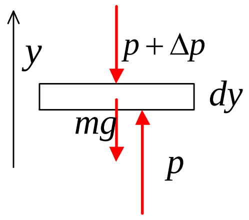
Barometerlikningen.

Da vi utledet formelen for hydrostatisk trykk, forutsatte vi at massetettheten ρ er konstant, uavhengig av trykket. Dette er en god antagelse for praktisk talt alle væsker. For gasser vil imidlertid ρ variere med trykket, slik at likningen $p = p_0 + \rho gh$ stemmer dårlig. Vi skal nå se hvordan vi kan finne en tilsvarende formel for gasser.



Vi tar for oss et tynt, horisontalt volumelement med tykkelse Δy og areal A. Vi antar videre at dette elementet er så tynt at tettheten er konstant over alt. Vi sier at trykket under elementet er p slik at trykk-kraften oppover er $F_{\text{opp}} = p \cdot A$, og at trykket over elementet er $p + \Delta p$ slik at trykk-kraften nedover er

$$F_{\text{ned}} = (p + \Delta p)A.$$

Tyngden av elementet er

$$G = mg = (\rho V)g = (\rho A \cdot \Delta y)g = \rho A g \Delta y.$$

Da gir Newtons 2. lov:

$$F_{\text{opp}} - F_{\text{ned}} - G = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p \cdot A - (p + \Delta p) \cdot A - \rho A g \cdot \Delta y = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad p - p - \Delta p - \rho g \cdot \Delta y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta p = -\rho g \cdot \Delta y$$

Når $\Delta y \to 0$ må også $\Delta p \to 0$. Vi kan da erstatte Δy med dy, og Δp med dp, og får

$$dp = -\rho g \, dy.$$

Dersom tettheten ρ er konstant, har denne differensiallikningen løsningen

$$p - p_0 = -\rho g (y - y_0) \quad \Leftrightarrow \quad p = p_0 + \rho g h$$

der $h = y_0 - y$ (husk at y er positiv oppover, mens h er positiv nedover). Men dersom ρ ikke er konstant, må vi vite hvordan ρ avhenger av p og/eller y før vi kan løse likningen.

La oss anta at fluidet vårt er en ideell gass. Fra varmelæra vet vi at da er

$$\frac{p_0 \cdot V_0}{T_0} = \frac{p \cdot V}{T} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{V_0}{V} = \frac{p}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T}.$$

Forholdet mellom massetetthetene blir

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\frac{m}{V}}{\frac{m}{V_0}} = \frac{V_0}{V} = \frac{p}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T} \quad \Leftrightarrow \quad \rho = \frac{p}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T} \rho_0.$$

Settes dette inn i differensiallikningen, får vi

$$dp = -\rho g \, dy = -\left(\frac{p}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T} \rho_0 \right) g \, dy \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T} g \, dy$$

$$\int_{p_0}^{p_1} \frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T} g \int_{y_0}^{y_1} dy \quad \Leftrightarrow \quad \ln p_1 - \ln p_0 = -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T} g (y_1 - y_0)$$

$$\ln\left(\frac{p_1}{p_0} \right) = -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T} g (y_1 - y_0) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p_1}{p_0} = e^{-\frac{\rho_0}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T} g (y_1 - y_0)} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{p_1 = p_0 e^{-\frac{\rho_0 T_0 g h}{p_0 T}}}}$$

Her er p_0 og ρ_0 henholdsvis trykk og massetetthet i et referansenivå, mens p_1 og T er trykk og temperatur i en høyde $h = y_1 - y_0$ over dette nivået. Denne likningen kalles ***barometer-likningen***, og brukes bl.a. til å beregne trykket i atmosfæren.

Eksempel 1: Bruk barometerlikningen til å beregne trykket på Mount Everest (8844m.o.h.) når du vet at ved havoverflaten er lufttrykket tilnærmet lik $1.0 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$ og luftas massetetthet er $1.20\,\mathrm{kg/m^3}$. Anta at temperaturen er den samme på toppen av Mount Everest som ved havoverflaten.

Løsning: $p = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g h}{p_0}} = 1.0 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \cdot e^{-\frac{(1.20\,\mathrm{kg/m^3})\cdot(9.81\,\mathrm{m/s^2})\cdot(8844\,\mathrm{m})}{1.0\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}}} \approx \underline{\underline{0.35 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}}}$.