempel 6.5.4: En tynn, homogen stav med lengde d og masse m kan rotere uten friksjon om en akse A i den ene enden. Staven er i ro, og treffes av en partikkel med masse $\frac{3}{4}m$, som før støtet hadde hastighet $\mathbf{v}$ vinkelrett på staven. Partikkelen treffer staven i avstand $\frac{2}{3}d$ fra aksen, og blir sittende fast i staven. Finn vinkelfarten til systemet like etter støtet.

Løsning:



Før støtet er det kun partikkelen som har spinn om A. Størrelsen av dette spinnet er

$$L_A = \tfrac{3}{4}m \cdot v \cdot \tfrac{2}{3}d \cdot \sin\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) = \underline{\tfrac{1}{2}mvd} .$$

Etter støtet har vi et sammensatt legeme der treghetsmomentet om en akse gjennom A er gitt ved:

$$I_A = \underbrace{\tfrac{1}{3}md^2}_{\text{stav om A}} + \underbrace{\tfrac{3}{4}m \cdot \left(\tfrac{2}{3}d\right)^2}_{\text{kule om A}} = \tfrac{1}{3}md^2 + \tfrac{1}{3}md^2 = \underline{\tfrac{2}{3}md^2} .$$

Vi kaller vinkelfarten til det sammensatte legemet etter støtet for ω. Spinnet til dette sammensatte legemet om A etter støtet er

$$L_A' = I_A\omega = \underline{\tfrac{2}{3}md^2\omega} .$$

Siden ingen ytre krefter gir noe kraftmoment om A, er spinnet bevart:

$$L_A = L_A' \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}mvd = \tfrac{2}{3}md^2\omega \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \underline{\underline{\tfrac{3}{4}\cdot\frac{v}{d}}} .$$

Du husker sikkert at når to *partikler* kolliderer, er den kinetiske energien vanligvis ikke bevart. Det samme gjelder for slike "støt" som vi har sett på i de to eksemplene foran, der to roterende legemer "støter sammen".

Eksempel 6.5.5: Gå tilbake til eksempel 6.5.3. Sett $I_2 = 2I_1$ og $\omega_2 = -\omega_1$, og undersøk om den kinetiske energien er bevart under den prosessen.

Løsning: Mens de to skivene roterer fritt, er den samlede kinetiske (rotasjons-) energien

$$W = \tfrac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \tfrac{1}{2}I_2\omega_2^2 = \tfrac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \tfrac{1}{2}(2I_1)(-\omega_1)^2 = \tfrac{1}{2}I_1\omega_1^2 + I_1\omega_1^2 = \underline{\tfrac{3}{2}I_1\omega_1^2}\,.$$

Etter "støtet" er den kinetiske energien

$$W' = \tfrac{1}{2}(I_1 + I_2)\omega^2 = \tfrac{1}{2}(I_1 + 2I_1)\left(\frac{I_1\omega_1 + 2I_1(-\omega_1)}{I_1 + 2I_1}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\cdot 3I_1\left(\frac{-I_1\omega_1}{3I_1}\right)^2 = \underline{\tfrac{1}{6}I_1\omega_1^2}\,.$$

Vi ser at den kinetiske energien er kraftig redusert. Energi er altså gått over til varme når de to skivene gnisser mot hverandre før de får samme vinkelfart.

Oppgaver: 6.5.2, 6.5.3, 6.5.4, 6.5.5.

Spinnbevaring brukes mye i praksis. Noen eksempler:

- Når en kunstløper skal gå inn i en piruett, starter hun rotasjonen med armene langt ut fra kroppen. Dette gir stort treghetsmoment. Så trekker hun armene inn mot kroppen. Da avtar treghetsmomentet, og vinkelfarten i rotasjonen øker fordi spinnet $L = I\cdot\omega$ skal være konstant.
- En skihopper som er i ferd med å tippe forover i svevet vil rotere armene forover ("slår kontra"), og kroppen roterer bakover. Du vil forhåpentlig gjøre noe tilsvarende dersom du står på kaikanten og er i ferd med å miste balansen. Da vil du "slå kontra" slik at armene roterer forover mens kroppen (forhåpentlig) roterer langt nok bakover til at du ikke faller i vannet.
- En stuper som skal gjøre saltoer i lufta, går inn i stupet med strak kropp som roterer med liten vinkelfart. I stupet "knekker" stuperen kroppen. Da blir stuperens lengde omtrent halvert, slik at treghetsmomentet blir mye mindre. Dermed blir vinkelfarten mye større fordi spinnet skal være bevart. Ved å strekke ut kroppen igjen i nøyaktig rett øyeblikk, kan stuperen kontrollere vinkelfarten slik at han treffer vannflata slik han ønsker.

*6.6. Kraftmomentsetningen.

Vi skal igjen ta utgangspunkt i spinnsetningen på skalar form:

$$\frac{dL_A}{dt} = \tau_A\,.$$

Vi har sett at denne skalare formen gjelder dersom vi har et *plant* legeme som roterer om en akse, eller et rotasjons-symmetrisk legeme som roterer om en symmetriakse gjennom masse-senteret. Aksen må stå i ro, eller bevege seg uten å dreies (parallellforskyves). Da er L_A spinnet og τ_A kraftmomentet i forhold til et *vilkårlig* punkt på denne aksen.

Vi har også sett at i disse situasjonene er spinnet

$$L_{\mathrm{A}} = I_{\mathrm{A}}\omega ,$$

der I_{A} er legemets treghetsmoment om aksen, og ω er vinkelfarten. Siden I_{A} må være konstant i disse situasjonene, blir

$$\tau_{\mathrm{A}} = \frac{dL_{\mathrm{A}}}{dt} = \frac{d(I_{\mathrm{A}}\omega)}{dt} = I_{\mathrm{A}}\frac{d\omega}{dt} = I_{\mathrm{A}}\alpha$$

der $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$ er legemets vinkelakselerasjon. Vi har altså vist at:

Når et plant legeme roterer om en fast akse, eller når et rotasjonssymmetrisk legeme roterer om en symmetriakse gjennom massesenteret og denne aksen parallellforskyves, er

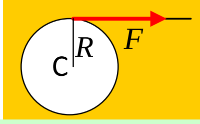
$$\tau_{\mathrm{A}} = I_{\mathrm{A}}\alpha$$

der τ_{A} er summen av kraftmomentene til de ytre kreftene om et *vilkårlig* momentpunkt på rotasjonsaksen, mens I_{A} er legemets treghetsmoment om denne aksen (som vi heretter skal kalle *momentaksen*).

Du ser vel likheten med Newtons 2. lov $F = ma$?

Vi skal nå se noen eksempler på bruken av kraftmomentsetningen. Da er det duket for et gjensyn med eksemplene fra kapitel 6.2.

Eksempel 6.6.1:



Vi trekker med en kraft på $10\,\mathrm{N}$ i ei snor som er viklet opp på en sylinder med masse 1.00 kg og radius 0.10 m. Sylinderen kan rotere uten friksjon om sin symmetriakse. Finn sylinderens vinkelakselerasjon.

Løsning: Vi finner først treghetsmomentet om symmetriaksen:

$$I_{\mathrm{C}} = \tfrac{1}{2}mR^2 = \tfrac{1}{2}\cdot(1.00\,\mathrm{kg})\cdot(0.10\,\mathrm{m})^2 = \underline{0.0050\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2}\,.$$

Siden både tyngden og kraften fra akslingen går gjennom C, gir ikke disse kreftene noe kraftmoment. Da er det bare trekk-kraften F som gir kraftmoment:

$$\tau_{\mathrm{C}} = F\cdot R = (10\,\mathrm{N})\cdot(0.10\,\mathrm{m}) = \underline{1.0\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}}\,.$$

Nå kan vi benytte kraftmoment-setningen:

$$\tau_{\mathrm{C}} = I_{\mathrm{C}}\alpha \quad\Leftrightarrow\quad \alpha = \frac{\tau_{\mathrm{C}}}{I_{\mathrm{C}}} = \frac{1.0\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}}{0.0050\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2} = \underline{\underline{200\,\mathrm{s}^{-2}}}\,.$$

I løsningen ovenfor foretok vi tallregningen først, og satte inn i kraftmomentsetningen etterpå. Vanligvis lønner det seg å gjøre det omvendt. Da blir det slik:

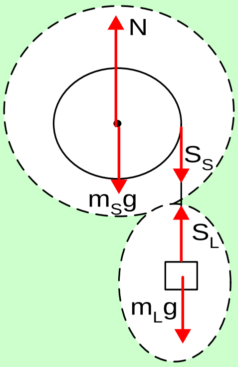
$$\tau_{\mathrm{C}} = I_{\mathrm{C}}\alpha \quad\Leftrightarrow\quad F\cdot R = \tfrac{1}{2}mR^2\cdot\alpha \quad\Leftrightarrow\quad \alpha = \frac{2F}{m\cdot R} = \frac{2\cdot 10\,\mathrm{N}}{(1.0\,\mathrm{kg})\cdot(0.10\,\mathrm{m})} = \underline{\underline{200\,\mathrm{s}^{-2}}}\,.$$

Oppgave: 6.6.1.

Dersom to eller flere legemer inngår i problemet, behandles hvert legeme for seg slik eksemplet nedenfor viser:

Eksempel 6.6.2: Vi skal fornye bekjentskapet med eksempel 6.2.2, der ei snor er viklet opp på en sylinder med masse $m_S = 1.00\,\text{kg}$ og radius $R = 0.10\,\text{m}$ som kan rotere uten friksjon om en fast akse. I enden av snora er det festet et lodd med masse $m_L = 1.00\,\text{kg}$. Vi skal nå finne sylinderens vinkelakselerasjon og loddets akselerasjon når loddet vikler snora av sylinderen .

Løsning:



Vi betrakter sylinderen og loddet som to system. Først setter vi opp kraftmomentsetningen for sylinderen siden den roterer. Vi lar naturlig nok rotasjonsaksen være momentakse. Da får verken sylinderens tyngde eller normalkraften fra rotasjonsaksen noe kraftmoment. Den eneste kraften som gir kraftmoment er snordraget S_S. Vi velger positiv rotasjonsretning *med* urviseren. Kraftmomentsetningen blir da:

$$S_S \cdot R = I \cdot \alpha \,.$$

Så ser vi på loddet, og velger positiv retning nedover. Da blir Newtons 2. lov:

$$m_L g - S_L = m_L \cdot a \,.$$

Nå må vi kombinere disse to likningene. Da benytter vi at snordraget er like stort over alt i snora, slik at

$$S_S = S_L = S \,.$$

Videre har alle punktene på snora samme akselerasjon. Det betyr at alle punkter på periferien av sylinderen har samme akselerasjon som loddet. Vi kan da sette at

$$a = R \cdot \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{a}{R} \,.$$

Nå kan vi omforme kraftmomentsetningen:

$$S_S \cdot R = I \cdot \alpha \quad \Leftrightarrow \quad S \cdot R = \left(\tfrac{1}{2} m_S R^2\right) \cdot \frac{a}{R} \quad \Leftrightarrow \quad S = \tfrac{1}{2} m_S a \,.$$

Dette settes inn i Newtons 2. lov for loddet, og vi får:

$$m_L g - S_L = m_L \cdot a \quad \Leftrightarrow \quad m_L g - \tfrac{1}{2} m_S a = m_L a \quad \Leftrightarrow \quad m_L g = m_L a + \tfrac{1}{2} m_S a = \left(m_L + \tfrac{1}{2} m_S\right) a$$

$$a = \underline{\underline{\frac{m_L}{m_L + \tfrac{1}{2} m_S} g}} = \frac{1.00\,\text{kg}}{1.00\,\text{kg} + \tfrac{1}{2} \cdot 1.00\,\text{kg}} \cdot 9.81\,\text{m/s}^2 = \underline{\underline{6.54\,\text{m/s}^2}} \,.$$

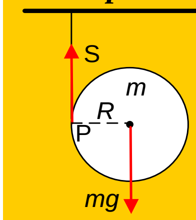
Da blir

$$\alpha = \frac{a}{R} = \underline{\underline{\frac{m_L g}{m_L + \tfrac{1}{2} m_S} \cdot \frac{1}{R}}} = \frac{6.54\,\text{m/s}^2}{0.10\,\text{m}} = \underline{\underline{65.4\,\text{s}^{-2}}} \,.$$

Oppgave: 6.6.2.

Til slutt skal vi se et eksempel der rotasjonsaksen parallellforskyves:

Eksempel 6.6.3:



Vi skal gå tilbake til eksempel 6.2.4, der ei masseløs snor er viklet opp på en homogen sylinder som har radius R og masse m. Den ene enden av snora er festet i taket. Sylinderen holdes med horisontal akse, og slippes. Snora vikles av sylinderen uten å gli. Vi forutsetter at aksen holder seg horisontal under fallet. Finn sylinderens vinkelakselerasjon, akselerasjonen til sylinderens massesenter og kraften S i snora.

Løsning: Her er det klart at rotasjonsaksen beveger seg. Men den parallellforskyves, og den faller sammen med symmetriaksen til legemet. Da kan vi bruke kraftmomentsetningen.

Med momentpunkt på sylinderaksen er det kun kraften S som gir kraftmoment. Vi får

$$S \cdot R = I\alpha = \tfrac{1}{2}mR^2\alpha \,.$$

Denne likningen har to ukjente, S og α. Vi trenger en likning til. Den gir Newtons 2. lov oss:

$$mg - S = m \cdot a \,.$$

Men her har vi fått inn en ny ukjent: akselerasjonen a til sylinderens massesenter. Heldigvis kan vi knytte sammen a og α fordi snora ikke glir på sylinderen:

$$a = \alpha R \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{a}{R} \,.$$

Settes dette inn i kraftmomentsetningen, får vi

$$S \cdot R = \tfrac{1}{2}mR^2\alpha = \tfrac{1}{2}mR^2 \cdot \frac{a}{R} \quad \Leftrightarrow \quad S = \tfrac{1}{2}m \cdot a \,.$$

Dette settes inn i Newtons 2. lov, og vi får

$$mg - \tfrac{1}{2}m \cdot a = m \cdot a \quad \Leftrightarrow \quad mg = \tfrac{3}{2}m \cdot a \quad \Leftrightarrow \quad a = \underline{\underline{\tfrac{2}{3}g}} \,.$$

Da nøster vi oss tilbake, og får

$$\alpha = \frac{a}{R} = \underline{\underline{\frac{2g}{3R}}} \,.$$

$$S = \tfrac{1}{2}m \cdot a = \tfrac{1}{2}m \cdot \tfrac{2}{3}g = \underline{\underline{\tfrac{1}{3}mg}} \,.$$

Men vi kan også velge en annen strategi. Vi kan legge en akse gjennom punktet P på figuren, parallelt med symmetriaksen. Siden snora ikke glir, vil dette punktet være i ro. Vi kan derfor betrakte sylinderens bevegelse som en rotasjon om en akse i ro gjennom P. Hvis vi gjør det, må vi huske på å bruke treghetsmomentet om denne aksen. Steiners setning gir

$$I_{\mathrm{P}} = I_{\mathrm{CM}} + m \cdot R^2 = \tfrac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \underline{\tfrac{3}{2}mR^2} \,.$$

Med akse gjennom P er det kun tyngden som gir kraftmoment. Vi får:

$$mg \cdot R = I_{\mathrm{P}}\alpha \quad \Leftrightarrow \quad mgR = \tfrac{3}{2}mR^2\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \underline{\underline{\frac{2g}{3R}}} \,.$$

På samme måte som før er

$$a = \alpha R = \frac{2g}{3R} \cdot R = \underline{\underline{\tfrac{2}{3}g}} \,.$$

Kraften S i snora finner vi av Newtons 2. lov:

$$mg - S = m \cdot a \quad \Leftrightarrow \quad S = mg - ma = m\left(g - \tfrac{2}{3}g\right) = \underline{\underline{\tfrac{1}{3}mg}} \,.$$

Vi ser at det er likegyldig hvilken av de to momentaksene vi bruker. Vi kunne faktisk satt opp kraftmomentsetninger om både symmetriaksen og P, og funnet S og α uten å bruke Newtons 2. lov.

**6.7. Kraftmoment og spinn på vektorform.*

6.7.1. Vinkel, vinkelfart og vinkelakselerasjon på vektorform.

Hittil har vi sett på *vinkel* som en skalar størrelse. Vi skal etter hvert se at det er nyttig å oppfatte *vinkel* som en vektor. Vi innfører da en vektor $\boldsymbol{\theta}$ som har samme størrelse som den vinkelen vi har definert tidligere, men som har retning *vinkelrett på det planet som vinkelen utspenner*. Ved rotasjon betyr dette at vektoren har retning *langs rotasjonsaksen*. Vi definerer vanligvis positiv retning når legemet roterer *mot* urviseren. Dette gir en enkel høyrehånds-regel: Grip med høyre hånd om det roterende legemet slik at de fire fingrene (unntatt tommelen) peker i den retningen partiklene i legemet roterer. Da vil tommelen peke i positiv retning for $\boldsymbol{\theta}$.

Når vi nå har definert vinkelen som en vektor, følger vektor-definisjonene av vinkelhastighet og vinkelakselerasjon direkte:

Vinkelhastighet: $\boldsymbol{\omega} = \dfrac{d\boldsymbol{\theta}}{dt}$.

Vinkelakselerasjon: $\boldsymbol{\alpha} = \dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$.

Ved rotasjon om en fast akse har både vinkelhastighet og vinkelakselerasjon retning langs rotasjonsaksen med positiv retning slik høyrehåndsregelen angir.

6.7.2. Kraftmoment og spinn på vektorform.

Vi definerer ***kraftmoment*** på vektorform slik:

Anta at en kraft **F** angriper et legeme i et punkt P. La **r** være en vektor *fra* et ***momentpunkt*** O *til* P. Da er ***kraftmomentet til* F *om* O** definert som

$$\boldsymbol{\tau}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} .$$

Jeg minner om et par egenskaper ved kryssproduktet (vektorproduktet):

1) $\left|\mathbf{r} \times \mathbf{F}\right| = r \cdot F \cdot \sin\left(\angle \mathbf{r}, \mathbf{F}\right)$.
2) Vektoren $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ står vinkelrett på både **r** og **F**. Retningen er gitt ved *høyrehåndsregelen*: Legg høyre hånd slik at høyre hånds fire finger (unntatt tommelen) peker *fra* **r** *til* **F**. Da peker $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ i tommelens retning.

Med denne vektor-definisjonen av kraftmoment får vi ikke bare *størrelsen* av kraftmomentet. Vi får også et fortegn som svarer til den rotasjonsretningen som kraften prøver å dreie legemet i dersom kraften virket alene.

Nå kan vi vise påstanden om at vi finner kraftmomentet til et legemes tyngde ved å anta at tyngden angriper i massesenteret. Vi tar da for oss et legeme som er satt sammen av n partikler som har masser m_1, m_2, …, m_n og posisjonsvektorer $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, …, $\mathbf{r}_n$ i forhold til et momentpunkt O. Tyngdene til disse partiklene gir da et samlet kraftmoment om O:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}_1 \times m_1\mathbf{g} + \mathbf{r}_2 \times m_2\mathbf{g} + \cdots + \mathbf{r}_n \times m_n\mathbf{g} = \left(m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \cdots + m_n\mathbf{r}_n\right) \times \mathbf{g} = \left(\sum m_i\mathbf{r}_i\right) \times \mathbf{g} .$$

Her har vi forutsatt at $\mathbf{g}$ er konstant. Men massesenterets posisjon er gitt ved

$$\mathbf{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M}\sum m_i\mathbf{r}_i \quad \Leftrightarrow \quad \sum m_i\mathbf{r}_i = M \cdot \mathbf{r}_{\mathrm{CM}}$$

der M er den samlede massen til hele legemet. Dermed blir

$$\boldsymbol{\tau} = \left(\sum m_i\mathbf{r}_i\right) \times \mathbf{g} = M\mathbf{r}_{\mathrm{CM}} \times \mathbf{g} = \mathbf{r}_{\mathrm{CM}} \times \left(M\mathbf{g}\right) .$$

Dette betyr at kraftmomentet til tyngden av alle partiklene som legemet består av er lik kraftmomentet til en partikkel med samme masse som legemet, og som befinner seg i legemets massesenter.

Utledningen ovenfor forutsetter at tyngdens akselerasjon er den samme for alle partiklene i legemet. For legemer av normal størrelse er dette alltid oppfylt. Men dersom dette kravet ikke er oppfylt, kan vi definere et ***tyngdepunkt*** der vi tenker oss at legemets masse plasseres ved beregning av kraftmomentet. For alle praktiske formål faller massesenter og tyngdepunkt sammen, og vi bruker ofte disse begrepene om hverandre.

For en *partikkel* med masse m og hastighet $\mathbf{v}$ definerer vi ***spinn*** det slik:

En partikkel med masse m og hastighet $\mathbf{v}$ har et ***spinn***

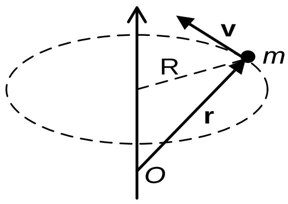
$$\mathbf{L}_{\mathrm{O}} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

i forhold til et momentpunkt O, der $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ er partikkelens bevegelsesmengde og $\mathbf{r}$ er partikkelens posisjonsvektor i forhold til O.

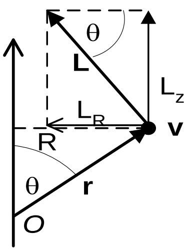
Merk at spinnet er en *vektor* som står vinkelrett på posisjonsvektoren $\mathbf{r}$ fra A til partikkelen, og vinkelrett på hastigheten $\mathbf{v}$. Positiv retning følger av høyrehåndsregelen.

6.7.3. Spinnet til et roterende legeme.

Vi har allerede presisert at spinnet til en partikkel avhenger av hvor vi plasserer moment-punktet. Vi skal ta utgangspunkt i en partikkel som roterer i sirkelbane med radius R, og se hva som skjer dersom vi velger et annet momentpunkt *på rotasjonsaksen* enn sirkelens sentrum. Figurene nedenfor illustrerer situasjonen.



En partikkel med masse *m* roterer rundt aksen i avstand *R*. La O være et punkt på rotasjonsaksen som *ikke* ligger i rotasjonsplanet slik figuren til venstre viser. Husk at spinnvektoren **L** står vinkelrett på både **v** og **r**, og må derfor peke mot et eller annet punkt på rotasjonsaksen.



Figuren til venstre viser situasjonen i et plan som utspennes av rotasjonsaksen og **r**, slik at **v** peker rett inn i papirplanet. Vi ser at når punktet O ikke ligger i rotasjonsplanet, dukker det opp en komponent L_R av **L** som peker inn mot rotasjonsaksen.

Men vi ser noe annet også. Av figuren ser vi at *z*-komponenten av spinnet blir:

$$L_z = |\mathbf{L}|\sin\theta = \left(|\mathbf{r}|\cdot|m\mathbf{v}|\cdot\sin 90^\circ\right)\sin\theta = r\sin\theta\cdot mv = R\cdot mv\,.$$

Men dette betyr jo at L_z kun avhenger av partikkelens masse, dens fart og avstanden fra aksen. L_z avhenger altså *ikke* av hvor på rotasjonsaksen O ligger.

Nå skal vi la denne partikkelen være partikkel nr *i* i et fast legeme, slik at vi skriver

$$L_{z,i} = R_i m_i v_i\,.$$

Da blir *z*-komponenten til legemets totale spinn om O:

$$L_z = \sum L_{z,i} = \sum R_i\cdot m_i v_i = \sum R_i\cdot m_i\left(\omega R_i\right) = \left(\sum m_i R_i^2\right)\omega = I_z\omega\,.$$

Disse partiklene trenger ikke å ligge i samme plan. Dermed har vi vist at:

z-komponenten til spinnet til et fast legeme som roterer med vinkelfart ω om en fast akse er

$$L_z = I_z\omega$$

der I_z er legemets treghetsmoment om rotasjonsaksen og momentpunktet ligger et vilkårlig sted på denne aksen.

Men vi ser mer. Dersom legemet er *symmetrisk om rotasjonsaksen*, må det eksistere en annen partikkel med samme masse *m* som ”vår” partikkel, samme fart *v* og samme avstand *R* fra rotasjonsaksen. Denne partikkelen gir opphav til et spinn som har en komponent L_z langs rotasjonsaksen og en komponent L_R inn mot rotasjonsaksen. Men de to komponentene inn mot rotasjonsaksen vil oppheve hverandre, slik at vi bare står igjen med de to L_z -komponentene.

Når vi nå summerer opp bidragene fra alle partiklene (som vi forutsetter skal bestå av symmetriske par), får vi at:

For et symmetrisk legeme som roterer med vinkelhastighet $\boldsymbol{\omega}$ om en fast akse er spinnet

$$\mathbf{L} = I_z\boldsymbol{\omega}$$

der I_z er legemets treghetsmoment om rotasjonsaksen og momentpunktet ligger et vilkårlig sted på denne aksen.

Merk at spinnet alltid har retning langs rotasjonsaksen.

6.7.4. Spinn og massesenter.

Vi har definert spinnet til et legeme om et fast punkt O som

$$\mathbf{L}_\mathrm{O} = \sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

der vi summerer over alle partiklene i legemet. Nå skriver vi posisjonsvektoren $\mathbf{r}_i$ som

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_\mathrm{CM} + \mathbf{r}_i\,'$$

der $\mathbf{r}_\mathrm{CM}$ er posisjonsvektoren til massesenteret mens $\mathbf{r}\,'$ er posisjonsvektoren til partikkel *i* i forhold til massesenteret. Vi deriverer denne sammenhengen, og får

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_\mathrm{CM}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_i\,'}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_\mathrm{CM} + \mathbf{v}_i\,'.$$

Her er $\mathbf{v}_\mathrm{CM}$ massesenterets hastiget, mens $\mathbf{v}_i$ og $\mathbf{v}_i\,'$ er hastigheten til partikkel *i* i forhold til henholdsvis punktet O og massesenteret. Innsetting gir nå

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_\mathrm{O} &= \sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \sum (\mathbf{r}_\mathrm{CM} + \mathbf{r}_i\,') \times m_i (\mathbf{v}_\mathrm{CM} + \mathbf{v}_i\,') \\
&= \sum \mathbf{r}_\mathrm{CM} \times m_i \mathbf{v}_\mathrm{CM} + \sum \mathbf{r}_\mathrm{CM} \times m_i \mathbf{v}_i\,' + \sum \mathbf{r}_i\,' \times m_i \mathbf{v}_\mathrm{CM} + \sum \mathbf{r}_i\,' \times m_i \mathbf{v}_i\,' \\
&= \mathbf{r}_\mathrm{CM} \times \left(\sum m_i \right) \mathbf{v}_\mathrm{CM} + \mathbf{r}_\mathrm{CM} \times \sum m_i \mathbf{v}_i\,' + \left(\sum m_i \mathbf{r}_i\,' \right) \times \mathbf{v}_\mathrm{CM} + \sum \mathbf{r}_i\,' \times m_i \mathbf{v}_i\,' \\
&= \mathbf{r}_\mathrm{CM} \times M \mathbf{v}_\mathrm{CM} + \mathbf{r}_\mathrm{CM} \times \mathbf{0} + \mathbf{0} \times \mathbf{v}_\mathrm{CM} + \mathbf{L}\,'
\end{aligned}$$

Her er $M = \sum m_i$ legemets samlede masse, mens $\mathbf{L}\,' = \sum \mathbf{r}_i\,' \times m_i \mathbf{v}_i\,'$ er legemets spinn om massesenteret. I overgangen til siste linje har jeg benyttet at en vektor fra punktet P til massesenteret er gitt ved

$$\mathbf{R}_\mathrm{P} = \frac{1}{M} \sum m_i \mathbf{r}_i$$

der $\mathbf{r}_i$ er posisjonsvektoren til partikkel *i* i forhold til punktet P. Da blir

$$\frac{1}{M} \sum m_i \mathbf{r}_i\,'$$

en vektor fra massesenteret til massesenteret. Men denne vektoren må jo være lik null. Ved å derivere denne sammenhengen, får vi at også $\sum m_i \mathbf{v}_i\,' = \mathbf{0}$. Dermed har vi vist at

$$\mathbf{L}_\mathrm{O} = \mathbf{r}_\mathrm{CM} \times M \mathbf{v}_\mathrm{CM} + \mathbf{L}\,'.$$

6.7.5. Spinnsetningen.

For et legeme som består av mange partikler, får vi det samlede spinnet om momentpunktet O ved å summere bidragene fra hver partikkel:

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$$

der $\mathbf{r}_i$ er posisjonsvektor fra O til partikkel *i*, og $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$ er bevegelsesmengden til partikkelen. Vi deriverer dette uttrykket med hensyn på tiden *t*, og får

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \right) = \sum \left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{p}_i + \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \right) = \sum \mathbf{v}_i \times \mathbf{p}_i + \sum \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \\
&= \mathbf{0} + \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \boldsymbol{\tau}
\end{aligned}$$

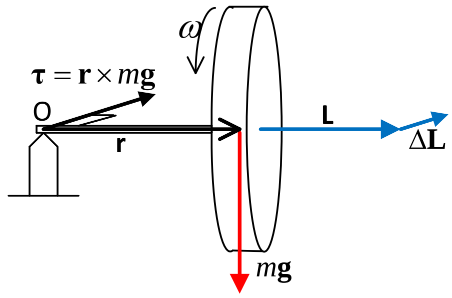
En kort forklaring av disse omformingene:

$$\sum \mathbf{v}_i \times \mathbf{p}_i = \sum \mathbf{v}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \sum m_i \mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \text{ fordi } \mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_i = v_i \cdot v_i \cdot \sin 0^\circ = 0 .$$

$\sum \mathbf{r}_i \times \dfrac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \boldsymbol{\tau}$. Her har vi benyttet Newtons 2. lov på formen $\mathbf{F} = \dfrac{d\mathbf{p}}{dt}$.

I utledningen ovenfor er $\mathbf{F}_i$ summen av de kreftene som virker på partikkel nr. *i*. Men denne kraftsummen består av både indre og ytre krefter. Men siden vektorsummen av kraftmomentene til alle de *indre* kreftene må være lik null, blir $\boldsymbol{\tau}$ summen av kraftmomentene til de *ytre* kreftene. Dermed framkommer spinnsetningen.

*6.8. Gyro-effekten.



Figuren til venstre viser et svinghjul som kan rotere om en horisontal akse. Denne aksen kan igjen dreies friksjonsfritt i alle retninger om et punkt O som vi skal bruke som momentpunkt. Når svinghjulet roterer med vinkelfart ω, har det et spinn $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ med samme retning som rotasjonsaksen. Tyngden $m\mathbf{g}$ av svinghjulet vil sette opp et kraftmoment $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times m\mathbf{g}$, og dette kraftmomentet er horisontalt og vinkelrett på aksen siden vektoren $\boldsymbol{\tau}$ står vinkelrett både på $\mathbf{r}$ og på tyngdekraften.

Men spinnsetningen

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}$$

viser jo at dette kraftmomentet fører til en liten endring $\Delta\mathbf{L}$ i spinnet, og denne spinnendringen har samme retning som $\boldsymbol{\tau}$, d.v.s. *horisontalt*. Dermed vil aksen med svinghjulet på dreie seg i et horisontalplan, og svinghjulet vil ikke falle ned som man skulle tro.

Aksens dreining i horisontalplanet om O vil selv skape et spinn med retning oppover. Det samlede spinnet blir derfor vektorsummen av disse to bidragene. En nøyere undersøkelse av hvordan $\boldsymbol{\tau}$ påvirker dette spinnet, viser at aksens dreining i horisontalplanet blir overlagret av en bevegelse opp og ned. Denne bevegelsen kalles *nutasjon*. Hvis du setter en snurrebass i rotasjon, er nutasjonen mest synlig like før snurrebassen stopper.

Alle roterende legemer påvirkes av denne gyro-effekten. Jordkloden roterer om sin akse, og retningen til denne rotasjonsaksen endres på grunn av gyro-effekten. Hvis du setter et sykkelhjul i rask rotasjon om en horisontal akse, og deretter prøver å dreie aksen i horisontalplanet, vil du oppleve at aksen i stedet dreies i *vertikalplanet*. Slike effekter kan få dramatiske følger.

6.9. Sammendrag.

Symbol:	***Norsk betegnelse:***	***Engelsk betegnelse:***
θ, $\boldsymbol{\theta}$	Vinkel	Angle
ω, $\boldsymbol{\omega}$	Vinkelfart, vinkelhastighet	Angular speed, angular velocity
α, $\boldsymbol{\alpha}$	Vinkelakselerasjon	Angular acceleration
I	Treghetsmoment	Moment of Inertia
τ, $\boldsymbol{\tau}$	Kraftmoment	Torque
L, $\mathbf{L}$	Spinn	Angular Momentum

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}, \quad \omega = \frac{d\theta}{dt}.$$

Når α er konstant, blir

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \text{ og } \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2.$$

Ved rulling uten glidning er massesenterets fart

$v_\mathrm{C} = \omega \cdot R$ der R er radien.

Treghetsmomentet om en fast akse A er

$$I_\mathrm{A} = \sum m_i r_i^2.$$

Rotasjonsenergien ved rotasjon om en fast akse er

$$W_\mathrm{rot} = \tfrac{1}{2} I_\mathrm{A} \cdot \omega^2.$$

Når aksen går gjennom massesenteret, og parallellforskyves med fart v_CM, er den kinetiske energien

$W_\mathrm{kin} = \tfrac{1}{2} M v_\mathrm{CM}{}^2 + \tfrac{1}{2} I_\mathrm{CM} \omega^2$ der M er legemets masse.

Når kraften F danner en vinkel θ med en vektor med størrelse r fra momentpunktet O til kraftens angrepspunkt, er kraftmomentet om dette momentpunktet

$$\tau_\mathrm{O} = F \cdot r \cdot \sin\theta.$$

På vektorform:

$$\boldsymbol{\tau}_\mathrm{O} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Effekten er

$$P = \tau \cdot \omega$$

mens kraftmomentet utfører et arbeid

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau \cdot d\theta.$$

Når en partikkel med masse m og fart v er i posisjon **r** fra et momentpunkt O, er partikkelens spinn

$L_\mathrm{O} = r \cdot (mv) \cdot \sin\theta$ der θ er vinkelen mellom **r** og **v**.

På vektorform:

$$\mathbf{L}_\mathrm{O} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times (m\mathbf{v}).$$

For et symmetrisk legeme som roterer om symmetriaksen er

$$L_\mathrm{A} = I_\mathrm{A} \omega.$$

Spinnsetningen:

$$\frac{d\mathbf{L}_\mathrm{O}}{dt} = \boldsymbol{\tau}_\mathrm{O}.$$

Dersom $\boldsymbol{\tau}_\mathrm{O} = \mathbf{0}$, er spinnet bevart.

Kraftmomentsetningen (skalar form): $\tau_\mathrm{A} = I_\mathrm{A} \alpha$.

6.10. Oppgaver.

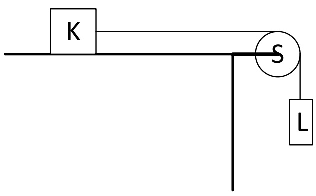
6.10.1. Småoppgaver i teksten.

Oppgave 6.1.1:
Vis at en partikkel som roterer med vinkelfart ω i avstand R fra rotasjonsaksen, har en sentripetalakselerasjon gitt ved $a_N = \omega^2 R$.

Oppgave 6.1.2:
En tørketrommel med diameter 30 cm roterer med 900 omdreininger pr minutt.
a) Finn trommelens vinkelfart.
b) En knapp med masse 0.1 gram ligger helt inntil veggen i trommelen, lengst fra rotasjonsaksen. Hvor stor sentripetalkraft utsettes knappen for? Sammenlikn med knappens tyngde.

Oppgave 6.1.3:
Ei stor, tung dreieskive kan rotere om en horisontal aksling. Den starter i ro, og settes i rotasjon med konstant vinkelakselerasjon. Da trengs det 3.0 sekunder å dreie skiva de første 90 gradene.
a) Hvor stor er denne konstante vinkelakselerasjonen?
b) Hvor lang tid går det fra skiva settes i bevegelse til den har dreid en hel omdreining, og hvor stor er vinkelfarten da?

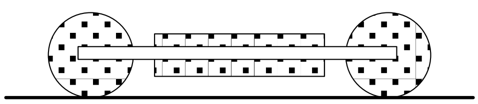
Oppgave 6.2.1:



En kloss K med masse $m_K = m$ ligger på et horisontalt, friksjonsfritt bord. Ei masseløs snor går horisontalt fra klossen over ei trinse S som er formet som en massiv, homogen sylinder med masse $m_S = m$ og radius R, og til et lodd L med masse $m_L = \frac{1}{2}m$. Snora glir *ikke* på trinsa, slik at trinsa settes i rotasjon når loddet slippes. Finn klossens og loddets fart når loddet har falt en høyde h uttrykt ved g og h. Se bort fra friksjon i trinsas aksling.

Oppgave 6.2.2:
En massiv, homogen sylinder ligger i ro på toppen av et skråplan i en høyde h over skråplanets fot. Sylinderen begynner å rulle ned skråplanet med neglisjerbar startfart og uten å gli. Finn farten til sylinderen ved foten av skråplanet uttrykt ved g og h.

Oppgave 6.2.3:

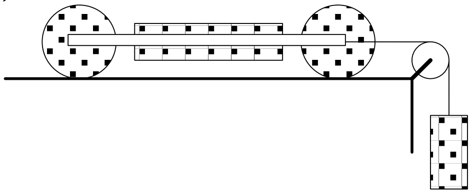


Ei vogn består av to massive sylindere som hver har radius R og masse m, og ei plate som har masse $2m$. Sylindrene og plata er festet sammen med lette bjelker som figuren til venstre viser.

a) Vis at når vogna har fart v, og sylindrene ruller uten å gli, er vognas kinetiske energi

$$W_{\text{kin}} = \tfrac{5}{2} m v^2 .$$

b)

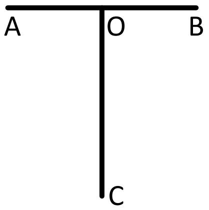


Vi fester et lodd som har masse $\frac{1}{2}m$ til vogna med ei lett snor, og lar snora gli uten friksjon over ei lett trinse slik figuren viser. Vogna starter i ro. Hvor stor fart har vogna når loddet har falt en høyde h?

Oppgave 6.3.1:

Til venstre ser du et L-formet legeme der armen OA har massen $\frac{1}{3}m$ og lengden $\frac{1}{2}L$, mens armen OB har massen $\frac{2}{3}m$ og lengden L. Begge armene er homogene. Finn legemets treghetsmoment om en akse gjennom O vinkelrett på planet AOB.

Oppgave 6.3.2:

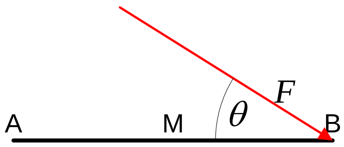


Til venstre ser du et T-formet legeme der både armen AB og armen OC har massen $\frac{1}{2}m$ og lengden L. Punktet O ligger midt på armen AB. Begge armene er homogene.

a) Finn legemets treghetsmoment om O.
b) Finn legemets treghetsmoment om C.

I begge tilfellene står aksen vinkelrett på planet ABC.

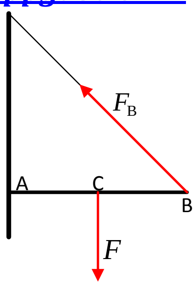
Oppgave 6.4.1:



Til venstre ser du en masseløs stang AB som angripes i endepunktet B av en kraft med størrelse F under en vinkel θ. Finn uttrykk for kraftens kraftmoment om

a) Punktet A.
b) Punktet B.
c) Midtpunktet M.

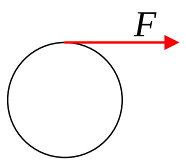
Oppgave 6.4.2:



En bom AB med lengde L kan dreies om endepunktet A. Et tau i endepunktet B danner en vinkel på 45° med bommen, og holder bommen horisontal. En kraft F virker rett nedover i bommens midtpunkt C.

a) Finn størrelsen til en kraft F_B i B slik at F og F_B får motsatt like store kraftmoment om A.
b) Hvor stor kraft virker da mot bommen i A?

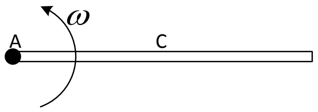
Oppgave 6.4.3:



Et svinghjul med treghetsmoment $I_C = 2000\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$ om massesenteret (som også er svinghjulets sentrum) og radius $R = 0.40\,\mathrm{m}$ påvirkes av en konstant tangentiell kraft $F = 80\,\mathrm{N}$. Svinghjulet starter i ro.

a) Hvor stort arbeid har kraften utført når svinghjulet har rotert en omdreining?
b) Beregn slutt-vinkelfarten.

Oppgave 6.5.1:



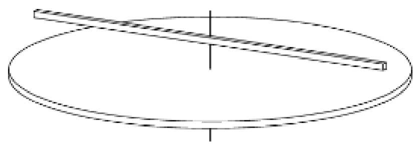
En tynn, homogen stav med masse *m* og lengde *L* roterer om endepunktet A med vinkelfart ω. Finn stavens spinn om A på to måter:

a) Ved å betrakte det som en ren rotasjon om et punkt A i ro.
b) Ved å betrakte det som en rotasjon om massesenteret C samtidig som C har fart i forhold til A.

Oppgave 6.5.2:

Gå tilbake til eksempel 6.5.4, og beregn hvor stor del av kulas opprinnelige kinetiske energi som er igjen etter at kula traff staven og ble sittende fast i den.

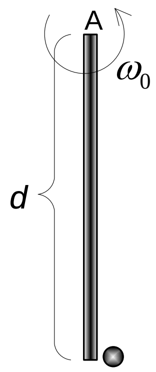
Oppgave 6.5.3:



Ei tynn, sirkulær skive har masse *m* og radius *R*. En tynn stav har også masse *m*, og har lengde $2R$. Skiva holdes hele tiden horisontalt, og roterer om sin symmetriakse med vinkelfart ω_0. Staven holdes i ro et lite stykke over skiva, parallelt med skiva, og slippes ned på skiva slik at stavens midtpunkt faller sammen med skivas sentrum. På grunn av friksjon mellom skiva og staven vil de to legemene etter en tid få samme vinkelfart ω_1. Vi forutsetter at staven hele tiden har sitt midtpunkt over skivas sentrum.

a) Finn treghetsmomentet om skivas symmetriakse til dette sammensatte legemet bestående av skive og stav.
b) Vis at vinkelfarten til dette sammensatte legemet blir $\omega_1 = \frac{3}{5}\omega_0$.
c) Hvor stor del av skivas opprinnelige kinetiske energi går over til andre energiformer under denne prosessen?

Oppgave 6.5.4:



En tynn, homogen stav med lengde d og masse m roterer med vinkelfart ω_0 uten friksjon om endepunktet A. Staven treffer en partikkel som også har masse m, og som ligger i ro. Partikkelen blir sittende fast i stavens andre endepunkt.

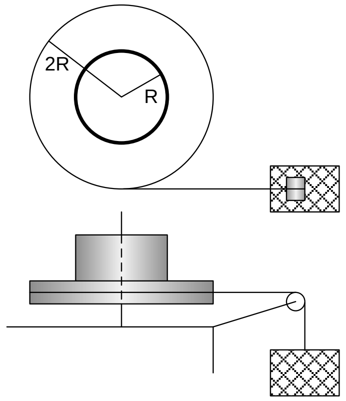
a) Vis at etter støtet blir vinkelfarten en fjerdedel av den opprinnelige vinkelfarten.

b) Hvor stor del av den opprinnelige kinetiske energien er blitt bevart som kinetisk energi?

Oppgave 6.5.5:
En tynn stav AB med lengde L og masse m kan rotere i horisontalplanet om endepunktet A. Midt på staven er det en partikkel med masse $\frac{1}{3}m$. Staven (med partikkel) roterer uten friksjon med vinkelfart ω_0. Plutselig løsner partikkelen og flytter seg til endepunktet B.
a) Vis at vinkelfarten til stav og partikkel nå blir
$$\omega_1 = \tfrac{5}{8}\omega_0 .$$
b) Undersøk om den kinetiske energien er bevart under denne prosessen.

Oppgave 6.6.1:
En jamntykk, homogen stav med lengde L og masse m kan rotere uten friksjon om en horisontal akse gjennom et punkt O som ligger $\frac{1}{3}L$ fra stavens ene endepunkt. Staven holdes horisontalt, og slippes. Hvor stor blir stavens vinkelakselerasjon idet den slippes?

Oppgave 6.6.2:



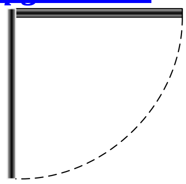
Et legeme består av et tynnvegget rør med masse m og radius R som er festet til en massiv, homogen sylinderformet skive som også har masse m, men som har radius $2R$. Røret og sylinderskiva har felles symmetriakse. Se figuren til venstre, der legemet er vist ovenfra og fra siden.

a) Vis at legemets treghetsmoment om aksen er
$$I_C = 3mR^2 .$$

Ei tynn, lett, ustrekkelig snor vikles opp om sylinderskiva og føres over en lett trinse. I den andre enden av snora festes en kloss som også har massen m. Se figuren. Når systemet slippes, vil klossen falle mens den setter legemet i rotasjon om symmetriaksen. Snora glir ikke på sylinderskiva. Se bort fra alle former for friksjon.
b) Finn klossens akselerasjon og legemets vinkelakselerasjon.
c) Bruk et energiresonnement til å finne klossens fart når den har falt en høyde h.
d) Bruk akselerasjonen fra b) til å kontrollere svaret i c).

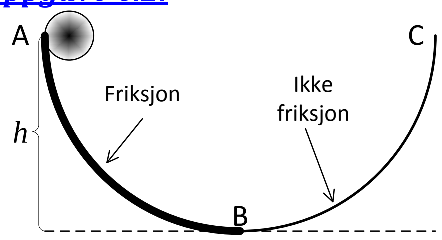
6.10.2. Blandede oppgaver.

Oppgave 6.1:



En tynn stav med massen m og lengden $L = 1.35\,\text{m}$ kan rotere fritt om den ene enden. Vi løfter den frie enden av staven til staven er horisontal og så slipper vi. Hvor stor fart har den frie enden av staven når staven er vertikal?

Oppgave 6.2:

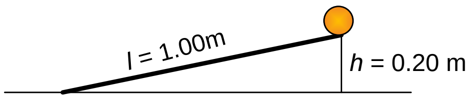


Ei massiv kule med radius R og masse m slippes fra kanten på ei renne som ser ut som et halvt sylinderskall med radius h. Strekningen fra B til C er friksjonsfri, mens strekningen fra A til B har et stort friksjonstall. Vi antar derfor at kula ruller uten å gli fra A til B.

a) Vis at kula har farten $v = \sqrt{\frac{10}{7} g\left(h - R\right)}$ på bunnen av renna når vi slipper den fra A?

b) Hvor høyt opp på den friksjonsfrie siden av renna kommer da kula?

Oppgave 6.3:



Vi har en sylinder som er rotasjonssymmetrisk, men ikke homogen. Vi antar derfor at sylinderens treghetsmoment om symmetriaksen er gitt ved formelen

$$I = k \cdot mR^2$$

der m er sylinderens masse og R er sylinderens radius, mens k er et ukjent tall mellom 0 og 1.

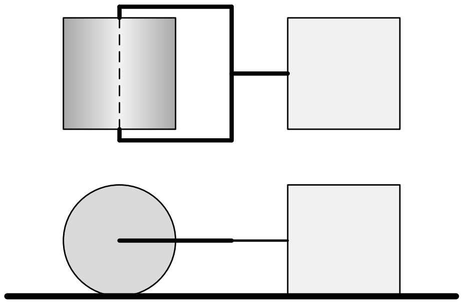
Du vil nå utføre et eksperiment for å finne k. Du lager et skråplan der den skrå siden har lengden $l = 1.00\,\text{m}$, og gir skråplanet en helning slik at øvre kant kommer en høyde $h = 0.20\,\text{m}$ over nedre kant. Så slipper du sylinderen uten startfart fra øvre kant, og lar den rulle rett ned skråplanet. Den ruller uten å gli, og trenger da en tid $t = 1.20\,\text{s}$ på å rulle fra øvre til nedre kant.

a) Bruk et energiresonnement til å vise at dersom sylinderen ruller uten å gli, og vi ser bort fra friksjonsarbeid, er farten v ved nedre kant gitt ved

$$v^2\left(1 + k\right) = 2gh\,.$$

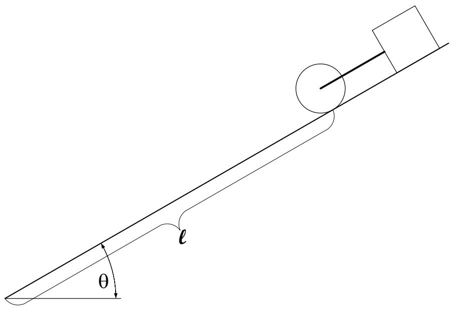
b) Bruk de oppgitte dataene samt formelen ovenfor til å finne tallet k.

Oppgave 6.4:



Et legeme består av en massiv, homogen sylinder med radius R og masse m, og en kloss som også har masse m. Sylinderen og klossen er forbundet med en lett bøyle gjennom sylinderens symmetriakse. Sylinderen kan rotere uten friksjon om bøylen. Figuren til venstre øverst viser legemet sett ovenfra. Til venstre nederst ser du legemet sett fra siden.

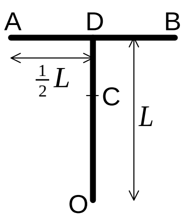
a) Vis at når legemet har fart v mens sylinderen ruller uten å gli, har legemet en kinetisk energi $W_{\text{kin}} = \frac{5}{4}mv^2$.



b) Vi plasserer legemet på toppen av et skråplan som har lengde l og helningsvinkel θ slik figuren til venstre viser, og slipper legemet. Sylinderen ruller da uten å gli. Finn legemets fart ved foten av skråplanet i disse situasjonene:
1) Det ikke er friksjon mellom kloss og skråplan.
2) Friksjonstallet mellom kloss og skråplan er μ. Se bort fra forskjellen mellom statisk og kinetisk friksjon, og gå ut fra at helningsvinkelen er stor nok til at legemet setter seg i bevegelse.

c) Finn sammenhengen mellom μ og θ når legemet beveger seg *med konstant fart* ned skråplanet mens sylinderen ruller uten å gli. Se fremdeles bort fra forskjellen mellom statisk og kinetisk friksjon.

Oppgave 6.5:



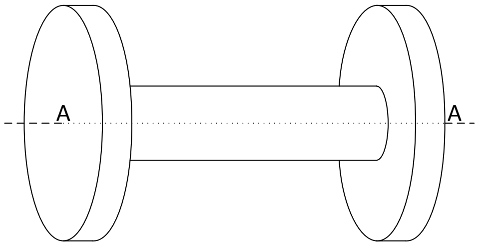
Figuren til venstre viser et T-formet legeme som består av to tynne, homogene staver som begge har lengde L. Staven OD har masse $m_{\text{OD}} = m$, mens staven AB har masse $m_{\text{AB}} = 2m$. Staven OD står vinkelrett på AB i punktet D som ligger midt på AB.

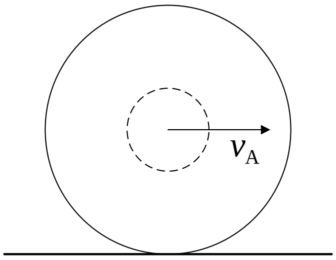
a) Hvor langt fra O ligger legemets massesenter C?

b) Vis at legemets treghetsmoment om O er
$$I_{\text{O}} = \frac{5}{2}mL^2.$$

c) Legemet kan rotere uten friksjon om en horisontal akse gjennom O. Det holdes i en start-posisjon der punktet D er loddrett over O, slik som på figuren. Så gis det en *liten* dytt slik at det roterer om O. Finn vinkelfarten til legemet og kraften på legemet fra aksen i det øyeblikket da D passerer sitt laveste punkt.

Oppgave 6.6:



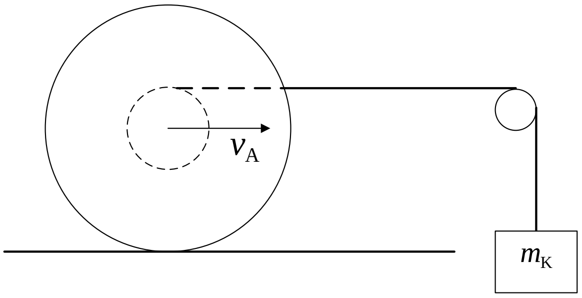


En kabeltrommel er bygd opp av en massiv, jamntykk sylinder med en sirkulær, massiv skive i hver ende slik figuren ovenfor til venstre viser. Hele trommelen har masse *m*, der massen er fordelt slik at sylinderen har masse $\frac{3}{4}m$ mens hver skive har masse $\frac{1}{8}m$. Sylinderen har radius *R* mens hver skive har radius $3R$.

a) Vis at trommelens treghetsmoment om symmetriaksen A—A er $I_A = \frac{3}{2}mR^2$.

b) Vis at når kabeltrommelen ruller uten å gli slik at symmetriaksen (og dermed massesenteret) har fart v_A, har den en kinetisk energi
$$W_{kin} = \tfrac{7}{12}m{v_A}^2.$$

c)

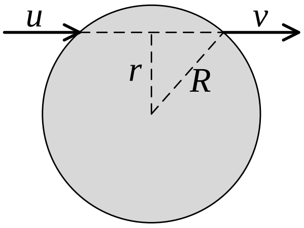


Vi vikler opp ei lett snor på kabeltrommelen, og fester en kloss med masse $m_K = \frac{3}{4}m$ til den andre enden av snora. Så lar vi snora gå over ei lett, friksjonsløs trinse slik figuren til venstre viser.

Klossen trekker trommelen som ruller uten å gli, og snora glir heller ikke på trommelen. Forklar at når symmetriaksen har fart v_A, har klossen fart $\frac{4}{3}v_A$.

Bruk dette til å finne v_A når klossen har falt en høyde *h* etter å ha startet i ro. Gå ut fra at trommelen ruller på et horisontalt underlag, og at snora er horisontal mellom trommel og trinse. Svaret skal uttrykkes ved tyngdeakselerasjonen *g* og høyden *h*.

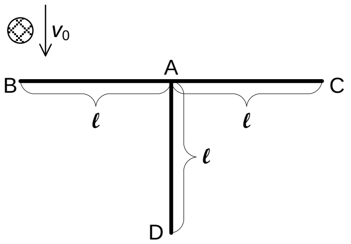
Oppgave 6.7:



Ei kule med massen $m_K = 15.0\,\text{g}$ og farta $u = 350\,\text{m/s}$ treffer en stillestående, massiv sylinder med massen $m_S = 3.00\,\text{kg}$ og radius $R = 20.0\,\text{cm}$. Sylinderen kan rotere fritt om symmetriaksen uten at aksen flytter seg. Kula går gjennom sylinderen og passerer $r = 15.0\,\text{cm}$ over dens symmetriakse. Etter kollisjonen har kula farta $v = 270\,\text{m/s}$. Gå ut fra at hastigheten ikke endrer retning under kollisjonen.

a) Finn vinkelfarten til sylinderen like etter kollisjonen.
b) Er den kinetiske energien bevart?

Oppgave 6.8:



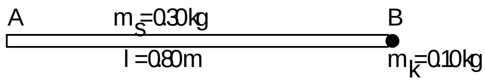
Et legeme er satt sammen av to tynne, homogene staver slik at det danner en stor **T** slik figuren viser. De tre "armene" i **T**-en har alle lengde *l* og masse $\frac{1}{3}m$ slik at hele legemet har masse *m*. Legemet kan rotere uten friksjon om A.

a) Vis at legemets treghetsmoment om en akse gjennom A vinkelrett på legemets plan er $I_A = \frac{1}{3}ml^2$.

b) **T**-en står i ro når en liten partikkel med masse $\frac{1}{3}m$ og fart v_0 treffer den i ytterpunktet B slik figuren viser, og blir sittende fast. Partikkelens hastighetsvektor før støtet står vinkelrett på "armen" BAC. Finn vinkelfarten til det sammensatte legemet like etter at partikkelen traff **T**-en.

Oppgave 6.9:

a)



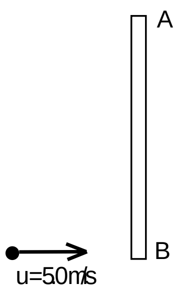
Et legeme består av en tynn, homogen stav A-B med ei kule i den ene enden (B). Staven har lengde $l = 0.80\,\text{m}$ og masse $m_s = 0.30\,\text{kg}$.

Kula har masse $m_k = 0.10\,\text{kg}$, og betraktes som et massepunkt.

1) Hvor langt fra A ligger legemets massesenter?

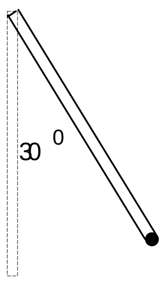
2) Bestem legemets treghetsmoment om A.

b)



Kula fjernes fra staven. Staven henges opp i A, slik at den kan svinge fritt uten friksjon. Staven henger vertikalt. Kula skytes horisontalt inn i punktet B på staven, og blir sittende fast. Kulas fart var $u = 5.0\,\text{m/s}$ like før den traff staven i B. Finn legemets vinkelfart *like etter* at kula traff staven.

c)



Vi gjentar forsøket fra b), men nå kjenner vi ikke kulas fart før den traff staven. Derimot merker vi oss at legemets største utsving er 30° med vertikal-linja. Finn kulas fart like før den traff staven.

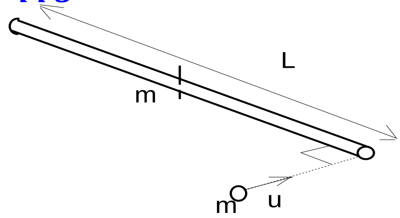
d) På ny gjentar vi forsøket fra b), men nå har vi et fullstendig elastisk støt (d.v.s. at all kinetisk energi er bevart). Kulas fart før støtet var $u = 5.0\,\text{m/s}$.

Vi ønsker å finne kulas fart *v* og stavens vinkelfart ω like etter støtet.

1) Sett opp de likningene som må til for å finne *v* og ω.

2) Løs disse likningene.

Oppgave 6.10:

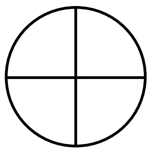


En tynn, homogen stav med lengde L og masse m ligger på et horisontalt bord. Staven kan rotere uten friksjon om en loddrett akse gjennom stavens massesenter.

a) Staven er i ro idet den treffes i sin ene ende av en partikkel som også har masse m, og som har fart u langs bordet vinkelrett på staven. Støtet er fullstendig elastisk, d.v.s. at all kinetisk energi (translasjon pluss rotasjon) er bevart. Finn (uttrykt ved u og / eller L) stavens vinkelfart ω og partikkelens fart v like etter støtet. Du kan gå ut fra at partikkelen etter støtet beveger seg langs samme rette linje som før støtet.

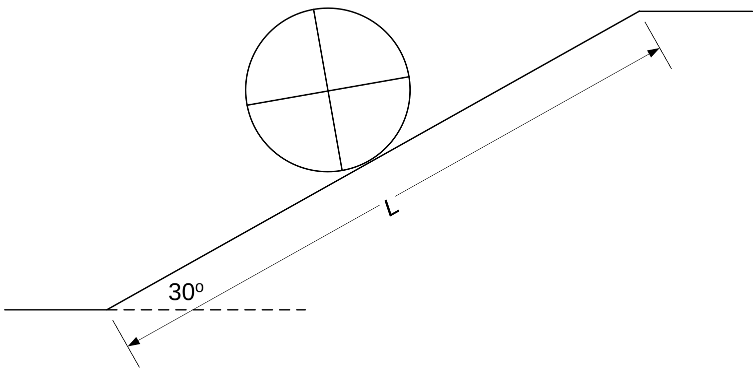
b) På ny er staven i ro idet den treffes av en partikkel med masse m og fart u langs bordet vinkelrett på staven. Støtet er fremdeles fullstendig elastisk. Men nå treffes staven i en avstand x fra omdreiningsaksen. Finn x uttrykt ved L når partikkelen blir liggende i ro etter støtet.

Oppgave 6.11:



Et legeme med masse m er bygd opp av to rette, tynne staver som hver har masse $\frac{3}{7}m$ og lengde $2R$, og en tynn ring med masse $\frac{1}{7}m$ og radius R slik figuren til venstre viser. Stavene krysser hverandre midt på, og krysningspunktet er også sentrum i ringen.

a) Vis at legemets treghetsmoment om en akse gjennom legemets midtpunkt vinkelrett på legemets plan er $I = \frac{3}{7}mR^2$.



b) Legemet plasseres øverst på et skråplan som har lengde L og helningsvinkel $\theta = 30^\circ$. Det slippes uten startfart slik at det kan rulle uten å gli ned skråplanet.
Bruk et energiresonnement til å vise at legemets fart ved foten av skråplanet er

$$v = \sqrt{\tfrac{7}{10}gL}$$

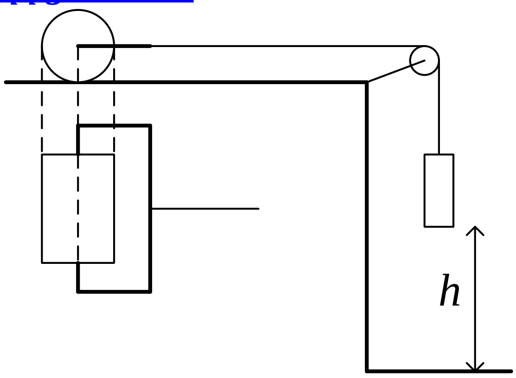
når du ser bort fra friksjonsarbeid.

c) Bruk bevegelseslikninger til å finne legemets akselerasjon mens det ruller ned skråplanet.

d) Hvor stor var friksjonskraften mellom legemet og skråplanet mens det rullet ned? Hvor stor må den statiske friksjonskoeffisienten μ minst være for at legemet skal rulle uten å gli?

e) Bruk bl.a. kraftmomentsetningen til å beregne akselerasjon og friksjonskraft mens legemet ruller ned skråplanet (kontroll av beregninger i c og d).

Oppgave 6.12:



En homogen sylinder med masse 2*m* kan rotere friksjonsløst om sin symmetriakse. Ved hjelp av en svært lett bøyle kan sylinderen trekkes langs et horisontalt bord av ei horisontal snor i høyde med symmetriaksen (se figuren, der sylinderen også er vist ovenfra). Sylinderen ruller da uten å gli. I den andre enden av snora er det festet en kloss med masse *m*. Snora glir uten friksjon over en svært lett trinse.

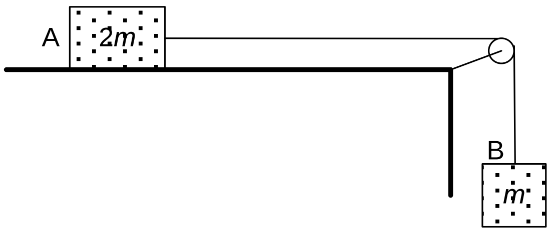
a) Sett opp Newtons 2. lov for klossen, og kraftmomentsetningen for sylinderen. Vis ved å løse likningene at klossens akselerasjon er $a = \frac{1}{4}g$.

Systemet holdes i ro slik at klossen er en høyde *h* over gulvet, og slippes. Finn farten *v* (uttrykt ved *m*, *g* og *h*) idet klossen treffer gulvet ved hjelp av

b) bevegelseslikningene.

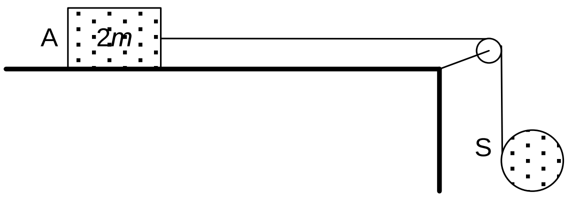
c) energibevaring.

Oppgave 6.13:



En kloss A med masse $m_A = 2m$ kan gli uten friksjon på en horisontalt underlag. Klossen er festet med ei masseløs, ustrekkelig snor til en annen kloss B som har masse $m_B = m$. Snora kan gli uten friksjon over ei lett trinse, slik at snora er horisontal mellom kloss A og trinsa, og kloss B henger fritt slik figuren til venstre viser.

a) Bestem akselerasjonen til klossene når de slippes.



b) Vi bytter ut kloss B med en sylinder S som har radius *R* og masse $m_S = m$. Snora vikles opp på sylinderen. Når sylinderen slippes, vikles snora av sylinderen uten å gli. Sylinderaksens retning endres ikke.

La a_A være klossens akselerasjon, mens a_C, α og R er henholdsvis akselerasjonen til sylinderens massesenter, sylinderens vinkelakselerasjon og sylinderens radius.

1) Forklar at $a_C = a_A + \alpha R$.
2) Finn klossens akselerasjon a_A og akselerasjonen a_C til sylinderens massesenter.

Oppgave 6.14:

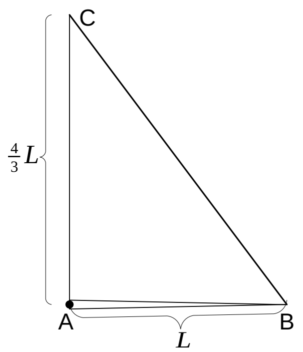
a) Et rotasjonssymmetrisk legeme med masse *m* ruller uten å gli ned et skråplan som har helningsvinkel θ. Vis at når vi ser bort fra friksjonsarbeid, er legemets akselerasjon *a* ned langs skråplanet gitt ved

$$a = \frac{g\sin\theta}{1 + \dfrac{I_C}{mR^2}}$$

der I_C er legemets treghetsmoment om rotasjonsaksen og *R* er avstanden fra rotasjonsaksen til skråplanet.

b) Et sylinderskall med treghetsmoment $I_S = mR^2$ og ei massiv kule med treghetsmoment $I_K = \frac{2}{5}mR^2$ slippes samtidig uten startfart fra toppen av et slikt skråplan. Hvor langt har sylinderskallet rullet når kula har rullet en strekning *L* fra toppen?

Oppgave 6.15:



En bom AB har masse *m* og lengde *L*. Bommen er tykkest ved enden A og smalner av mot enden B, slik at massesenteret ligger en avstand $\frac{1}{3}L$ fra A. Bommens treghetsmoment om A er $I_A = \frac{1}{6}mL^2$. Bommen kan rotere uten friksjon om enden A. Fra enden B går det et masseløst tau til et punkt C som ligger vertikalt over A i en avstand $\frac{4}{3}L$ fra A.

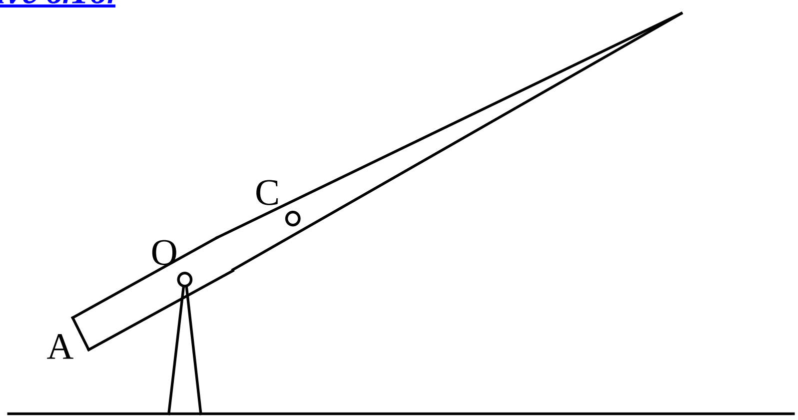
a) Finn kraften fra tauet mot bommen i punktet B, og finn horisontal- og vertikal-komponentene av kraften mot enden A av bommen.

b) Plutselig ryker tauet. Finn bommens vinkelakselerasjon like etter at tauet røk, mens bommen ennå er tilnærmet horisontal.

c) Finn vinkelhastigheten til bommen idet den passerer vertikal posisjon.

d) Idet bommen passerer vertikal posisjon, treffer enden B en partikkel som opprinnelig lå i ro, men som blir sittende fast på bommen og følger med i den videre bevegelsen. Da halveres vinkelfarten. Finn massen til denne partikkelen.

Oppgave 6.16:



En flaggstang har lengde *l* og masse *m*. Dessuten får du oppgitt at:

- Massesenteret C ligger i avstand $x_C = \frac{2}{5}l$ fra den tykke enden A av flaggstanga.
- Treghetsmomentet om den tykke enden er $I_A = \frac{1}{5}ml^2$.

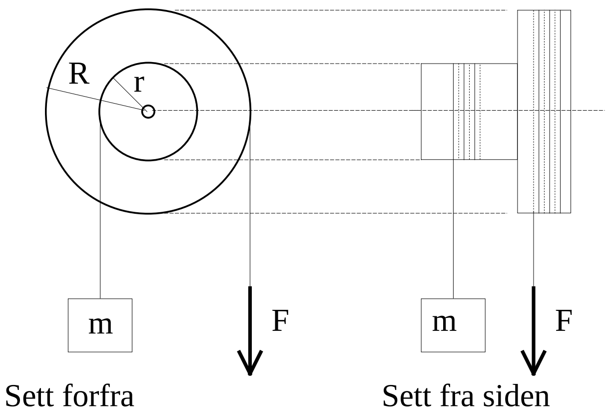
a) 1) Finn treghetsmomentet om flaggstangas massesenter.
2) Vis at treghetsmomentet om et punkt O som ligger midt mellom massesenteret og den tykke enden av flaggstanga er $I_O = \frac{2}{25}ml^2$.

b) Flaggstanga kan dreies uten friksjon om en horisontal akse gjennom O. Stanga reises inntil den står loddrett. Da slippes den, og den begynner å dreie seg om aksen uten startfart. Når stanga har dreid seg 90° (slik at den er vannrett) skal du finne (uttrykt ved *m*, *l* og / eller tyngdeakselerasjonen *g*):
1) Stangas kinetiske energi.
2) Stangas vinkelfart.
3) Massesenterets fart.

c) Bestem den horisontale kraftkomponenten som virker på aksen når stanga passerer horisontal-stillingen.

d) Idet stanga passerer horisontal-stillingen, blir en måse spiddet av flaggstangtoppen og blir hengende fast. Måsen har en masse som er en åttendedel av stangas masse, og vi skal anta at måsen var i ro før den ble truffet. Bestem stangas vinkelfart like etter at måsen ble truffet.

Oppgave 6.17:



Figuren viser en prinsipp-skisse av en heiseanordning som var vanlig på lagerbrygger før motorenes tid. To homogene sylindre settes sammen til en "to-trinns trinse" med samme symmetriakse. Sylindrene er festet til hverandre, og utgjør et stivt, sammensatt legeme. Et tau er viklet opp på hver sylinder. Tauene er viklet hver sin vei slik figuren viser. Vi ser bort fra friksjon i trinsa.

Den innerste (minste) sylinderen er homogen, har masse på 50 kg og radius $r = 0.20\,\mathrm{m}$. Den ytterste sylinderen er et sylinderskall med masse på 10 kg og radius $R = 1.00\,\mathrm{m}$.

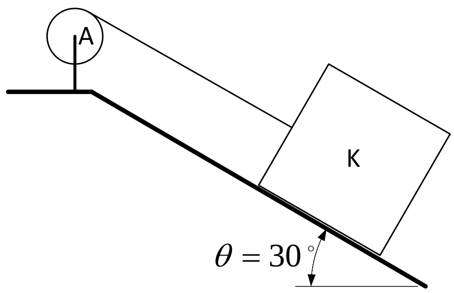
a) Finn treghetsmomentet til den sammensatte trinsa om aksen.

b) En kasse med masse $m = 80\,\mathrm{kg}$ festes til tauet som går over den minste trinsa. En lagearbeider trekker i det andre tauet, slik at kassen går oppover <u>med konstant fart</u> på $0.20\,\mathrm{m/s}$.
1) Hvor stor kraft *F* trekker lagerarbeideren med?
2) Hvor mange meter tau har han halt inn når kassen er hevet $5.0\,\mathrm{m}$?
3) Hvor stort arbeid har han utført når kassen er hevet $5.0\,\mathrm{m}$?
4) Hvor stor effekt yter lagerarbeideren?

c) Vi lar kassen på 80 kg henge, og henger en annen kasse med masse $m_2 = 20\,\mathrm{kg}$ i det tauet som lagerarbeideren holdt i. Systemet holdes i ro og slippes.
1) Hvorfor vil trinsa begynne å rotere? Hvilken vei vil den rotere?
2) Finn snordragskraften i hvert av tauene etter at systemet er sluppet.

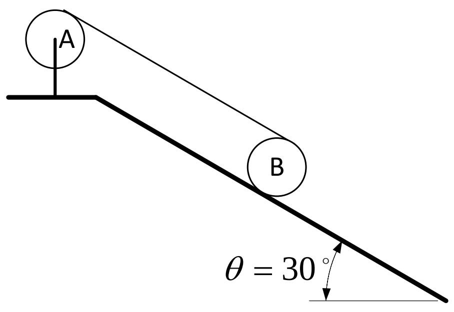
Oppgave 6.18:

a)



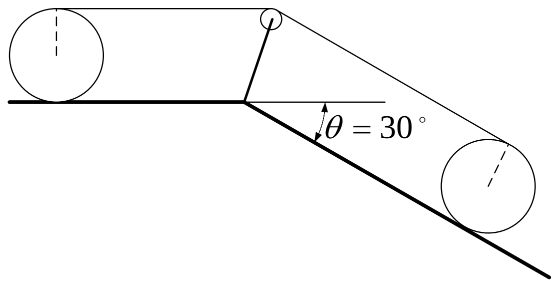
En homogen, massiv sylinder A med masse *m* og radius *R* kan rotere uten friksjon om sin symmetriakse, som er horisontal. Ei snor er rullet opp på sylinderen. Enden av snora trekkes parallelt med et skråplan med helningsvinkel $\theta = 30^\circ$, og festes til en kloss K som også har masse *m*. Klossen kan gli uten friksjon på skråplanet. Snora glir ikke på sylinderen.
Finn klossens akselerasjon og sylinderens vinkelakselerasjon.

b)



Vi erstatter klossen med en annen sylinder B som er helt lik A. Enden av snora rulles opp på B. Snora er parallell med skråplanet. Når systemet slippes, vil B rulle uten å gli på skråplanet. Viser bort fra all annen friksjon.
Vinkelakselerasjonene til klossene kalles henholdsvis α_A og α_B.
I) Vis at $\alpha_A = 2\alpha_B$.
II) Finn α_A og α_B.

Oppgave 6.19:



To like, homogene, massive sylindre har begge masse *m* og radius *R*. Ei lett snor er viklet opp på begge sylinderne slik figuren viser. Snora går over ei lett trinse (virkningen av denne trinsa kan du se bort fra). Sylinderne holdes i ro med stram snor, og slippes. Da begynner de å rulle uten å gli, slik at snora vikles av den øverste sylinderen og vikles opp på den nederste. For øvrig kan du se bort fra friksjon.

a) Tegn inn de kreftene som virker på hver av sylinderne.

b) Forklar at begge sylinderne får samme vinkelakselerasjon.

c) Finn denne vinkelakselerasjonen.

6.10.3. Løsning på småoppgaver.

Oppgave 6.1.1:

Vi vet at sentripetalakselerasjonen er gitt ved

$$a_{\mathrm{N}} = \frac{v^2}{R}.$$

Videre er $v = \omega R$. Setter dette inn, og får

$$a_{\mathrm{N}} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R$$

Oppgave 6.1.2:

a) $$\omega = \frac{900 \cdot 2\pi}{60\,\mathrm{s}} = \underline{\underline{30\pi\,\mathrm{s}^{-1}}} \approx \underline{\underline{94\,\mathrm{s}^{-1}}}$$ (eller 94 rad/s).

b) Benytter enklest resultatet fra oppgave 6.1.1 ovenfor, og får:

$$F_{\mathrm{N}} = m \cdot a_{\mathrm{N}} = m \cdot \omega^2 R = \left(1.0 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg}\right) \cdot \left(30\pi\,\mathrm{s}^{-1}\right)^2 \cdot \left(\tfrac{0.30}{2}\,\mathrm{m}\right) = \underline{\underline{0.13\,\mathrm{N}}}.$$

Til sammenlikning er tyngden

$$G = mg = \left(1.0 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg}\right) \cdot \left(9.81\,\mathrm{m/s}^2\right) = \underline{0.00098\,\mathrm{N}}.$$

Sentripetalkraften er altså mer enn 130 ganger større enn tyngden. Dette kan vi se enklere ved å benytte formlene:

$$\frac{F_{\mathrm{N}}}{G} = \frac{\cancel{m}\omega^2 R}{\cancel{m}g} = \frac{(30\pi)^2 \cdot 0.15}{9.81} = \underline{136}.$$

Oppgave 6.1.3:

I denne oppgaven benytter jeg at start-vinkelen $\theta_0 = 0$, og at start-vinkelfarten $\omega_0 = 0\,\mathrm{s}^{-1}$. Videre benytter jeg at

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2$$

a) Når skiva har dreid en 90 graders vinkel på 3.0 sekunder, er

$$\tfrac{1}{2}\pi = 0 + 0 + \tfrac{1}{2}\alpha(3.0\,\text{s})^2 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{9.0\,\text{s}^2} = \underline{\underline{0.35\,\text{s}^{-2}}}$$

b) Når skiva har dreid en hel omdreining, er

$$2\pi = 0 + 0 + \tfrac{1}{2}\alpha t_1^2 \quad \Leftrightarrow \quad t_1^2 = \frac{4\pi}{\alpha} = \frac{4\pi}{0.35\,\text{s}^{-2}} = 35.9\,\text{s}^{-2} \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = \underline{\underline{6.0\,\text{s}}}\,.$$

Da er vinkelfarten

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0\,\text{s}^{-1} + (0.35\,\text{s}^{-2})\cdot(6.0\,\text{s}) = \underline{\underline{2.1\,\text{s}^{-1}}}\,.$$

Oppgave 6.2.1:

Legger nullnivå for potensiell energi i det nivået der loddet kommer etter å ha falt en høyde *h*. Før loddet slippes, har derfor loddet en potensiell energi $W_{\text{pot}} = m_{\text{L}} g h$. Verken kloss eller trinse endrer sin potensielle energi. Når loddet har falt høyden *h*, har både lodd og kloss fått en fart *v*, mens trinsa har fått en vinkelfart

$$\omega = \frac{v}{R}.$$

Siden trinsa er formet som en homogen, massiv sylinder, er trinsas treghetsmoment

$$I = \tfrac{1}{2} m_{\text{S}} R^2.$$

Da kan vi sette opp energilikningen nedenfor:

$$m_{\text{L}} g h = \tfrac{1}{2} m_{\text{K}} v^2 + \tfrac{1}{2} m_{\text{L}} v^2 + \tfrac{1}{2} I \omega^2.$$

Setter inn de oppgitte verdiene for m_{K}, m_{L} og m_{S}, og får

$$\left(\tfrac{1}{2}m\right) g h = \tfrac{1}{2} m v^2 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}m\right) v^2 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2} m R^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2$$

$$\tfrac{1}{2} g h = \tfrac{1}{2} v^2 + \tfrac{1}{4} v^2 + \tfrac{1}{4} v^2 = v^2 \quad \Leftrightarrow \quad v = \underline{\underline{\sqrt{\tfrac{1}{2} g h}}}$$

Oppgave 6.2.2:

Legger nullnivå for potensiell energi gjennom skråplanets fot. Da har sylinderen kun en potensiell energi $W = mgh$ på toppen av skråplanet. Når sylinderen har rullet ned hele skråplanet, har den fått kinetisk energi både fordi massesenteret har en fart v_{C} og fordi sylinderen har en rotasjon med vinkelfart ω rundt massesenteret. Siden sylinderen ruller uten å gli, er

$$v_{\text{C}} = \omega R \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \frac{v_{\text{C}}}{R}$$

der *R* er sylinderens radius. Energilikningen blir da:

$$mgh = \tfrac{1}{2} m v_{\text{C}}^2 + \tfrac{1}{2} I \omega^2 = \tfrac{1}{2} m v_{\text{C}}^2 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2} m R^2\right)\left(\frac{v_{\text{C}}}{R}\right)^2 = \tfrac{1}{2} m v_{\text{C}}^2 + \tfrac{1}{4} m v_{\text{C}}^2 = \tfrac{3}{4} m v_{\text{C}}^2$$

$$gh = \tfrac{3}{4} v_{\text{C}}^2 \quad \Leftrightarrow \quad v_{\text{C}} = \underline{\underline{\sqrt{\tfrac{4}{3} g h}}} = \underline{\underline{2\sqrt{\tfrac{1}{3} g h}}}$$

Oppgave 6.2.3:

a) Når vogna har fart *v*, vil hver sylinder rotere med vinkelfart $\omega = \dfrac{v}{R}$. Hver av de to sylindrene har et treghetsmoment $I = \tfrac{1}{2} m R^2$, slik at vogna har en kinetisk energi

$$W_{\text{kin}} = \tfrac{1}{2}(2m)v^2 + 2\left(\tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2\right) = mv^2 + 2\left(\tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2\right)$$
$$= mv^2 + 2\left(\tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{4}mv^2\right) = mv^2 + 2\left(\tfrac{3}{4}mv^2\right) = \underline{\underline{\tfrac{5}{2}mv^2}}$$

b) Benytter at systemet i starten har potensiell energi $W_{\text{pot}} = \left(\tfrac{1}{2}m\right)gh$ når nullnivået legges i loddets laveste punkt, og vi tar hensyn til at vognas potensielle energi ikke endres. Når loddet har falt en høyde *h*, har vogna fått den kinetiske energien som vi har funnet ovenfor. Dessuten har loddet samme fart som vogna, og derfor også en kinetisk energi. Bevaring av energi gir nå

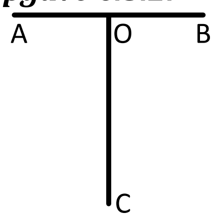
$$\left(\tfrac{1}{2}m\right)gh = \tfrac{5}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}m\right)v^2 = \tfrac{11}{4}mv^2 \quad \Leftrightarrow \quad v = \underline{\underline{\sqrt{\tfrac{2}{11}gh}}}\,.$$

Oppgave 6.3.1:

Finner først hver arms treghetsmoment om O. Bruker da formelen for treghetsmomentet til en rett stav om et ytterpunkt:

$$I_{\text{OB,O}} = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{2}{3}m\right)L^2 = \tfrac{2}{9}mL^2\,.$$
$$I_{\text{OA,O}} = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3}m\right)\left(\tfrac{1}{2}L\right)^2 = \tfrac{1}{36}mL^2\,.$$
$$I_{\text{O}} = I_{\text{OA,O}} + I_{\text{OB,O}} = \tfrac{2}{9}mL^2 + \tfrac{1}{36}mL^2 = \underline{\underline{\tfrac{1}{4}mL^2}}\,.$$

Oppgave 6.3.2:



a) Finner først hver arms treghetsmoment om O:

$$I_{\text{AB,O}} = \tfrac{1}{12}\left(\tfrac{1}{2}m\right)L^2 = \tfrac{1}{24}mL^2\,.$$
$$I_{\text{OC,O}} = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}m\right)L^2 = \tfrac{1}{6}mL^2\,.$$

Da blir legemets treghetsmoment om O:

$$I_{\text{O}} = I_{\text{AB,O}} + I_{\text{OC,O}} = \tfrac{1}{24}mL^2 + \tfrac{1}{6}mL^2 = \underline{\underline{\tfrac{5}{24}mL^2}}\,.$$

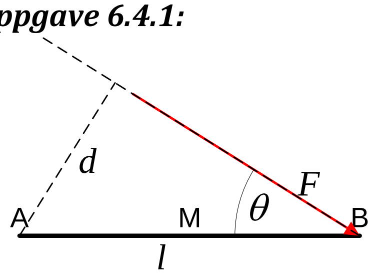
b) Siden både O og C er endepunkter på armen OC, er $I_{\text{OC,C}} = I_{\text{OC,O}} = \tfrac{1}{6}mL^2$.
For å finne ABs treghetsmoment om C, må jeg bruke Steiners setning. Det kan jeg gjøre fordi O er massesenter for armen AB:

$$I_{\text{AB,C}} = I_{\text{AB,O}} + \left(\tfrac{1}{2}m\right)L^2 = \tfrac{1}{24}mL^2 + \tfrac{1}{2}mL^2 = \tfrac{13}{24}mL^2\,.$$

Da er legemets treghetsmoment om C:

$$I_{\text{C}} = I_{\text{AB,C}} + I_{\text{OC,C}} = \tfrac{13}{24}mL^2 + \tfrac{1}{6}mL^2 = \underline{\underline{\tfrac{17}{24}mL^2}}\,.$$

Oppgave 6.4.1:



a) Avstanden fra A til kraftens angrepslinje ("armen") blir

$$d_{\text{A}} = l \cdot \sin\theta\,,$$

slik at kraftmomentet om A blir

$$\tau_{\text{A}} = F \cdot d_{\text{A}} = \underline{\underline{F \cdot l \sin\theta}}\,.$$

b) Siden kraften går gjennom punktet B, blir armen lik null slik at $\tau_{\text{B}} = \underline{\underline{0}}$.

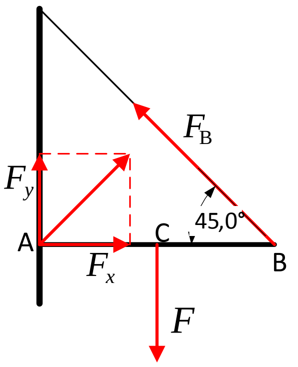
c) På samme måte som i a) finner vi at når vi bruker B som mometpunkt, blir armen

$$d_B = \tfrac{1}{2} l \cdot \sin\theta$$

slik at kraftmomentet om B blir

$$\tau_B = F \cdot d_B = \underline{\underline{F \cdot \tfrac{1}{2} l \sin\theta}}\,.$$

Oppgave 6.4.2:



a) Kraften F angriper i en avstand $\tfrac{1}{2}L$ fra A, og AC står vinkelrett på kraftretningen. Da gir F et kraftmoment om A med størrelse

$$\tau_1 = F \cdot \tfrac{1}{2} L \cdot \sin\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) = \tfrac{1}{2} FL\,.$$

Siden kraften F_B angriper i avstand L fra A, ser vi at F_B gir et kraftmoment om A med størrelse

$$\tau_2 = F_B \cdot L \cdot \sin\left(45^\circ\right) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot F_B \cdot L\,.$$

Dersom disse to kraftmomentene skal være like, må

$$\tau_1 = \tau_2 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2} FL = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot F_B \cdot L \quad \Leftrightarrow \quad F_B = \underline{\underline{\tfrac{1}{\sqrt{2}} F}}\,.$$

b) Kraften i A er $\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix}$. Siden bommen er i ro, blir

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -F_B \cos 45^\circ \\ F_B \sin 45^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_B \cos 45^\circ \\ F - F_B \sin 45^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{\sqrt{2}} F \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \\ F - \tfrac{1}{\sqrt{2}} F \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \tfrac{1}{2} F \\ \tfrac{1}{2} F \end{bmatrix}}}$$

Oppgave 6.4.3:

a) Kraftmomentet om sentrum er

$$\tau = F \cdot R = 80\,\text{N} \cdot 0.40\,\text{m} = \underline{32\,\text{Nm}}\,.$$

Da er arbeidet

$$W = \tau \cdot \Delta\theta = 32\,\text{N} \cdot 2\pi \approx \underline{\underline{201\text{J}}}\,.$$

b) $$W = \tfrac{1}{2} I\omega^2 \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{2W}{I}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 201\text{J}}{2000\,\text{kg} \cdot \text{m}^2}} = \underline{\underline{0.45\,\text{rad/s}}}$$

Oppgave 6.5.1:

a) Stavens treghetsmoment om endepunktet A er $I_A = \tfrac{1}{3} mL^2$. Da blir spinnet om A

$$L_A = I_A \omega = \underline{\underline{\tfrac{1}{3} mL^2 \omega}}\,.$$

b) Stavens treghetsmoment om massesenteret C er $I_C = \tfrac{1}{12} mL^2$, slik at spinnet om C er

$$L_C = I_C \omega = \tfrac{1}{12} mL^2 \omega\,.$$

Men C har en fart $v_C = \omega \cdot \left(\tfrac{1}{2} L\right)$ i forhold til A. Da har C et spinn

$$L_{C,A} = m v_C \left(\tfrac{1}{2} L\right) = m \cdot \left(\omega \cdot \tfrac{1}{2} L\right) \cdot \left(\tfrac{1}{2} L\right) = \tfrac{1}{4} mL^2 \omega$$

om A. Samlet spinn blir derfor

$$I_A = I_C + I_{C,A} = \tfrac{1}{12} mL^2 \omega + \tfrac{1}{4} mL^2 \omega = \underline{\underline{\tfrac{1}{3} mL^2 \omega}}\,.$$

Oppgave 6.5.2:
Før støtet har partikkelen en kinetisk energi

$$W_1 = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{3}{4}m\right)v^2) = \tfrac{3}{8}mv^2 .$$

Siden staven henger i ro, har den ingen kinetisk energi. Etter støtet kan vi enklest regne som om et legeme med treghetsmoment $I_\mathrm{A} = \tfrac{2}{3}md^2$ roterer med vinkelfart $\omega = \tfrac{3}{4}\cdot\dfrac{v}{d}$ roterer om A.

Dette legemet har da en kinetisk energi

$$W_2 = \tfrac{1}{2}I_\mathrm{A}\omega^2 = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2}{3}md^2\right)\left(\tfrac{3}{4}\cdot\frac{v}{d}\right)^2 = \tfrac{3}{16}mv^2 .$$

Vi ser at

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{\tfrac{3}{16}mv^2}{\tfrac{3}{8}mv^2} = \tfrac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{W_2 = \tfrac{1}{2}W_1}} .$$

Oppgave 6.5.3:

a) Skive + stav har samlet treghetsmoment om A:

$$I_\mathrm{samlet} = \tfrac{1}{2}mR^2 + \tfrac{1}{12}m(2R)^2 = \underline{\underline{\tfrac{5}{6}mR^2}}$$

b) Bruker skivas symmetriakse som momentakse. De ytre kreftene (tyngde samt kraft fra aksen mot skiva) har da ikke noe kraftmoment. Da er spinnet bevart, slik at

$$I_\mathrm{skive}\omega_0 + 0 = I_\mathrm{samlet}\omega_1 \quad\Leftrightarrow\quad \omega_1 = \frac{I_\mathrm{skive}}{I_\mathrm{samlet}}\omega_0 = \frac{\tfrac{1}{2}mR^2}{\tfrac{5}{6}mR^2}\omega_0 = \underline{\underline{\tfrac{3}{5}\omega_0}}$$

c) Skivas opprinnelige kinetiske energi er

$$W_0 = \tfrac{1}{2}I_\mathrm{skive}{\omega_0}^2 = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}mR^2\right){\omega_0}^2 = \underline{\tfrac{1}{4}mR^2{\omega_0}^2}$$

Det sammensatte legemets kinetiske energi er

$$W_1 = \tfrac{1}{2}I_\mathrm{samlet}{\omega_1}^2 = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{5}{6}mR^2\right)\left(\tfrac{3}{5}\omega_0\right)^2 = \underline{\tfrac{3}{20}mR^2\omega_0} .$$

Da blir

$$\frac{W_1}{W_0} = \frac{\tfrac{3}{20}mR^2{\omega_0}^2}{\tfrac{1}{4}mR^2{\omega_0}^2} = \tfrac{3}{5} \quad\Leftrightarrow\quad W_1 = \tfrac{3}{5}W_0 .$$

Altså er $W_0 - \tfrac{3}{5}W_0 = \underline{\underline{\tfrac{2}{5}W_0}}$ gått over til andre energiformer (i praksis varme).

Oppgave 6.5.4:

a) I dette støtet er spinnet bevart. Før støtet er det kun staven som har spinn:

$$L_0 = I_A\omega_0 = \tfrac{1}{3}md^2\cdot\omega_0 .$$

Etter støtet har staven vinkelfart ω, og kula fått en fart $v = \omega d$. Både staven og kula har da spinn:

$$L_1 = I_A\omega + mvd = \tfrac{1}{3}md^2\omega + m(\omega d)d = \tfrac{4}{3}md^2\omega .$$

Spinnbevaring:

$$L_1 = L_0 \quad\Leftrightarrow\quad \tfrac{4}{3}md^2\omega = \tfrac{1}{3}md^2\omega_0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{\omega = \tfrac{1}{4}\omega_0}} .$$

b) Kinetisk energi før støtet var

$$W_\mathrm{kin,0} = \tfrac{1}{2}I_A{\omega_0}^2 = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}md^2{\omega_0}^2 = \tfrac{1}{6}md^2{\omega_0}^2 .$$

Kinetisk energi etter støtet blir

$$W_{\text{kin},1} = \tfrac{1}{2} I_A \omega^2 + \tfrac{1}{2} m v^2 = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{3} m d^2 \left(\tfrac{1}{4}\omega_0\right)^2 + \tfrac{1}{2} m \left(\tfrac{1}{4}\omega_0 \cdot d\right)^2 = \tfrac{1}{96} m d^2 \omega_0{}^2 + \tfrac{1}{32} m d^2 \omega_0{}^2$$
$$= \tfrac{1}{24} m d^2 \omega_0{}^2 = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{6} m d^2 \omega_0{}^2 = \tfrac{1}{4} W_{\text{kin},0}$$

Vi ser at en fjerdedel av den opprinnelige kinetiske energien er bevart som kinetisk energi.

Oppgave 6.5.5:

a) Vet at treghetsmomentet til en tynn stav om sitt ene endepunkt er

$$I_{\text{A}} = \tfrac{1}{3} m L^2 .$$

Når partikkelen med masse $\tfrac{1}{3} m$ er plassert midt på staven, d.v.s. i avstand $\tfrac{1}{2} L$ fra A, blir det sammensatte legemets treghetsmoment om A

$$I_0 = \tfrac{1}{3} m L^2 + \left(\tfrac{1}{3} m\right) \cdot \left(\tfrac{1}{2} L\right)^2 = \tfrac{5}{12} m L^2 .$$

Når partikkelen er forskjøvet til stavens andre ende, d.v.s. i avstand L fra A,blir treghets-momentet

$$I_1 = \tfrac{1}{3} m L^2 + \left(\tfrac{1}{3} m\right) \cdot L^2 = \tfrac{2}{3} m L^2 .$$

Det er ingen ytre krefter som gir kraftmoment om A. Da er spinnet bevart, slik at

$$I_0 \omega_0 = I_1 \omega_1 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_1 = \frac{I_0}{I_1} \omega_0 = \frac{\tfrac{5}{12} m L^2}{\tfrac{2}{3} m L^2} \omega_0 = \underline{\underline{\tfrac{5}{8} \omega_0}} .$$

b) I utgangspunktet var den kinetiske energien

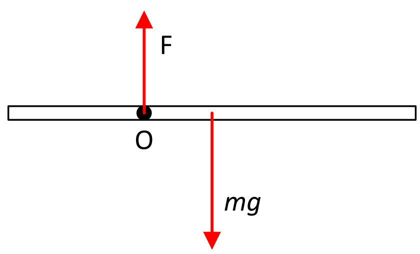
$$W_0 = \tfrac{1}{2} I_0 \omega_0{}^2 = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{5}{12} m L^2 \cdot \omega_0{}^2 = \underline{\tfrac{5}{24} m L^2 \omega_0{}^2} .$$

Etter forskyvningen er den kinetiske energien blitt

$$W_1 = \tfrac{1}{2} I_1 \omega_1{}^2 = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} m L^2 \cdot \left(\tfrac{5}{8} \omega_0\right)^2 = \underline{\tfrac{25}{192} m L^2 \omega_0{}^2} = \tfrac{5}{8} \cdot \tfrac{5}{24} m L^2 \omega_0 = \underline{\tfrac{5}{8} W_0} .$$

Vi ser at bare $\tfrac{5}{8}$ av den opprinnelige kinetiske energien er bevart som kinetisk energi.

Oppgave 6.6.1:



Bruker kraftmomentsetningen med akse i O. Staven påvirkes av to krefter: En kraft F fra aksen og tyngdekraften mg i massesenteret. Kraften F gir ikke noe kraftmoment om O. For å finne tyngdens kraftmoment må jeg først finne avstanden d fra O til massesenteret:

$$d = \tfrac{1}{2} L - \tfrac{1}{3} L = \tfrac{1}{6} L .$$

Da påvirkes staven av et kraftmoment

$$\tau = mg \cdot d = mg \cdot \tfrac{1}{6} L .$$

Ved å bruke Steiners setning, får vi at stavens treghetsmoment om O blir

$$I_{\text{O}} = \tfrac{1}{12} m L^2 + m \left(\tfrac{1}{6} L\right)^2 = \underline{\tfrac{1}{9} m L^2} .$$

Kraftmomentsetningen gir nå

$$\tau = I_{\text{O}} \alpha \quad \Leftrightarrow \quad mg \cdot \tfrac{1}{6} L = \tfrac{1}{9} m L^2 \cdot \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \underline{\underline{\tfrac{3}{2} \cdot \frac{g}{L}}} .$$

Oppgave 6.6.2:

a) Treghetsmoment til det sammensatte legemet er summen av treghetsmomentene til del-legmene:

$$I_{\mathrm{C}} = \underbrace{mR^2}_{\text{rør}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}m(2R)^2}_{\substack{\text{massiv}\\ \text{sylinder}}} = \underline{\underline{3mR^2}}\,.$$

b) Kaller snordraget S. Setter opp disse likningene:
Newtons 2. lov for klossen:

(1): $mg - S = ma\,.$

Kraftmomentsetningen for legemet om aksen, der jeg benytter at snordragskraften angriper i en avstand $2R$ fra aksen:

(2): $S \cdot 2R = I_{\mathrm{C}} \cdot \alpha\,.$

Siden snora ikke glir, har vi at

(3): $a = \alpha \cdot 2R \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \dfrac{a}{2R}\,.$

Setter (3) inn i (2) sammen med uttrykket for I_{C}:

$$S \cdot 2R = \left(3mR^2\right) \cdot \frac{a}{2R} \quad \Leftrightarrow \quad S = \tfrac{3}{4}ma\,.$$

Så settes dette inn i (1):

$$mg - \tfrac{3}{4}ma = ma \quad \Leftrightarrow \quad g = \tfrac{7}{4}a \quad \Leftrightarrow \quad a = \underline{\underline{\tfrac{4}{7}g}}\,.$$

Da blir vinkelakselerasjonen

$$\alpha = \frac{a}{2R} = \frac{\tfrac{4}{7}g}{2R} = \underline{\underline{\frac{2g}{7R}}}\,.$$

c) Når klossen har fart v, har den en kinetisk energi

$$W_{\mathrm{k}} = \underline{\tfrac{1}{2}mv^2}\,.$$

Da har legemet en vinkelfart $\omega = \dfrac{v}{2R}$, og en rotasjonsenergi

$$W_{\mathrm{l}} = \tfrac{1}{2}I_{\mathrm{C}}\omega^2 = \tfrac{1}{2} \cdot 3mR^2 \cdot \left(\frac{v}{2R}\right)^2 = \underline{\tfrac{3}{8}mv^2}\,.$$

Energibevaring:

$$mgh = W_{\mathrm{k}} + W_{\mathrm{l}} = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{3}{8}mv^2 = \tfrac{7}{8}mv^2 \quad \Leftrightarrow \quad v = \underline{\underline{\sqrt{\tfrac{8}{7}gh}}}\,.$$

d) Benytter en bevegelseslikning:

$$v^2 - v_0{}^2 = 2ah \quad \Leftrightarrow \quad v = \sqrt{2ah} = \sqrt{2 \cdot \tfrac{4}{7}g \cdot h} = \underline{\underline{\sqrt{\tfrac{8}{7}gh}}}\,.$$

6.10.4. Svar på blandede oppgaver.

Oppgave 6.1:

$v = 6.30\,\mathrm{m/s}\,.$

Oppgave 6.2:

$v_{\text{CM}} = \sqrt{\tfrac{10}{7} g\left(h - R\right)}$, $h_1 = \tfrac{5}{7} h + \tfrac{2}{7} R$.

Oppgave 6.3:

$k = 0.41$

Oppgave 6.4:

$v = \sqrt{\tfrac{8}{5} gl \sin\theta}$, $v = \sqrt{\tfrac{4}{5} gl\left(2\sin\theta - \mu\cos\theta\right)}$, $\mu = 2\tan\theta$.

Oppgave 6.5:

$y_{\text{C}} = \tfrac{5}{6} L$, $\omega = 2\sqrt{\dfrac{g}{L}}$, $F = 13mg$.

Oppgave 6.6:

$v_{\text{A}} = \sqrt{\tfrac{3}{5} gh}$

Oppgave 6.7:

$\omega = 3.00\,\text{rad/s}$, $W_1 = 919\,\text{J}$, $W_2 = 547\,\text{J}$.

Oppgave 6.8:

$I_{\text{A}} = \tfrac{1}{3} ml^2$, $\omega = \dfrac{v_0}{2l}$.

Oppgave 6.9:

$x_{\text{C}} = 0.50\,\text{m}$, $I_{\text{A}} = 0.128\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$, $\omega = 3.13\,\text{s}^{-1}$, $\omega = 2.0\,\text{s}^{-1}$, $u = 3.2\,\text{m/s}$, $\omega = 6.25\,\text{s}^{-1}$,
$v = 0.0\,\text{m/s}$.

Oppgave 6.10:

$v = \tfrac{1}{2} u$, $\omega = \tfrac{3u}{L}$, $x = \dfrac{1}{\sqrt{12}} L$

Oppgave 6.11:

$I = \tfrac{3}{7} mR^2$, $v = \sqrt{\tfrac{7}{10} gL}$, $a = \tfrac{7}{20} g$, $F = \tfrac{3}{20} mg$, $\mu \geq \tfrac{1}{10}\sqrt{3}$, $a = \dfrac{7}{20}$, $F = \dfrac{3}{20} mg$

Oppgave 6.12:

$a = \tfrac{1}{4} g$, $v = \sqrt{\tfrac{1}{2} gh}$, $v = \sqrt{\tfrac{1}{2} gh}$.

Oppgave 6.13:

$a = \tfrac{1}{3} g$, $a_{\text{A}} = \tfrac{1}{7} g$, $a_{\text{C}} = \tfrac{5}{7} g$

Oppgave 6.14:

$a = \dfrac{g\sin\theta}{\dfrac{I_{\text{C}}}{mR^2} + 1}$, $s_{\text{S}} = \tfrac{7}{10} L$.

Oppgave 6.15:

$F_x = \frac{1}{4}mg$, $F_y = \frac{2}{3}mg$, $\alpha = \dfrac{2g}{L}$, $\omega = 2\sqrt{\dfrac{g}{L}}$, $m_\mathrm{P} = \frac{1}{6}m$.

Oppgave 6.16:

$I_\mathrm{C} = \frac{1}{25}ml^2$, $I_\mathrm{O} = \frac{2}{25}ml^2$, $W_\mathrm{kin} = \frac{1}{5}mgl$, $\omega = \sqrt{\dfrac{5g}{l}}$, $v_\mathrm{C} = \sqrt{\frac{1}{5}gl}$, $F = mg$, $\omega_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{5g}{l}}$

Oppgave 6.17:

$I = 11.0\,\mathrm{kg\cdot m^2}$, $F = 157\,\mathrm{N}$, $S = 25\,\mathrm{m}$, $W = 3925\,\mathrm{J}$, $P = 157\,\mathrm{W}$, $\alpha = 1.15\,\mathrm{s^{-1}}$, $S_1 = 803\,\mathrm{N}$,
$S_2 = 173\,\mathrm{N}$

Oppgave 6.18:

$a = \frac{1}{3}g$, $\alpha_\mathrm{A} = 2\alpha_\mathrm{B}$, $\alpha_\mathrm{A} = \frac{1}{7}\dfrac{g}{R}$, $\alpha_\mathrm{B} = \frac{2}{7}\dfrac{g}{R}$

Oppgave 6.19:

$\alpha = \frac{1}{6}\dfrac{g}{R}$