

Bjørn Davidsen

MATEMATIKK FOR

INGENIØRER

**Differensiallikninger
og svingninger**

Innhold

FORORD	3
1. FØRSTE ORDENS DIFFERENSIALLIKNINGER.	4
1.1. INNLEDNING.	4
1.2. SEPARABLE DIFFERENSIALLIKNINGER.	5
1.3. LINEÆRE FØRSTE ORDENS DIFFERENSIALLIKNINGER.	9
1.4. ANDRE TYPER FØRSTE ORDENS DIFFERENSIALLIKNINGER.	11
1.4.1. <i>Generelt om substitusjon</i>	11
1.4.2. <i>Homogene likninger</i>	12
1.4.3. <i>Bernoullis likning</i>	13
1.5. RETNINGSFELT.	15
1.6. NUMERISK LØSING AV DIFFERENSIALLIKNINGER.	17
2. BRUK AV FØRSTE ORDENS DIFFERENSIALLIKNINGER.	20
2.1. VEKSTMODELLER.	20
2.2. RADIOAKTIV NEDBRYTNING.	25
2.3. MASSEBALANSE.	27
2.4. RETTLINJET BEVEGELSE.	29
2.5. ELEKTRISITETSLÆRE.	32
2.6. VARMETRANSPORT.	35
3. LINEÆRE 2. ORDENS DIFFERENSIALLIKNINGER.	39
3.1. INNLEDNING.	39
3.2. HOMOGENE LINEÆRE 2.ORDENS DIFFERENSIALLIKNINGER.	42
3.2.1. <i>Generelle egenskaper</i>	42
3.2.2. <i>Likninger med konstante koeffisienter</i>	45
3.3. INHOMOGENE LIKNINGER.	49
3.3.1. <i>Innledning</i>	49
3.3.2. <i>Ubestemte koeffisienters metode</i>	51
3.3.3. <i>Lagranges metode (variasjon av parametre)</i>	56
3.4. HØYERE ORDENS LINEÆRE DIFFERENSIALLIKNINGER.	58
3.5. SYSTEM AV LINEÆRE 1.ORDENS DIFFERENSIALLIKNINGER.	59
4. SVINGNINGER.	62
4.1. INNLEDNING.	62
4.2. ET KLOSS-FJÆR-SYSTEM.	63
4.3. DEMPTE SVINGNINGER.	65
4.3.1. <i>Likningen for en dempet svingning</i>	65
4.3.2. <i>Vi løser likningen</i>	66
4.4. TVUNGNE SVINGNINGER.	71
4.5. RESONANS.	74
5. BLANDEDE OPPGAVER.	79
BLANDEDE OPPGAVER.	79
LØSNINGER PÅ BLANDEDE OPPGAVER.	86

6. TILLEGG.	120
6.1. LØSING AV LINEÆRE FØRSTE ORDENS DIFFERENSIALLIKNINGER.	120
6.2. LINEÆRT (U)AVHENGIGE FUNKSJONER. WRONSKI-DETERMINANTEN.	121
6.3. HOMOGENE LINEÆRE DIFFERENSIALLIKNINGER MED KONSTANTE KOEFFISIENTER.	125
6.3.1. Innledning.	125
6.3.2. Kompleks konjugerte røtter.	126
6.1.3. To like røtter.	127
6.2. LØSNINGEN AV DEN INHOMOGENE LINEÆRE 2.ORDENS DIFFERENSIALLIKNINGEN.	129
6.3. TEORIEN BAK LAGRANGES METODE (VARIASJON AV PARAMETRE).	130
6.4. ANDRE MEKANISKE OSCILLATORER.	131
6.4.1. Bakgrunn.	131
6.4.2. Matematisk pendel.	131
6.4.3. Fysisk pendel.	132
6.4.4. Torsjonspendel.	134
6.4.5. Dupp på vann.	134
6.5. MER OM UNDERDEMPPEDE SVINGNINGER.	135
6.6. PARTIKULÆR LØSNING AV SVINGELIKNINGEN.	137
6.7. BRUK AV KOMPLEKSE FUNKSJONER.	138
6.8. ELEKTRISKE SVINGNINGER.	140
6.8.1. Svingelikningen.	140
6.8.2. Tvungne svingninger.	141
6.8.3. Bruk av komplekse størrelser.	142
7. SMÅOPPGAVER I TEKSTEN.	145
7.1. OPPGAVER	145
7.2. LØSNINGER PÅ SMÅOPPGAVER	148

Forord

Som ingeniør er du helt avhengig av å jobbe med matematiske modeller av fysiske systemer og prosesser. Slike modeller formuleres ofte som differensiallikninger. Derfor er det svært viktig at du blir fortrolig med slike likninger.

I dette heftet skal jeg først og fremst vise hvordan du løser de mest aktuelle typene av differensiallikninger. Men jeg har også tatt med mange eksempler på hvordan slike differensiallikninger dukker opp i praktiske situasjoner. Et helt kapittel er viet svingninger. Det kapitlet er nok mest aktuelt for studenter innen elektroteknikk og reguleringsteknikk. Men også andre kan ha nytte (og kanskje litt glede) av å se hvordan de matematiske teknikkene kan brukes til å analysere fysiske systemer.

Før du går løs på dette stoffet, må du beherske integrasjon. Selv om det i dag fins dataverktøy som løser integral, er det mest tilfredsstillende å kunne løse de aktuelle integralene selv. I de fleste eksemplene og løsningsforslagene har jeg derfor tatt med komplett løsning av integral.

Jeg håper at dette heftet kan være en nyttig introduksjon til bruk av differensiallikninger i typiske ingeniør-sammenhenger.

Med hilsen

Bjørn Davidsen

1. Første ordens differensiallikninger.

1.1. Innledning.

Hva er en *første ordens differensiallikning*?

La y være en funksjon av en fri variabel x . En **første ordens differensiallikning** er en likning som inneholder $y' = \frac{dy}{dx}$, og som vanligvis også inneholder y og/eller x .

På tilsvarende måte er en **andre ordens differensiallikning** en likning som inneholder y'' , og som kan inneholde y' , y og/eller x . Og slik kan vi fortsette opp til en n 'te ordens differensiallikning.

Å **løse en differensiallikning** går ut på å finne y som funksjon av den frie variabelen x .

Det er slett ikke alle differensiallikninger som lar seg løse eksakt. Men det er utviklet teknikker for å løse noen typer differensiallikninger som forekommer ofte i praksis. Vi skal etter hvert se på noen av disse. Men først skal vi se på et par eksempler på differensiallikninger som lar seg løse uten bruk av spesielle teknikker.

Vi starter med et enkelt eksempel:

Eksempel 1.1.1.a: Løs differensiallikningen

$$y' = 2x.$$

Løsning: Vi skal altså finne en funksjon $y = f(x)$ som er slik at $y' = 2x$. Da finner vi y ved å integrere:

$$y = \int 2x dx = \underline{\underline{x^2 + C}}.$$

Løsningen vår inneholder en ukjent konstant C . En slik løsning kalles **en generell løsning** av differensiallikningen. Dersom vi skal finne denne konstanten, må vi kjenne en *startverdi* for y . Slike problem som består av en differensiallikning og en startbetingelse kalles ofte et **initialverdiproblem**. Den løsningen av differensiallikningen som tilfredsstiller startbetingelsen kalles gjerne en **spesiell løsning** av differensiallikningen.

Eksempel 1.1.1b: Løs differensiallikningen

$$y' = 2x \text{ når } y(0) = 1.$$

Løsning: Vi har allerede funnet at $y = x^2 + C$. For å finne C , setter vi inn at $y = 1$ når $x = 0$:

$$1 = 0^2 + C \Leftrightarrow \underline{C = 1}.$$

Løsningen av problemet er altså

$$y = \underline{\underline{x^2 + 1}}.$$

Vi tar et eksempel til:

Eksempel 1.1.2: Løs differensiallikningen

$$y' = y \text{ når } y(0) = 2.$$

Løsning: Dette problemet kan vi ikke løse bare ved å integrere. Vi må bruke våre kunnskaper om derivasjon og integrasjon til å finne en funksjon $y = f(x)$ som er slik at $y' = y$. Og vi kjenner faktisk en slik funksjon. Hvis du deriverer $y = e^x$ får du $y' = e^x$. Altså passer funksjonen $y = e^x$ inn i den gitte differensiallikningen.

Men funksjonen $y = e^x$ er ikke slik at $y(0) = 2$. Og det hjelper heller ikke å legge til en konstant. Når du deriverer en funksjon $y = e^x + C$ får du ikke at $y' = y$ (med mindre $C = 0$). Vi må altså prøve noe annet. Løsningen består i å *multiplisere* e^x med en konstant. For du ser vel at når du deriverer $y = C \cdot e^x$ får du $y' = C \cdot e^x$, slik at $y' = y$?

Nå gjenstår det bare å finne C . Vi setter inn at $y = 2$ når $x = 0$, og får:

$$2 = C \cdot e^0 \Leftrightarrow 2 = C \cdot 1 \Leftrightarrow \underline{C = 2}.$$

Altså er løsningen på problemet:

$$\underline{\underline{y = 2e^x}}.$$

Du innser sikkert at den "prøve-og-feile"-teknikken som vi har brukt hittil, har sine klare begrensninger. Vi trenger mer systematiske teknikker for å løse differensiallikninger. Vi skal da også se på noen slike etter hvert. Men foreløpig kan du jo løse [oppgave 1.1.1](#) med "prøving og feiling", før du går løs på de typene differensiallikninger som du oftest vil møte i praksis: *separable* og *lineære* differensiallikninger.

1.2. Separable differensiallikninger.

Vi skal nå lære oss en systematisk løsningsteknikk for en bestemt type differensiallikninger, nemlig de **separable differensiallikningene**.

En differensiallikning er **separabel**

$\Updownarrow$ def.

Likningen kan omformes til $f(y) \cdot y' = g(x)$

Poenget med denne skrivemåten er at venstre side kun er en funksjon av y , multiplisert med y' , og at høyre side kun er en funksjon av x . Vi har altså *separert* de to variablene x og y .

Den **separable differensiallikningen**

$$f(y) \cdot y' = g(x)$$

løses på denne måten:

1. Sett $y' = \frac{dy}{dx}$ slik at likningen blir

$$f(y) \frac{dy}{dx} = g(x)$$

2. Multipliser med dx slik at likningen blir

$$f(y) dy = g(x) dx$$

3. Integrer begge sider:

$$\int f(y) dy = \int g(x) dx.$$

4. Finn (om mulig) y som funksjon av x .

Teknikken illustreres med et par eksempler:

Eksempel 1.2.1: Løs differensiallikningen

$$y' = \frac{x^2}{y}.$$

Løsning: Vi starter med å *separere* likningen. Vi multipliserer da med y på begge sider av likhetstegnet:

$$y \cdot y' = x^2$$

Så erstatter vi y' med $\frac{dy}{dx}$, og multipliserer med dx :

$$y \frac{dy}{dx} = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad y dy = x^2 dx.$$

Neste trinn er å integrere begge sider:

$$\int y dy = \int x^2 dx$$

som gir

$$\frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{3} x^3 + C$$

der C er en felles integrasjonskonstant for begge integralene.

Så multipliserer vi med 2 og trekker kvadratrota:

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{3} x^3 + 2C}.$$

Men siden C er en vilkårlig konstant, er også $2C$ en vilkårlig konstant. Vi skriver derfor C istedenfor $2C$, slik at løsningen blir

$$\underline{\underline{y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + C} .}}$$

Eksempel 1.2.2a: Løs differensiallikningen

$$y' = x \cdot y .$$

Løsning: Vi starter med å *separere* likningen. Vi deler da med y på begge sider av likhetstegnet:

$$\frac{1}{y} y' = x$$

Så erstatter vi y' med $\frac{dy}{dx}$, og multipliserer med dx :

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y} dy = x dx .$$

Neste trinn er å integrere begge sider:

$$\int \frac{1}{y} dy = \int x dx$$

som gir

$$\ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + C$$

der C er en felles integrasjonskonstant for begge integralene. Dette omformes ved hjelp av regneregler for logaritmer:

$$|y| = e^{\frac{1}{2}x^2 + C} = e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot e^C = \underline{C_1 e^{\frac{1}{2}x^2}} .$$

Her har vi benyttet at når C er en konstant, må også e^C være en konstant som vi kaller C_1 .

I praksis kan vi tilpasse C_1 slik at y får riktig fortegn. Vi sløyfer derfor absoluttverditegnene, og sløyfer også indeksen $_1$ på konstanten. Da blir løsningen

$$\underline{\underline{y = C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} .}}$$

Nå bør du prøve deg på noen [enkle oppgaver](#) før du går løs på litt vanskeligere oppgaver.

Hittil har vi kun funnet den generelle løsningen til differensiallikningene. Nå skal vi se på noen initialverdiproblem der vi skal bruke en startbetingelse til å finne den konstanten som inngår i den generelle løsningen.

Eksempel 1.2.2b: Løs differensiallikningen

$$y' = x \cdot y , \quad y(0) = 2 .$$

Løsning: Fra eksemplet ovenfor har vi at $y = C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$. Benytter at $y = 2$ når $x = 0$, og får:

$$2 = Ce^0 = C \cdot 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C = 2} .$$

Da blir løsningen $y = \underline{\underline{2e^{\frac{1}{2}x^2}}} .$

Vi kunne også funnet konstanten C på et tidligere tidspunkt. Vi går inn i løsningen fra Eksempel 1.2.2a når vi har funnet at

$$\ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Benytter at $y = 2$ når $x = 0$, og får

$$\ln 2 = \frac{1}{2} \cdot 0^2 + C \Leftrightarrow \underline{C = \ln 2}.$$

Da blir

$$\begin{aligned} \ln y &= \frac{1}{2}x^2 + \ln 2 \Leftrightarrow \ln y - \ln 2 = \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{1}{2}x^2 \\ \Leftrightarrow \frac{y}{2} &= e^{\frac{1}{2}x^2} \Leftrightarrow \underline{y = 2e^{\frac{1}{2}x^2}} \end{aligned}$$

Vi kan sløyfe absoluttverditegnet fordi vi vet fra startbetingelsen at y er positiv når $x = 0$.

Løs [oppgave 1.2.2](#).

Dersom vi kjenner en startbetingelse, kan vi finne konstanten C ved innsetting slik vi har sett før. Men vi kan også bruke en annen teknikk, slik neste eksempel viser:

Eksempel 1.2.3: Løs differensiallikningen

$$y \cdot y' = \sin x, \quad y(0) = 0.$$

Løsning: Vi setter $y' = \frac{dy}{dx}$, multipliserer med dx og integrerer:

$$\int y \, dy = \int \sin x \, dx$$

som gir

$$\frac{1}{2}y^2 = -\cos x + C.$$

Allerede nå kan vi finne C ved å benytte at $y = 0$ når $x = 0$. Men vi følger vanlig prosedyre og finner først y som funksjon av x . Vi multipliserer da med 2 på begge sider av likhetstegnet, trekker kvadratrot og innfører en ny konstant. Dette gir

$$\underline{y = \pm\sqrt{C - 2\cos x}}.$$

Så benyttes startbetingelsen for å finne C :

$$y(0) = 0 \Leftrightarrow \pm\sqrt{C - 2\cos 0} = 0 \Leftrightarrow C = 2\cos 0 = \underline{2}.$$

Løsningen blir altså

$$\underline{\underline{y = \pm\sqrt{2 - 2\cos x}}}.$$

Så var det den andre metoden. Da setter vi inn startbetingelsen som *nedre grense* for integralet, mens vi lar et vilkårlig punkt (x, y) være *øvre grense*. Vi integrerer altså slik:

$$\int_0^y y \, dy = \int_0^x \sin x \, dx$$

som ved integrasjon og innsetting av grenser gir

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^y &= [-\cos x]_0^x \Leftrightarrow \frac{1}{2}y^2 - 0 = -\cos x + \cos 0 \Leftrightarrow y^2 = -2\cos x + 2 \cdot 1 \\ \Leftrightarrow \underline{\underline{y = \pm\sqrt{2 - 2\cos x}}} \end{aligned}$$

Skal vi være formelle, har vi gjort et par stygge feil ovenfor: Vi har brukt samme symbol for integrasjonsvariabelen som for en grense. Det er mer korrekt å midlertidig erstatte integrasjonsvariablene x og y med for eksempel u og v , mens grensene er x og y . Da får vi:

$$\int_0^y u \, du = \int_0^x \sin v \, dv$$

som gir

$$\left[\frac{1}{2} u^2 \right]_0^y = [-\cos v]_0^x \Leftrightarrow \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 = -\cos x + \cos 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{y = \pm \sqrt{2 - 2\cos x}}}$$

Løs [oppgave 1.2.3](#).

1.3. Lineære første ordens differensiallikninger.

Den neste hovedtypen av første ordens differensiallikninger er de **lineære differensiallikningene**. De ser slik ut:

En differensiallikning som kan skrives på formen

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

kalles en **lineær første ordens differensiallikning**.

Merk at koeffisienten foran y' må være 1.

Slike differensiallikninger løses vanligvis med formel:

Den lineære første ordens differensiallikningen

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

løses slik:

1. Bestem først en hjelpefunksjon

$$F(x) = \int f(x) dx$$

2. Løsningen av likningen er da

$$y(x) = e^{-F(x)} \left(\int g(x) \cdot e^{F(x)} dx + C \right)$$

[Utledning](#)

Merk at du ikke trenger å ta med integrasjonskonstant når du finner hjelpefunksjonen $F(x)$.

Eksempel 1.3.1: Løs differensiallikningen

$$y' + x \cdot y = 2x, \quad y(0) = 1.$$

Løsning: Likningen er allerede på den riktige formen $y' + f(x) \cdot y = g(x)$.

Ser at $f(x) = x$ og at $g(x) = 2x$.

Finner først

$$F(x) = \int f(x) dx = \int x dx = \underline{\frac{1}{2}x^2}.$$

Da blir

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-F(x)} \left(\int g(x) \cdot e^{F(x)} dx + C \right) = e^{-\frac{1}{2}x^2} \left(\int 2x \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} dx + C \right) = e^{-\frac{1}{2}x^2} \left(2 \int e^u du + C \right) \\ &= e^{-\frac{1}{2}x^2} (2e^u + C) e^{-\frac{1}{2}x^2} = e^{-\frac{1}{2}x^2} \left(2e^{\frac{1}{2}x^2} + C \right) = 2e^{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2} + Ce^{-\frac{1}{2}x^2} = \underline{2 + Ce^{-\frac{1}{2}x^2}} \end{aligned}$$

Under veis har vi brukt substitusjonen

$$u = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \cdot 2x \Leftrightarrow du = x dx.$$

Finner til slutt C ut fra startbetingelsen:

$$y(0) = 1 \Leftrightarrow 2 + Ce^{-\frac{1}{2} \cdot 0^2} = 1 \Leftrightarrow 2 + C = 1 \Leftrightarrow \underline{C = -1}.$$

Altså er løsningen

$$y(x) = \underline{\underline{2 - e^{-\frac{1}{2}x^2}}}.$$

Før du går videre, kan du prøve deg på et par [enkle oppgaver](#).

Vi tar et eksempel til, som illustrerer at det er en fordel å kunne regnereglene for logaritmer:

Eksempel 1.3.2: Løs differensiallikningen

$$x \cdot y' - y = x^2, \quad y(1) = 2.$$

Løsning: Vi må først dividere likningen med x for å få den over på standardformen

$$y' + f(x) \cdot y = g(x).$$

Får da:

$$y' - \frac{1}{x}y = x$$

Her ser vi at

$$f(x) = -\frac{1}{x}$$

og at

$$g(x) = x.$$

Vi starter som vanlig med å finne hjelpefunksjonen

$$F(x) = \int f(x) dx = \int -\frac{1}{x} dx = \underline{-\ln x}.$$

Da blir

$$y(x) = e^{-F(x)} \left(\int g(x) \cdot e^{F(x)} dx + C \right) = e^{-(-\ln x)} \left(\int x \cdot e^{-\ln x} dx + C \right).$$

Og så kommer nøkkel-operasjonene:

$$e^{\ln x} = x$$

slik at

$$e^{-\ln x} = (e^{\ln x})^{-1} = x^{-1} = \frac{1}{x}.$$

Når dette settes inn, får vi:

$$y(x) = x \left(\int \frac{1}{x} dx + C \right) = x \left(\ln x + C \right) = x \ln x + Cx.$$

Da gjenstår det bare å finne C:

$$y(1) = 2 \Leftrightarrow 1^2 + C \cdot 1 = 2 \Leftrightarrow C = 1.$$

Løsningen blir da

$$y(x) = x^2 + x.$$

Løs [oppgave 1.3.2.](#)

1.4. Andre typer første ordens differensiallikninger.

Både separable og lineære første ordens differensiallikninger er svært vanlige når vi lager matematiske modeller av fysiske prosesser. I neste kapittel vil du møte mange slike eksempler. Men det fins mange andre typer første ordens differensiallikninger. Vi skal nå se hvordan vi kan løse noen slike.

1.4.1. Generelt om substitusjon.

Anta at vi har en første ordens differensiallikning som inneholder en fri variabel x , en ukjent funksjon y samt y' . En vanlig metode går ut på å erstatte y med en ny variabel på en slik måte at likningen blir enklere å løse. Dessverre fins det ingen generell teknikk for å gjøre dette. Vi har riktignok et par vanlige situasjoner, for eksempel homogene likninger og Bernoullis likning som vi skal se nærmere på nedenfor. Men først skal vi se på et par andre eksempler.

Eksempel 1.4.1: Løs differensiallikningen

$$\frac{dy}{dx} = (x + y + 3)^2$$

Løsning: Denne likningen er verken lineær eller separabel, og ser nokså håpløs ut. Men se hva som skjer dersom vi innfører en ny variabel

$$z(x) = x + y(x) + 3$$

For enkelhets skyld sløyfer vi x -ene i parentes, og får:

$$z = x + y + 3 \Leftrightarrow y = z - x - 3 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$$

Når dette settes inn i likningen, får vi

$$\frac{dz}{dx} - 1 = z^2 \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = z^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{dz}{z^2 + 1} = dx$$

Integrerer på begge sider, og får

$$\int \frac{dz}{z^2 + 1} = \int dx \Leftrightarrow \arctan z = x + C \Leftrightarrow z = \tan(x + C)$$

Den generelle løsningen av differensiallikningen blir da

$$y = z - x - 3 = \underline{\underline{\tan(x + C) - x - 3}}$$

Oppgave 1.4.1.

1.4.2. Homogene likninger.

La oss gå rett på sak:

En differensiallikning som kan skrives på formen

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

sies å være **homogen**. Slike likninger løses med substitusjonen

$$z = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = zx \Leftrightarrow y' = z' \cdot x + z.$$

La oss se hvordan dette fungerer i praksis.

Eksempel 1.4.2: Løs differensiallikningen

$$xy \cdot y' = x^2 + 2y^2$$

Løsning: Vi starter med å dele likningen på xy , og får

$$y' = \frac{x^2}{xy} + \frac{2y^2}{xy} = \frac{x}{y} + 2\frac{y}{x} = \frac{1}{\frac{y}{x}} + 2\frac{y}{x}$$

Så setter vi inn

$$z = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = z \cdot x \Rightarrow y' = z' \cdot x + z,$$

og får

$$z' \cdot x + z = \frac{1}{z} + 2z \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} \cdot x = \frac{1}{z} + z$$

Denne likningen er separabel:

$$\frac{dz}{dx} \cdot x = \frac{1}{z} + z \Leftrightarrow x \cdot dz = \left(\frac{1}{z} + z\right) dx$$

$$\Leftrightarrow zx \cdot dz = (z^2 + 1) dx \Leftrightarrow \frac{z}{z^2 + 1} dz = \frac{dx}{x}$$

Så integrerer vi begge sider. Integralet på venstre side integreres med substitusjonen

$$u = z^2 + 1 \Rightarrow \frac{du}{dz} = 2z \Leftrightarrow z dz = \frac{1}{2} du.$$

Får da

$$\int \frac{z}{z^2 + 1} dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{\frac{1}{2} du}{u} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2} \ln u = \ln |x| + \ln C_1 = \ln(C_1 x)$$

$$\ln u = 2 \ln(C_1 x) = \ln(C_1 x)^2 = \ln(Cx^2)$$

$$u = Cx^2$$

Men

$$u = z^2 + 1 = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = Cx^2$$

Da blir

$$\frac{y^2}{x^2} = Cx^2 - 1 \Leftrightarrow y^2 = Cx^4 - x^2$$

slik at

$$y = \pm \sqrt{Cx^4 - x^2}.$$

Oppgave 1.4.2.

1.4.3. Bernoullis likning.

Vi husker at den lineære første ordens differensiallikningen var

$$y' + f(x)y = g(x)$$

Dersom høyresiden er multiplisert med y^n får vi en likning som kalles **Bernoullis likning**:

Differensiallikningen
 $y' + f(x)y = g(x) \cdot y^n$
 kalles **Bernoullis likning**.

Den løses med substitusjonen

$$z = y^{1-n} \Leftrightarrow y = z^{\frac{1}{1-n}} \Rightarrow y' = \frac{1}{1-n} z^{\frac{1}{1-n}-1} \cdot z'$$

I praksis er ikke dette så ille som det kan se ut til i ramma. La oss se på et par eksempler.

Eksempel 1.4.3: Løs differensiallikningen

$$y' - xy = xy^2$$

Løsning: Dette er en Bernoullis likning med $n = 2$. Da bruker vi substitusjonen

$$z = y^{1-2} = y^{-1} \Leftrightarrow y = z^{-1}$$

Da blir

$$y' = (-1)z^{-2} \cdot z' = -\frac{1}{z^2} \cdot z'$$

Så setter vi inn:

$$-\frac{1}{z^2} \cdot z' - x \cdot \frac{1}{z} = x \cdot \frac{1}{z^2}$$

Multipliserer med z^2 og ordner:

$$-z' - xz = x \Leftrightarrow z' + xz = -x$$

Dette er en lineær differensiallikning. Finner først hjelpefunksjonen:

$$F(x) = \int x dx = \frac{1}{2}x^2$$

$$z(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} \left(\int (-x)e^{\frac{1}{2}x^2} dx + C \right)$$

Integralet løses med substitusjonen

$$u = \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = x \Leftrightarrow du = x dx$$

Da blir

$$\int -xe^{\frac{1}{2}x^2} dx = -\int e^u du = -e^u = -e^{\frac{1}{2}x^2}$$

slik at

$$z(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} \left(-e^{\frac{1}{2}x^2} + C \right) = \underline{\underline{-1 + Ce^{-\frac{1}{2}x^2}}}.$$

Da gjenstår det bare å benytte at

$$y = \frac{1}{z} = \underline{\underline{\frac{1}{Ce^{-\frac{1}{2}x^2}} - 1}}}$$

Eksempel 1.4.4: Løs differensiallikningen

$$xy' - 2y = x\sqrt{y}$$

Løsning: Vi starter med å dele på x og får

$$y' - \frac{2}{x}y = \sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}}$$

Dette er en Bernoullis likning med $n = \frac{1}{2}$. Vi substituerer

$$z = y^{1-n} = y^{1-\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{y} \Leftrightarrow y = z^2$$

Da blir

$$y' = 2z \cdot z'$$

Setter inn i differensiallikningen:

$$2z \cdot z' - \frac{2}{x}z^2 = z \Leftrightarrow z' - \frac{1}{x}z = \frac{1}{2}.$$

Hjelpefunksjonen blir

$$F(x) = \int \left(-\frac{1}{x} \right) dx = -\ln x$$

slik at $z(x)$ blir

$$\begin{aligned} z(x) &= e^{-(-\ln x)} \left(\int \frac{1}{2} e^{-\ln x} dx + C \right) = e^{\ln x} \left(\frac{1}{2} \int (e^{\ln x})^{-1} dx + C \right) = x \left(\frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx + C \right) \\ &= x \left(\frac{1}{2} \ln |x| + C \right) = x \left(\ln(|x|)^{\frac{1}{2}} + C \right) = \underline{x \left(\ln \sqrt{|x|} + C \right)} \end{aligned}$$

Da gjenstår det bare å benytte at

$$y(x) = z^2 = \underline{\underline{x^2 \left(\ln \sqrt{|x|} + C \right)^2}}.$$

Oppgave 1.4.3.

1.5. Retningsfelt.

Enhver 1.ordens differensiallikning kan skrives på formen

$$y' = f(x, y).$$

Du husker sikkert at y' angir stigningstallet til tangenten til funksjonsgrafen. Dette betyr at dersom vi beregner $y' = f(x, y)$ i mange punkter (x, y) og tegner korte linjer med det beregnede stigningstallet i hvert punkt, kan vi få et grafisk bilde av hvordan løsningen av differensiallikningen blir. Et slikt grafisk bilde kaller vi et **retningsfelt** (engelsk: *slope field*).

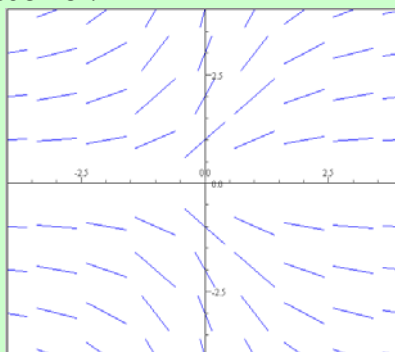
Eksempel 1.5.1: Lag et retningsfelt for

$$y' = \frac{y}{x^2 + 1}.$$

Løsning: For å tegne et slikt retningsfelt, må vi beregne y' for mange kombinasjoner av x og y . Et lite utsnitt av en slik tabell kan se slik ut:

Punkt:	$x = -2$	$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$
$y = 2$	$y' = \frac{2}{5}$	$y' = 1$	$y' = 2$	$y' = 1$	$y' = \frac{2}{5}$
$y = 1$	$y' = \frac{1}{5}$	$y' = \frac{1}{2}$	$y' = 1$	$y' = \frac{1}{2}$	$y' = \frac{1}{5}$
$y = 0$	0	0	0	0	0
$y = -1$	$y' = -\frac{1}{5}$	$y' = -\frac{1}{2}$	$y' = -1$	$y' = -\frac{1}{2}$	$y' = -\frac{1}{5}$
$y = -2$	$y' = -\frac{2}{5}$	$y' = -1$	$y' = -2$	$y' = -1$	$y' = -\frac{2}{5}$

Vi tegner inn korte linjer med stigningstallene i disse punktene (pluss mange andre), og får et retningsfelt omtrent som vist nedenfor:



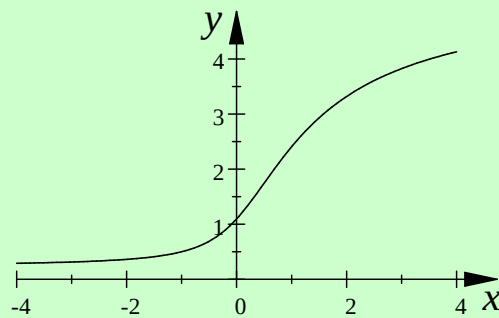
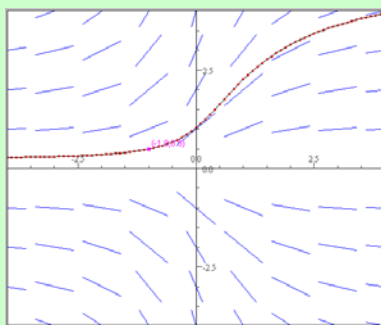
Dersom vi kjenner startverdier for x og y , kan vi benytte slike retningsfelt til å tegne tilnærmede grafer av den funksjonen som er løsningen av differensiallikningen med den aktuelle start-tilstanden. Dette er gjort i eksemplet nedenfor.

Eksempel 1.5.2:

- Bruk retningsfeltet i eksemplet ovenfor til å tegne en tilnærmet graf av løsningen av differensiallikningen når start-tilstanden er $x_0 = -1$, $y_0 = 0.5$.
- Finn en eksakt løsning av differensiallikningen, og tegn grafen.

Løsning:

- En graf tegnet på grunnlag av retningsfeltet kan se ut som grafen nedenfor til venstre:



- Den gitte differensiallikningen er separabel:

$$y' = \frac{y}{x^2+1} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2+1} \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x^2+1} \Leftrightarrow \ln|y| = \arctan x + C.$$

Finner konstanten C :

$$C = \ln|0.5| - \arctan(-1) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \ln 2.$$

Setter inn konstanten:

$$\begin{aligned} \ln y &= \arctan x + \frac{\pi}{4} - \ln 2 \Leftrightarrow \ln y + \ln 2 = \arctan x + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 2y = e^{\arctan x + \frac{\pi}{4}} \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{2} e^{\arctan x + \frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

Grafen til denne funksjonen er tegnet ovenfor til høyre. Du ser vel likheten mellom de to grafene?

Det fins mange forskjellige "Slope Field"-programmer på Internett til fri avbenyttelse. Figurene ovenfor er laget med en slik [fri Java applet](#). Her er en annen slik [retningsfelt-plotter](#).

Hittil har jeg ikke sagt noe om hvordan vi går fram for å tegne løsningsgrafene. Det enkleste er jo å tegne på frihand med utgangspunkt i retningsfeltet. Men vi kan gjøre det mye bedre! Av figuren over kan du (kanskje) se at grafen er trukket gjennom mange punkter, som åpenbart må være beregnet. Teknikken med å lage slike tilnærmede grafiske løsninger av en differensiallikning med kjent start-tilstand kalles *numerisk løsning* av differensiallikningen. Det fins mange mer eller mindre nøyaktige metoder for slike numeriske løsninger. Vi skal nå se litt på prinsippene bak slike metoder.

1.6. Numerisk løsning av differensiallikninger.

Å løse en differensiallikning går som kjent ut på å finne en *funksjon* som passer inn i den gitte likningen. Når funksjonen er kjent, kan du tegne funksjonsgrafene.

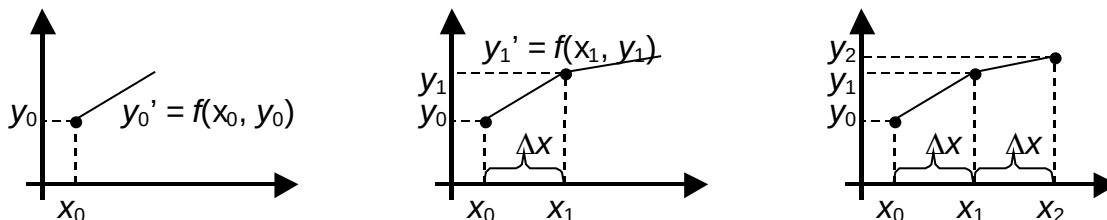
Noen ganger klarer vi ikke å løse differensiallikningen, d.v.s. at vi ikke klarer å finne noen funksjon som tilfredsstiller likningen med den gitte start-tilstanden. Men vi kan likevel lage en skisse av løsningsgrafene. Vi skal nå se på hvordan vi kan gå fram for å finne en slik *numerisk løsning* av problemet. Vi skal begrense oss til differensiallikninger av typen

$$y' = f(x, y)$$

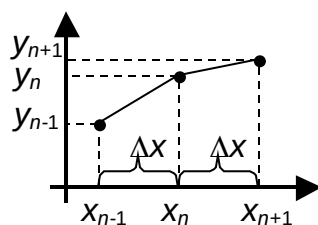
med kjent starttilstand

$$y(x_0) = y_0.$$

Før vi drukner i detaljer, skal jeg vise grunnprinsippet. Når vi kjenner startpunktet (x_0, y_0) , kan vi regne ut den deriverte $y'_0 = f(x_0, y_0)$ i dette punktet. Denne deriverte angir retningen til grafen i dette punktet (mer presist: vi vet retningen til tangenten til grafen i dette punktet). Så antar vi at grafen er *rettlinjet* et kort stykke Δx . Da kan vi regne oss fram til et nytt punkt (x_1, y_1) langs den rette linja (langs tangenten til grafen) der $x_1 = x_0 + \Delta x$. Så gjentar prosessen seg: I dette nye punktet regner vi ut $y'_1 = f(x_1, y_1)$, finner en ny rett linje (tangent), og går til et nytt punkt (x_2, y_2) . Og slik fortsetter vi. Prosessen er illustrert nedenfor.



Dersom grafen til den *eksakte* løsningen av differensiallikningen krummer lite innenfor intervallet Δx , vil denne teknikken gi brukbar tilnærming. Og dersom grafen dels krummer oppover og dels nedover, vil feilene motvirke hverandre.



Nå er tiden inne til å se på detaljene. Figuren til venstre viser situasjonen når vi er kommet til et vilkårlig punkt (x_n, y_n) . Der er den deriverte tilnærmet

$$y'_n(x_n, y_n) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow y_{n+1} \approx y_n + y'_n(x_n, y_n) \cdot \Delta x$$

Her har vi laget oss en *rekursiv formel* som vi kan bruke for å regne oss fra punkt til punkt. Denne formelen kalles **Eulers metode**. Metoden egner seg utmerket for regneark, slik eksemplet nedenfor viser.

Eksempel 1.6.1: Bruk Eulers metode til å finne en tilnærmet grafisk løsning av differensiallikningen

$$y' = y(1-y)x, \quad y(0) = 0.1.$$

Bruk $\Delta x = 0.1$.

Løsning: Vi bruker et regneark der vi setter opp kolonner slik:

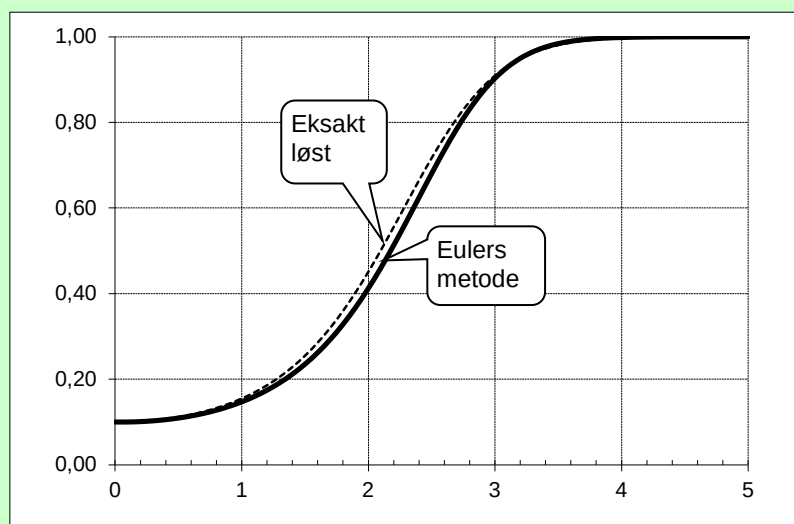
$\Delta x = 0,1000$			
n	x	y	$y' = y(1-y)x$
0	0	0,1000	0,0000
1	0,1	0,1000	0,0090
osv...			

I kolonnen for x setter vi inn startverdien i første linje. Deretter legger vi til Δx en gang for hver linje. I kolonnen for y setter vi inn startverdien i første linje. Deretter regner vi ut $y_{n+1} \approx y_n + y'_n(x_n, y_n) \cdot \Delta x$, der y'_n hentes fra linja over.

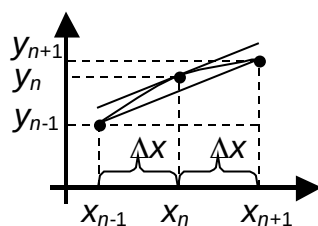
Differensiallikningen i eksemplet kan også løses eksakt. Løsningen blir

$$y = \frac{1}{1 + 9e^{-\frac{1}{2}x^2}}$$

(vis det!). Disse y -verdiene kan også legges inn i regnearket til kontroll. Resultatet blir:



Nøkkelen til suksess med en slik numerisk metode er at vi finner en god tilnærmelse for y' . Det er etter hvert utviklet en mengde andre metoder som er mye bedre enn den opprinnelige Eulers metode. Vi kan for eksempel se på en *to-trinns Eulers metode*.



Figuren til venstre indikerer at stigningstallet til tangenten til grafen med meget god tilnærmelse kan settes lik

$$y'_n \approx \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow y_{n+1} \approx y_{n-1} + y'_n(x_n, y_n) \cdot 2\Delta x$$

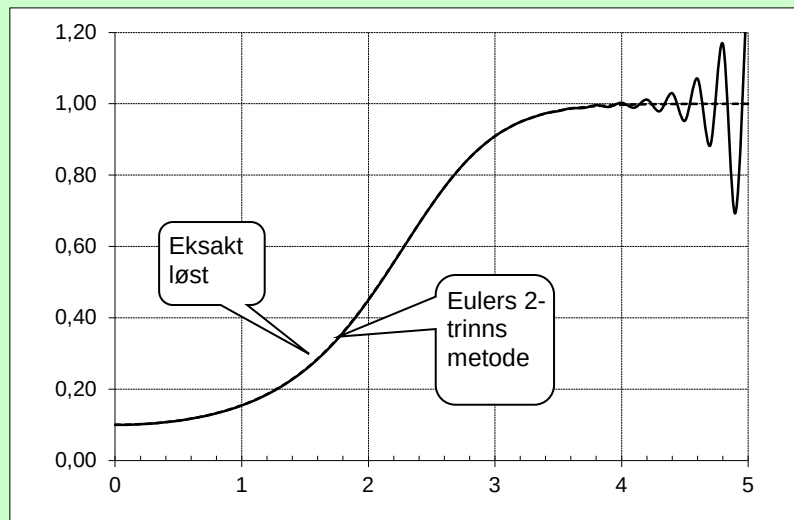
Når vi bruker denne formelen, må vi regne oss fra (x_0, y_0) til (x_1, y_1) med den opprinnelige Eulers formel. Deretter kan vi bruke formelen over til suksessivt å finne y_2, y_3 osv. Dette gjøres greit med regneark, slik neste eksempel viser.

Eksempel 1.6.2: Bruk Eulers to-trinns-metode til å finne en tilnærmet grafisk løsning av differensiallikningen

$$y' = y(1-y)x, \quad y(0) = 0.1.$$

Bruk $\Delta x = 0.1$.

Løsning: Vi bruker et regneark der vi setter opp kolonner på samme måte som i eksempel 1.6.1. Eneste forskjell er at fra og med y_2 bruker vi den reviderte formelen for Eulers 2-trinns metode. Resultatet er vist grafisk nedenfor:



Du ser at den numeriske løsningen er så å si identisk med den eksakte løsningen – helt til ca. $x = 4$. Da inntreffer et lite jordskjelv. Løsningen blir *ustabil*. Dette er et fenomen som kan inntreffe med numeriske løsninger. Fenomenet kan dels skyldes avrundings-unøyaktigheter, dels at vi opererer med *tilnærmede* (ikke eksakte) løsninger. Noen løsningsmetoder er svært følsomme for slike ustabiliteter, mens andre er mer robust. Dette fører til at metoder som tilsynelatende ser tiltalende ut, ved nærmere analyser må arkiveres i nærmeste papirkurv.

I dag brukes metoder som er atskillig mer robuste enn Eulers metoder. Dessverre er de også mye mer arbeidskrevende. Den mest brukte er nok [Runge-Kuttas 4. ordens metode](#). Dette er egentlig en "familie" av metoder som i hovedtrekk går ut på at du finner en midlertidig y -verdi for $x = x_n + \frac{1}{2}\Delta x$, og beregner en verdi for y' i dette punktet. På dette grunnlaget beregner du en *forbedret* verdi av y' , og bruker denne til å finne en ny midlertidig y -verdi for $x = x_n + \frac{1}{2}\Delta x$. Denne bruker du til å finne en ny, ytterligere forbedret verdi av y' . Slik fortsetter du i 4 trinn.

Numerisk løsning av differensiallikninger omfatter mye mer enn det lille vi har fått med her. For eksempel må vi utvikle tilnærmede uttrykk for høyere ordens deriverte. Vi må også kunne løse system av differensiallikninger numerisk. Men hvis du først forstår prinsippene slik de er framstilt her, har du et grunnlag for å forstå de mer avanserte metodene.

2. Bruk av første ordens differensiallikninger.

Differensiallikninger er et svært nyttig redskap innen mange fagområder. Jeg skal nå vise noen anvendelser innen fagområder som en ingeniør kan komme i kontakt med. Oversikten er langt fra komplett. Jeg tar for eksempel ikke med anvendelser innen kjemi eller økonomi.

Jeg forventer ikke at du skal sette deg grundig inn i alle disse anvendelsene nå. Men du bør i alle fall gå gjennom det første punktet om vekstmodeller, bl.a. fordi vi her kommer inn på resonnement og prinsipper som går igjen i mange andre anvendelser også. Ellers kan du velge og vrake ut fra dine interesseområder.

2.1. Vekstmodeller.

Bakgrunn: Anta at vi har en eller annen størrelse x som varierer med tiden t . Vi skriver da $x(t)$. Størrelsen x kan være antall bakterier i en bakteriekoloni, antall dyr i en dyrestand, vekten av et tre, verdien av et hus, eller en rekke andre ting som kan variere med tiden.

La Δx angi økingen av x i løpet av et tidsintervall Δt . Da sier vi at:

$\frac{\Delta x}{\Delta t}$ er den **gjennomsnittlige vekstraten** i tidsrommet Δt .

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$ er den **momentane vekstraten** ved et tidspunkt t .

For å komme videre, må vi vite (eller anta) noe om vekstraten. Det er da naturlig å anta at vekstraten avhenger av x på en eller annen måte, slik at $\frac{dx}{dt} = f(x)$. Men hvordan ser $f(x)$ ut? I eksemplene nedenfor skal vi se på et par vanlige situasjoner. I alle eksemplene skal vi anta at ved start-tidspunktet $t = 0$ er $x = x_0$.

Eksempel 2.1.1: Anta at vekstraten er proporsjonal med x , slik at $\frac{dx}{dt} = k \cdot x$ der k er en konstant.

a) Finn $x(t)$.

b) Illustrer løsningen grafisk når $k = 0.30$.

Løsning: For å finne $x(t)$, må vi løse differensiallikningen

$$\frac{dx}{dt} = k \cdot x, \quad x(0) = x_0.$$

Dette er en separabel likning (vi kan også oppfatte den som lineær). Vi deler på x og multipliserer med dx , og får

$$\frac{dx}{x} = k dt \Leftrightarrow \int \frac{1}{x} dx = \int k dt \Leftrightarrow \ln x = k \cdot t + C_1$$

$$\Leftrightarrow x = e^{k \cdot t + C_1} = e^{k \cdot t} \cdot e^{C_1} = \underline{C e^{k \cdot t}}$$

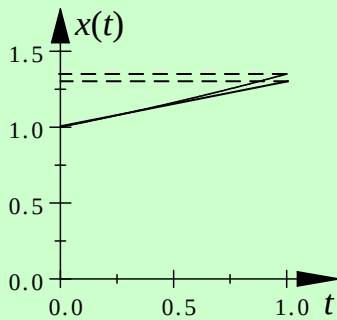
der $C = e^{C_1}$. Finner C :

$$x(0) = x_0 \Leftrightarrow x_0 = Ce^{k \cdot 0} = C \cdot 1 \Leftrightarrow \underline{C = x_0}.$$

Da blir løsningen

$$\underline{x(t) = x_0 e^{k \cdot t}}.$$

Merk at en positiv verdi av k innebærer at x øker, mens en negativ k innebærer at x avtar.



For å se hva dette innebærer når $k = 0.30$ (som svarer til en momentan vekstrate på 30%) tegner vi grafen til venstre. Ved tidspunktet $t = 1$ blir

$$x(1) = x_0 e^{0.30 \cdot 1} \approx \underline{1.35x_0}.$$

Umiddelbart virker dette merkelig. Med en vekstrate på 30% skulle vi vel få

$$x(1) = x_0 + 0.30x_0 = 1.30x_0$$

og ikke $1.35x_0$?

Forklaringen ligger i at tilveksten *hele tiden* legges til verdien av x . Da vil x hele tiden øke, og tilveksten vil også øke hele tiden. Dersom tilveksten *ikke* ble lagt til x under veis, ville vi ganske riktig fått at $x(1) = 1.30x_0$.

Dersom du setter et beløp x_0 i en bank blir tilveksten (renten) kun lagt til beløpet ved hvert årsskifte. Bankene opererer ikke med eksponentiell vekst på innskudd.

Figuren ovenfor (der $x_0 = 1$) illustrerer forskjellen mellom eksponentiell vekst og lineær vekst (forrentning i bank).

Vi oppsummerer hovedpunktet fra dette eksemplet:

Når en størrelse x har konstant vekstrate k slik at x følger differensiallikningen

$$\frac{dx}{dt} = k \cdot x,$$

blir $x(t) = x_0 e^{k \cdot t}$ der x_0 er startverdien for x .

Eksempel 2.1.2: En elgbestand som ikke har vært beskattet, har fordoblet seg i løpet av 10 år. Nå skal en fast andel av bestanden skytes hvert år, slik at bestanden holdes konstant.

- Hvor stor er vekstraten når bestanden ikke beskattes?
- Hvor stor del av bestanden skal skytes for å holde bestanden på konstant nivå?

Løsning: Vi setter bestandsstørrelsen ved starten av tiårsperioden til x_0 . Etter $t = 10$ år er bestanden blitt

$$x(10) = 2x_0.$$

Settes dette inn i likningen fra forrige eksempel, får vi

$$2x_0 = x_0 e^{k \cdot 10} \Leftrightarrow 2 = e^{10k} \Leftrightarrow \ln 2 = 10k \Leftrightarrow k = \frac{\ln 2}{10} \approx \underline{\underline{0.069}}.$$

Den momentane vekstraten er altså på ca. 6.9%.

Når vi skyter en andel c av bestanden, blir det skutt $c \cdot x$ dyr. Vekstraten blir da

$$\frac{dx}{dt} = k \cdot x - c \cdot x.$$

For å holde bestanden konstant, må vi ha at

$$\frac{dx}{dt} = 0.$$

Dette gir at

$$0 = k \cdot x - c \cdot x \Leftrightarrow c = k \approx \underline{\underline{0.069}}.$$

Vi må altså skyte ca. 6.9% av bestanden hvert år for å holde den konstant.

I det lange løp vil den enkle vekstmodellen ovenfor med konstant vekstrate bli urealistisk fordi den fører til at x går mot uendelig. Vi må derfor modifisere denne vekstmodellen. En mye brukt vekstmodell er denne:

En størrelse x som følger differensiallikningen

$$\frac{dx}{dt} = k \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{A}\right)$$

der k og A er konstanter, sies å ha **logistisk vekst**.

For å se hva denne modellen innebærer, kan vi starte med å sette inn $x = A$ i modellen. Da blir $1 - \frac{x}{A} = 0$, slik at vekstraten blir lik null. Dette medfører at x holdes konstant. Altså:

Konstanten A i den logistiske vekstmodellen representerer et stabilt nivå for x .

Men vi kan gjøre flere observasjoner:

- Når $x \ll A$ (symbolet $\ll$ betyr "mye mindre enn") blir $1 - \frac{x}{A} \approx 1$. Da er vi tilbake til vekstmodellen med konstant vekstrate, $\frac{dx}{dt} = k \cdot x$.
- Så lenge $x < A$ blir $1 - \frac{x}{A}$ et positivt tall. Da er vekstraten positiv slik at x vokser.
- Dersom $x > A$ blir $1 - \frac{x}{A}$ et negativt tall. Da er vekstraten negativ slik at x avtar.

Disse observasjonene tyder på at uansett startverdi vil x gå mot A , som da representerer et stabilt nivå. La oss se om løsningen av den tilhørende differensiallikningen bekrefter dette.

Eksempel 2.1.3: Anta at en dyrestand har logistisk vekst. Kall størrelsen av bestanden N og det stabile nivået A . Undersøk hvordan bestanden utvikler seg i disse to tilfellene:

- $N(0) = \frac{1}{2}A$ (start-bestanden er halvparten av det stabile nivået).
- $N(0) = 2A$ (start-bestanden er dobbelt så stor som det stabile nivået).

Skisser grafene til $N(t)$ i begge tilfellene, med $k = 0.10$.

Løsning: Likningen som beskriver bestandsutviklingen er altså

$$\frac{dN}{dt} = k \cdot \left(1 - \frac{N}{A}\right) N.$$

Dette er en separabel likning. Vi ordner og integrerer:

$$\int \frac{dN}{\left(1 - \frac{N}{A}\right) N} = \int k \cdot dt.$$

Integralet på venstre side av likhetstegnet løses med omformingen og delbrøkkoppspaltingen

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{N}{A}\right) N} = \frac{1}{\left(1 - \frac{N}{A}\right) N} \cdot \frac{A}{A} = \frac{A}{(A - N) N} = \frac{1}{N} + \frac{1}{A - N}$$

(detaljer er utelatt). Vi integrerer på venstre side av likhetstegnet, og får:

$$\int \frac{dN}{\left(1 - \frac{N}{A}\right) N} = \int \frac{1}{N} dN + \int \frac{1}{A - N} dN$$

Det første integralet er greit:

$$\int \frac{1}{N} dN = \ln N.$$

Integrasjonskonstanten kommer senere. Absoluttverditegn er unødvendig fordi $N > 0$.

For å løse det andre integralet, substituerer jeg

$$u = A - N \quad \Leftrightarrow \quad \frac{du}{dN} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad dN = -du$$

Da blir

$$\int \frac{1}{A - N} dN = \int \frac{-du}{u} = -\ln|u| = -\ln|A - N|$$

Samler trådene, og integrerer også høyre side av likhetstegnet:

$$\int \frac{dN}{\left(1 - \frac{N}{A}\right) N} = \int \frac{1}{N} dN + \int \frac{1}{A - N} dN = \ln|N| - \ln|A - N| = k \cdot t + C_1$$

$$\Leftrightarrow \ln \left| \frac{N}{A - N} \right| = k \cdot t + C_1 \quad \Leftrightarrow \quad \left| \frac{N}{A - N} \right| = e^{k \cdot t + C_1} = e^{k \cdot t} \cdot e^{C_1} = \underline{C e^{k \cdot t}}$$

Så lenge vi ikke vet fortegnet til $A - N$ må vi beholde absoluttverditegnet. Men nå kan vi sløyfe absoluttverditegnet og la konstanten C få samme fortegn som brøken $\frac{N}{A - N}$.

Løsningen blir altså

$$\frac{N}{A - N} = C e^{kt} \quad \Leftrightarrow \quad N = (A - N) C e^{kt} \quad \Leftrightarrow \quad N = A C e^{kt} - N C e^{kt}.$$

Samler alle leddene med N på venstre side:

$$N + NCe^{kt} = ACe^{kt} \Leftrightarrow N(1 + Ce^{kt}) = ACe^{kt} \Leftrightarrow N = \frac{ACe^{kt}}{1 + Ce^{kt}}.$$

Dette kan omformes til en gunstigere form ved å multiplisere teller og nevner med e^{-kt} og dele teller og nevner med C . Da får vi

$$N(t) = \frac{A}{\frac{1}{C}e^{-kt} + 1}.$$

Av dette uttrykket ser vi at når $t \rightarrow \infty$ vil $e^{-kt} \rightarrow 0$, slik at $N \rightarrow A$. Dette stemmer med at A skal være det stabile nivået.

Nå ser vi på de to tilfellene:

a) $N(0) = \frac{1}{2}A$. Setter inn i løsningen, og får:

$$N(0) = \frac{1}{2}A = \frac{A}{\frac{1}{C}e^0 + 1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{\frac{1}{C} + 1} \Leftrightarrow \frac{1}{C} + 1 = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{C} = 1 \Leftrightarrow \underline{C = 1}$$

Løsningen blir da

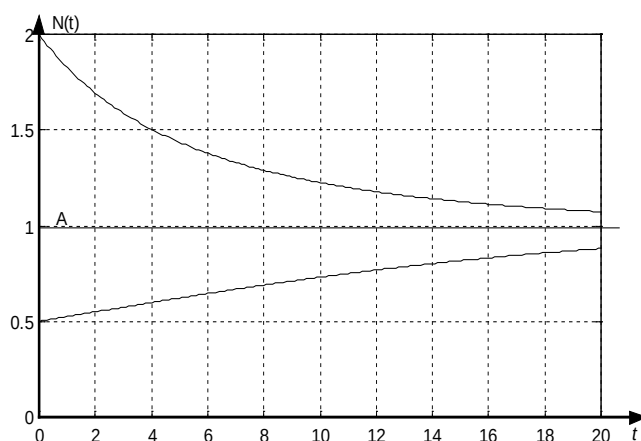
$$N(t) = \frac{A}{\frac{1}{1}e^{-kt} + 1} = \frac{A}{1 + e^{-kt}}.$$

b) $N(0) = 2A$. Setter inn i løsningen, og får:

$$\begin{aligned} N(0) = 2A &= \frac{A}{\frac{1}{C}e^0 + 1} \Leftrightarrow 2 = \frac{1}{\frac{1}{C} + 1} \Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{C} + 1\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{C} + 1 = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{C} &= \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \underline{C = -2} \end{aligned}$$

Løsningen blir da

$$N(t) = \frac{A}{\frac{1}{-2}e^{-kt} + 1} = \frac{A}{1 - \frac{1}{2}e^{-kt}}$$



Grafen til venstre viser utviklingen av $N(t)$ i de to tilfellene (med $A=1$ og $k=0.1$).

Vi ser hvordan $N(t) \rightarrow A$ når $t \rightarrow \infty$ i begge tilfellene.

2.2. Radioaktiv nedbrytning.

Bakgrunn: Anta at vi ved et tidspunkt t har $N(t)$ ustabile atomkjerner. At kjernen er *ustabil*, innebærer at den kan sende ut en α -partikkel, en β -partikkel eller γ -stråling. Dermed vil kjernen gå over i en annen (ofte stabil) tilstand. Denne prosessen kalles *radioaktiv nedbryting* eller *desintegrasjon*.

All erfaring tyder på at antall kjerner ΔN som nedbrytes i løpet av et kort tidsintervall Δt , er proporsjonal med antall ustabile kjerner $N(t)$, og proporsjonal med lengden av tidsintervallet Δt dersom dette er tilstrekkelig lite. Matematisk formulert:

$$\Delta N = -k \cdot N(t) \cdot \Delta t$$

der k er en proporsjonalitetskonstant. Merk minustegnet, som viser at antall ustabile kjerner *avtar*. Dette kan omformes til

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -k \cdot N(t)$$

Så lar vi $\Delta t \rightarrow 0$. Da får vi

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{dN}{dt} = -k \cdot N(t) \quad (2.2.1)$$

som er den fundamentale likningen for radioaktiv nedbrytning. Dette rammer vi inn:

Dersom vi har N ustabile atomkjerner, har vi at

$$\frac{dN}{dt} = -k \cdot N$$

der k er en konstant mens t er tiden.

Eksempel 2.2.1: Løs differensiallikningen (2.2.1).

Løsning: Dette er en separabel likning (den kan også oppfattes som lineær, men det gir mer kompliserte regninger). Vi omformer da likningen slik:

$$\frac{dN}{dt} = -k \cdot N(t) \Leftrightarrow \frac{dN}{N} = -k \cdot dt$$

Så integrerer vi begge sider:

$$\begin{aligned} \int \frac{dN}{N} &= \int -k \cdot dt \Leftrightarrow \ln N = -k \cdot t + C_1 \\ \Leftrightarrow N(t) &= e^{-k \cdot t + C_1} = e^{-k \cdot t} \cdot e^{C_1} = e^{-k \cdot t} \cdot C \end{aligned}$$

der $C = e^{C_1}$. For å finne C benytter vi at ved tidspunktet $t = 0$ starter vi med N_0 ustabile kjerner:

$$N_0 = e^{-k \cdot 0} \cdot C \Leftrightarrow \underline{C = N_0}.$$

Dette gir at

$$\underline{\underline{N(t) = N_0 e^{-k \cdot t}}}.$$

Dette resultatet kan bearbejdes videre som neste eksempel viser.

Eksempel 2.2.2: Et radioaktivt grunnstoff har *halveringstid* T (d.v.s. at det tar en tid T før halvparten av de ustabile kjernene er desintegrert). Finn en sammenheng mellom konstanten k i likning 2.2.1 og halveringstiden T .

Løsning: Fra eksempel 2.2.1 har vi sammenhengen

$$N(t) = N_0 e^{-k \cdot t}.$$

Når $t = T$ er $N(T) = \frac{1}{2} N_0$. Settes dette inn, får vi

$$\frac{1}{2} N_0 = N_0 e^{-k \cdot T} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-k \cdot T} \Leftrightarrow -k \cdot T = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$$

slik at

$$k \cdot T = \ln 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{k = \frac{\ln 2}{T}}}$$

Likningen for radioaktiv nedbryting kan altså skrives

$$N(t) = N_0 e^{-k \cdot t} = N_0 e^{-\frac{\ln 2}{T} t} = N_0 \left(e^{-\ln 2} \right)^{\frac{t}{T}} = N_0 \left((e^{\ln 2})^{-1} \right)^{\frac{t}{T}} = N_0 \left(2^{-1} \right)^{\frac{t}{T}} = \underline{\underline{N_0 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}}}.$$

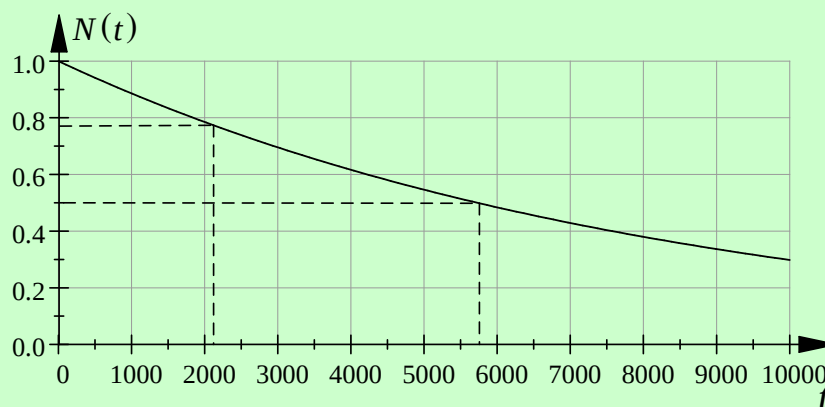
Dette resultatet har stor praktisk betydning. Eksemplet nedenfor viser en anvendelse.

Eksempel 2.2.3: Alle levende organismer, planter så vel som dyr, inneholder karbonatomer. En viss andel av disse er den radioaktive isotopen ^{14}C . Man antar at denne andelen har holdt seg konstant i tusenvis av år. Når organismen dør, stopper opptaket av karbon. Andelen av ^{14}C avtar da gradvis fordi disse atomene desintegrerer. C14-metoden for datering av dødt biologisk materiale går ut på å sammenlikne andelen av ^{14}C i det døde materialet med den mengden av ^{14}C som finnes i levende vev. En slik analyse av et trestykke viser at mengden av ^{14}C er redusert til 77% av tilsvarende mengde i levende trevirke. Hvor lang tid er gått siden treet døde når halveringstiden for ^{14}C er 5730 år?

Løsning: Fra eksempel 2.2.2 og de gitte opplysningene har vi

$$\begin{aligned} N(t) &= N_0 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}} \Leftrightarrow 0.77 N_0 = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{5730}} \Leftrightarrow \ln(0.77) = \frac{t}{5730} \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ \Leftrightarrow t &= 5730 \cdot \frac{\ln(0.77)}{\ln(0.5)} \approx \underline{\underline{2160}} \end{aligned}$$

Det er altså gått 2160 år siden treet stoppet å oppta karbon fra lufta. Figuren nedenfor viser tidsforløpet.



2.3. Massebalanse.

Bakgrunn: Anta at et volum ΔV (målt i m^3 eller liter) med masse Δm (målt i kg) av et stoff strømmer forbi et tverrsnitt av en ledning i løpet av en kort tid Δt .

Da har vi:

$$\text{En volumstrøm} \quad q = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt}$$

$$\text{En massestrøm} \quad c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{dm}{dt}$$

Nå vet vi at massetettheten er

$$\rho = \frac{m}{V} \Leftrightarrow m = \rho \cdot V.$$

Dersom vi har med væsker eller fast stoff å gjøre, kan vi anta at tettheten ρ er konstant. Da er

$$c = \frac{dm}{dt} = \frac{d(\rho V)}{dt} = \rho \frac{dV}{dt} \Leftrightarrow c = \rho \cdot q.$$

Dersom vi har en massestrøm c_{inn} (målt i kg/sekund) inn i en beholder, og en massestrøm c_{ut} (også målt i kg/sekund) ut av beholderen, får vi i løpet av en (kort) tid Δt en masse-endering Δm i beholderen som er gitt ved

$$\Delta m = (c_{\text{inn}} - c_{\text{ut}}) \cdot \Delta t \Leftrightarrow \frac{\Delta m}{\Delta t} = c_{\text{inn}} - c_{\text{ut}}.$$

Så lar vi $\Delta t \rightarrow 0$, og får

$$\frac{dm}{dt} = c_{\text{inn}} - c_{\text{ut}} \quad (2.3.1)$$

der m er massen i beholderen.

Dersom tettheten ρ er konstant og V er volumet av stoffet i beholderen, kan likning 2.3.1 omformes til

$$c_{\text{inn}} - c_{\text{ut}} = \frac{dm}{dt} = \frac{d(\rho V)}{dt} = \rho \frac{dV}{dt} \Leftrightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{c_{\text{inn}}}{\rho} - \frac{c_{\text{ut}}}{\rho} = q_{\text{inn}} - q_{\text{ut}}. \quad (2.3.2)$$

Eksempel 2.3.1: En vannbeholder har konstant horisontalt tverrsnitt $F = 0.01 \text{ m}^2$. Det står $H = 1.00 \text{ m}$ vann i beholderen. Ved tidspunktet $t = 0$ trekker du ut en propp i bunnen av beholderen, og vannet begynner å strømme ut. Det er ingen innstrømming. Etter 40 sekunder er beholderen tom. Anta at utstrømmingen følger *Torricellis lov*:

$$q_{\text{ut}} = A \cdot \sqrt{y}$$

der A er en konstant (som bl.a. avhenger av størrelsen av åpningen) og y er høyden av vannet i beholderen.

- Sett opp en differensiallikning for y , og løs denne for å finne y som funksjon av t .
- Bestem A .
- Hvor lang tid tok det før vann-nivået i beholderen under tømningen var sunket til 0.25 m ?

Løsning:

a) Når vannhøyden er y , er vann-volumet $V = F \cdot y$. Av 2.3.2 får vi at

$$\frac{dV}{dt} = q_{\text{inn}} - q_{\text{ut}} \Leftrightarrow F \cdot \frac{dy}{dt} = 0 - A \cdot \sqrt{y} \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{A}{F} \sqrt{y}.$$

Dette er en separabel differensiallikning, som løses på vanlig måte:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = -\int \frac{A}{F} dt \Leftrightarrow 2\sqrt{y} = -\frac{A}{F}t + C.$$

Finner C :

$$y(0) = H \Leftrightarrow 2\sqrt{H} = -\frac{A}{F} \cdot 0 + C \Leftrightarrow C = 2\sqrt{H}.$$

Da blir

$$2\sqrt{y} = 2\sqrt{H} - \frac{A}{F}t \Leftrightarrow y = \left(\sqrt{H} - \frac{A}{2F}t \right)^2.$$

Setter vi inn kjente data, får vi

$$y = \left(1 - \frac{A}{0.02}t \right)^2.$$

b) Vi vet at $y = 0$ når $t = 40$. Setter inn dette, og får

$$0 = \left(1 - \frac{A}{2 \cdot 0.01} \cdot 40 \right)^2 \Leftrightarrow A = \frac{0.02}{40} = 5.0 \cdot 10^{-4}.$$

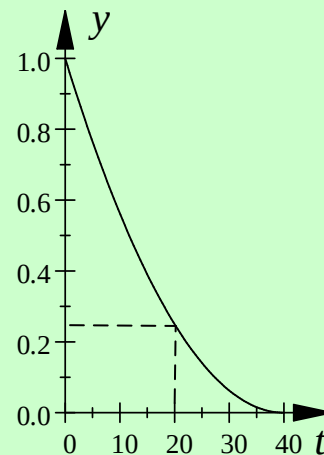
Settes denne verdien inn i uttrykket for y , får vi

$$y = \left(1 - \frac{5.0 \cdot 10^{-4}}{0.02}t \right)^2 = (1 - 0.025t)^2$$

når $0 \leq t \leq 40$.

c) Når $y = 0.25$, får vi

$$\begin{aligned} 0.25 &= (1 - 0.025t)^2 \Leftrightarrow \sqrt{0.25} = 1 - 0.025t \\ \Leftrightarrow 0.025t &= 1 - 0.5 \Leftrightarrow t = 20 \end{aligned}$$



En annen aktuell problemstilling går ut på å studere konsentrasjonen av et eller annet stoff i en væske. La konsentrasjonen av stoffet i den væsken som strømmer inn i beholderen være k (målt i kg/m^3 væske). Når volumstrømmen av væske (med oppløst stoff) inn i beholderen er q_{inn} , blir massestrømmen av stoffet inn i beholderen

$$c_{\text{inn}} = k \cdot q_{\text{inn}} \text{ (målt i } \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = \frac{\text{kg}}{\text{s}} \text{)}.$$

Konsentrasjonen i den utstrømmende væsken settes gjerne lik konsentrasjonen i væsken i beholderen. Dersom volumet av væsken i beholderen er V og massen av stoffet som er oppløst i væsken er m , blir massestrømmen ut av beholderen

$$c_{\text{ut}} = \frac{m}{V} \cdot q_{\text{ut}} \text{ (fremdeles målt i } \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = \frac{\text{kg}}{\text{s}} \text{)}.$$

Settes dette inn i 2.3.1, får vi

$$\frac{dm}{dt} = k \cdot q_{\text{inn}} - \frac{m}{V} \cdot q_{\text{ut}} \quad (2.3.3)$$

Eksempel 2.3.2: En vannbeholder inneholder $V = 100$ liter vann der det er oppløst $m_0 = 5.00$ kg salt. Beholderen er da helt full. Så tilfører vi 0.50 liter rent vann pr sekund. En tilsvarende mengde saltoppløsning renner da ut. Finn saltmengden m i beholderen som funksjon av tiden t .

Løsning: Vi bruker likning 2.3.3 med $k = 0$, $V = 100$ og $q_{\text{ut}} = q_{\text{inn}} = 0.50$. Vi får

$$\frac{dm}{dt} = 0 - \frac{m}{100} \cdot 0.50 \Leftrightarrow \frac{dm}{dt} = -0.005m, \quad m(0) = 5.00.$$

Vi separerer likningen og løser den:

$$\begin{aligned} \frac{dm}{m} &= -0.005dt \Leftrightarrow \int \frac{dm}{m} = -0.005 \int dt \Leftrightarrow \ln m = -0.005t + C_1 \\ m &= e^{-0.005t + C_1} = \underline{Ce^{-0.005t}}. \end{aligned}$$

Finner C ved å benytte at $m = 5.00$ når $t = 0$:

$$5.00 = Ce^{-0.005 \cdot 0} \Leftrightarrow \underline{C = 5.00}.$$

Da blir

$$m(t) = \underline{\underline{5.00e^{-0.005t}}}.$$

2.4. Rettlinjet bevegelse.

Bakgrunn: Anta at en partikkel som beveger seg langs en rett linje befinner seg i posisjon $x(t)$ ved tidspunktet t . Dersom partikkelen i løpet av et kort tidsrom Δt har flyttet seg en strekning Δx , er gjennomsnittsfarten på strekningen

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Den *momentane* farten ved tidspunktet t blir da

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \quad (2.4.1)$$

På samme måte kan vi definere *akselerasjon*: Anta at farten øker med Δv i løpet av et kort tidsrom Δt . Gjennomsnittlig akselerasjon i dette tidsrommet blir da

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Den *momentane* akselerasjonen ved tidspunktet t blir da

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (2.4.2)$$

For å bestemme akselerasjonen a brukes gjerne Newtons 2. lov:

$$F = m \cdot a \quad (2.4.3)$$

der F er summen av kreftene i bevegelsesretningen og m er partikkelens masse. Dersom F er konstant, eller vi kjenner F som funksjon av v , kan vi kombinere Newtons 2. lov (2.4.3) med 2.4.2 slik:

$$F(v) = m \cdot a = m \cdot \frac{dv}{dt}.$$

Dermed har vi en differensiallikning som vi kan finne v av. Når v er kjent, kan vi bruke 2.4.1 til å sette opp en differensiallikning som vi kan finne x av.

Eksempel 2.4.1: En fallskjermhopper med masse m og fart v påvirkes av to krefter:

Tyngdekraften $F_g = -m \cdot g$ der $g \approx 9.81 \text{ m/s}^2$ er tyngdens akselerasjon.

Luftmotstand $F_R = -k \cdot v$ der k er en konstant som vesentlig avhenger av skjermens størrelse og konstruksjon.

Merk at positiv retning er oppover.

- Anta at startfarten til hopperen er $v(0) = 0$. Sett opp og løs en differensiallikning som gir farten $v(t)$ til hopperen.
- Hopperen starter i en høyde h_0 over bakken. Finn hopperens høyde $y(t)$.
- Hva skjer med løsningen i a) når $t \rightarrow \infty$?

Løsning:

- a) Av Newtons 2. lov (2.4.3) får vi

$$F = m \cdot a \Leftrightarrow -k \cdot v - m \cdot g = m \cdot \frac{dv}{dt} \quad (2.4.4)$$

Dette er en lineær første ordens differensiallikning som ordnes slik:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = -g.$$

Finner først

$$F(t) = \int \frac{k}{m} dt = \frac{k}{m}t$$

som videre gir

$$\begin{aligned} v(t) &= e^{-F(t)} \left(\int g(t) \cdot e^{F(t)} dt + C \right) = e^{-\frac{k}{m}t} \left(\int -g \cdot e^{\frac{k}{m}t} dt + C \right) \\ &= e^{-\frac{k}{m}t} \left(-g \cdot \frac{m}{k} e^{\frac{k}{m}t} + C \right) = -\frac{mg}{k} + C e^{-\frac{k}{m}t} \end{aligned}$$

Finner C :

$$v(0) = 0 \Leftrightarrow -\frac{mg}{k} + C e^0 = 0 \Leftrightarrow C = \frac{mg}{k}.$$

Da blir

$$v(t) = -\frac{mg}{k} + \frac{mg}{k} e^{-\frac{k}{m}t} = -\frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right).$$

Siden $e^{-\frac{k}{m}t}$ alltid er mindre enn 1, blir v negativ. Dette stemmer med at vi har valgt positiv retning *oppover*, mens fallskjermhopperen faller *nedover*.

b) Av 2.4.1 får vi nå

$$v = \frac{dy}{dt} \Leftrightarrow -\frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) = \frac{dy}{dt}.$$

Dette er en separabel differensiallikning, som omformes til

$$dy = -\frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) dt.$$

Integrerer:

$$y = \int -\frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) dt = -\frac{mg}{k}t - \frac{m^2g}{k^2}e^{-\frac{k}{m}t} + C.$$

Finner C:

$$y(0) = h_0 \Leftrightarrow -\frac{mg}{k} \cdot 0 - \frac{m^2g}{k^2}e^0 + C = h_0 \Leftrightarrow C = h_0 + \frac{m^2g}{k^2}.$$

Dette gir

$$y(t) = -\frac{mg}{k}t - \frac{m^2g}{k^2}e^{-\frac{k}{m}t} + h_0 + \frac{m^2g}{k^2} = h_0 - \frac{mg}{k}t + \frac{m^2g}{k^2} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

c) Når $t \rightarrow \infty$ vil $e^{-\frac{k}{m}t} \rightarrow 0$. I formelen for farten får vi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) \right) = -\frac{mg}{k}.$$

Farten blir altså konstant. Men ved denne farten er luftmotstanden

$$F_R = -k \cdot v = -k \left(-\frac{mg}{k} \right) = mg.$$

Vi ser altså at når $t \rightarrow \infty$, får vi en konstant fart som fører til at luftmotstanden er lik tyngdekraften, men med motsatt retning (motsatt fortegn).

Dette innebærer at kraftsummen

$$F_g + F_R = 0,$$

som videre fører til at akselerasjonen blir lik null og farten blir konstant.

La oss se nærmere på situasjonen i del c av eksemplet ovenfor, der farten går mot en konstant verdi når $t \rightarrow \infty$. Denne konstante farten kalles gjerne *terminalfarten*. Dersom det eksisterer en slik konstant fart, finner vi den ved å sette $\frac{dv}{dt} = 0$. I eksemplet ovenfor finner vi terminalfarten v_t slik:

$$-k \cdot v_s - m \cdot g = 0 \Leftrightarrow v_s = -\frac{mg}{k}.$$

Vi kan i mange tilfeller bruke denne terminalfarten til å forenkle differensiallikningen, ved at vi innfører en ny variabel $u = v_t - v$ eller $u = v - v_t$. Dersom vi innfører en ny variabel

$$u = v - v_t = v - \left(-\frac{mg}{k} \right) \Leftrightarrow v = u - \frac{mg}{k} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{du}{dt}$$

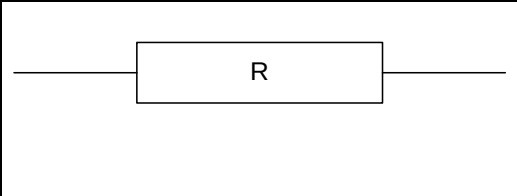
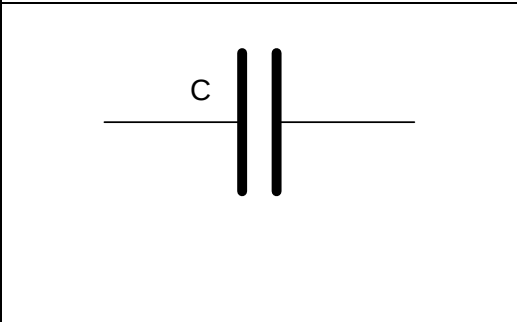
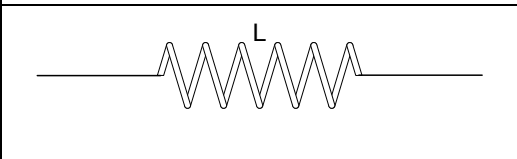
i vår differensiallikning, får vi

$$-k \cdot \left(u - \frac{mg}{k} \right) - m \cdot g = m \cdot \frac{du}{dt} \Leftrightarrow m \cdot \frac{du}{dt} + k \cdot u = 0.$$

Denne likningen kan oppfattes både som lineær og som separabel, og er mye lettere å løse enn den opprinnelige likningen.

2.5. Elektrisitetstære.

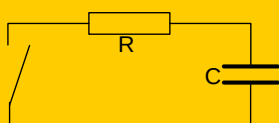
Bakgrunn: Elektriske kretser er i hovedsak bygd opp av motstander, kondensatorer og spoler, samt strøm- og spenningskilder. De viktigste lovene som gjelder for slike kretser er:

	Dersom det går en strøm I gjennom en motstand med resistens R, så er spenningen U_R over motstanden gitt ved $U_R = R \cdot I.$
	Dersom en kondensator med kapasitans C er koplet inn i en krets der strømmen er I, så er spenningen U_C over kondensatoren ved tidspunktet t gitt ved $U_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t I(\tau) d\tau + U_C(0)$ der $U_C(0)$ er spenningen over kondensatoren ved $t = 0$.
	Dersom det går en strøm I gjennom en spole med induktans L, så er spenningen U_L over spolen gitt ved $U_L = L \cdot \frac{dI}{dt}.$

Dessuten gjelder *Kirchhoffs lover*:

1. Summen av alle strømmen inn mot et knutepunkt (regnet med fortegn) er lik null.
2. Summen av alle spenningsfall i en lukket krets (regnet med fortegn) er lik null.

Eksempel 2.5.1: (Utladning av en kondensator).



En motstand og en kondensator er koplet sammen med en bryter slik figuren til venstre viser. Ved tidspunktet $t = 0$ slås bryteren på slik at kondensatoren og motstanden utgjør en lukket krets.

Idet kretsen lukkes, er spenningen over kondensatoren $U_C(0) = 5$.

Finn spenningen over kondensatoren som funksjon av tiden mens kondensatoren utlades gjennom motstanden.

Løsning: Når bryteren er lukket slik at vi har en lukket krets, gir Kirchhoffs spenningslov at

$$U_R + U_C = 0 \Leftrightarrow R \cdot I + \frac{1}{C} \int_0^t I(\tau) d\tau = 0.$$

Nå er det vanlig å derivere denne likningen for å bli kvitt integralet. Vi får da

$$R \cdot \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \cdot I(t) = 0.$$

Denne differensiallikningen løses enklest ved å oppfatte den som separabel (vi kan også oppfatte den som lineær):

$$\frac{dI}{I} = -\frac{1}{R \cdot C} dt$$

Integrerer på begge sider, og får

$$\ln I = -\frac{1}{R \cdot C} t + K_1 \Leftrightarrow I(t) = e^{-\frac{1}{R \cdot C} t + K_1} = e^{K_1} \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} t} = \underline{K e^{-\frac{1}{R \cdot C} t}}$$

der jeg kaller integrasjonskonstanten K_1 og setter $K = e^{K_1}$. For å finne K , benytter jeg at

$$R \cdot I(0) + U_C(0) = 0 \Leftrightarrow R \cdot K e^0 + 5 = 0 \Leftrightarrow \underline{K_1 = -\frac{5}{R}}$$

slik at

$$\underline{I(t) = -\frac{5}{R} e^{-\frac{1}{R \cdot C} t}}$$

Spenningen over kondensatoren finnes nå enklest ved å benytte at

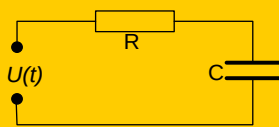
$$U_R(t) + U_C(t) = 0 \Leftrightarrow U_C(t) = -U_R(t) = -R \cdot I(t) = -R \cdot \left(-\frac{5}{R} e^{-\frac{1}{R \cdot C} t} \right) = \underline{\underline{5 e^{-\frac{1}{R \cdot C} t}}}.$$

Vi kunne også benyttet at

$$\begin{aligned} U_C(t) &= \frac{1}{C} \int_0^t I(\tau) d\tau + U_C(0) = \frac{1}{C} \int_0^t -\frac{5}{R} e^{-\frac{1}{R \cdot C} \tau} d\tau + 5 = \frac{-5}{R \cdot C} \cdot (-R \cdot C) \left[e^{-\frac{1}{R \cdot C} \tau} \right]_0^t + 5 \\ &= 5 \left(e^{-\frac{1}{R \cdot C} t} - 1 \right) + 5 = \underline{\underline{5 e^{-\frac{1}{R \cdot C} t}}} \end{aligned}$$

Eksempel 2.5.2:

(Vekselspanning gjennom en kondensator).



En motstand og en kondensator er koplet sammen med en spenningskilde slik figuren til venstre viser. Her er $U(t)$ spenningen over en ytre spenningskilde.

Finn spenningen $U_C(t)$ over kondensatoren når $U(t) = \sin(\omega t)$, $U_C(0) = 0$.

Løsning: Vi starter som i forrige eksempel med å sette opp Kirchhoffs spenningslov:

$$U_C(t) + U_R(t) = U(t) \Leftrightarrow R \cdot I(t) + \frac{1}{C} \int_0^t I(\tau) d\tau + U_C(0) = \sin(\omega t)$$

Som i forrige eksempel deriverer vi likningen for å bli kvitt integralet, og får

$$R \cdot \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \cdot I(t) = \omega \cdot \cos(\omega t) \Leftrightarrow \frac{dI}{dt} + \frac{1}{R \cdot C} I = \frac{\omega}{R} \cos(\omega t)$$

Dette er en lineær differensiallikning som løses etter standard oppskrift. Finner først

$$F(t) = \int \frac{1}{R \cdot C} dt = \frac{1}{R \cdot C} t.$$

Da blir

$$I(t) = e^{-F(t)} \left(\int g(t) \cdot e^{F(t)} dt + K \right) = e^{-\frac{1}{R \cdot C} t} \left(\int \frac{\omega}{R} \cos(\omega t) e^{\frac{1}{R \cdot C} t} dt + K \right)$$

Ved å benytte den metoden som ble gjennomgått i kap. 1.6.2 i heftet om Integrasjon, kan vi vise at

$$\int e^{\alpha t} \cos(\omega t) dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \omega^2} (\omega \sin(\omega t) + \alpha \cos(\omega t)) + K.$$

Setter vi nå inn $\alpha = \frac{1}{R \cdot C}$, får vi at

$$\begin{aligned} I(t) &= e^{-\frac{1}{RC}t} \left(\frac{\omega}{R \left(\left(\frac{1}{R \cdot C} \right)^2 + \omega^2 \right)} (\omega \sin(\omega t) + \frac{1}{R \cdot C} \cos(\omega t)) + K \right) \\ &= \frac{\omega}{R \left(\left(\frac{1}{R \cdot C} \right)^2 + \omega^2 \right)} (\omega \sin(\omega t) + \frac{1}{R \cdot C} \cos(\omega t)) + K e^{-\frac{1}{RC}t} \end{aligned}$$

Spenningen over motstanden blir nå

$$U_R(t) = R \cdot I(t) = \frac{\omega}{\left(\left(\frac{1}{R \cdot C} \right)^2 + \omega^2 \right)} (\omega \sin(\omega t) + \frac{1}{R \cdot C} \cos(\omega t)) + R \cdot K e^{-\frac{1}{RC}t}$$

slik at spenningen over kondensatoren blir

$$U_C(t) = U(t) - U_R(t) = \sin(\omega t) - \frac{\omega}{\left(\left(\frac{1}{R \cdot C} \right)^2 + \omega^2 \right)} (\omega \sin(\omega t) + \frac{1}{R \cdot C} \cos(\omega t)) - R \cdot K e^{-\frac{1}{RC}t}.$$

Før vi forenkler dette uttrykket, skal vi finne konstanten K ved å benytte at

$$U_C(0) = 0 \Leftrightarrow 0 - \frac{\omega}{\left(\left(\frac{1}{R \cdot C} \right)^2 + \omega^2 \right)} \left(0 + \frac{1}{R \cdot C} \cdot 1 \right) - R \cdot K \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow R \cdot K = \frac{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot \omega}{\left(\left(\frac{1}{R \cdot C} \right)^2 + \omega^2 \right)}.$$

Vi setter inn dette uttrykket i det siste leddet, samtidig som vi trekker sammen de to sinusleddene. Da får vi

$$\begin{aligned} U_C(t) &= \left(1 - \frac{\omega^2}{\left(\left(\frac{1}{R \cdot C} \right)^2 + \omega^2 \right)} \right) \sin(\omega t) - \frac{\left(\frac{1}{R \cdot C} \right) \cdot \omega}{\left(\left(\frac{1}{R \cdot C} \right)^2 + \omega^2 \right)} \cos(\omega t) + \frac{\frac{1}{R \cdot C} \cdot \omega}{\left(\left(\frac{1}{R \cdot C} \right)^2 + \omega^2 \right)} e^{-\frac{1}{RC}t} \\ &= \frac{\frac{1}{R \cdot C}}{\left(\left(\frac{1}{R \cdot C} \right)^2 + \omega^2 \right)} \left(\frac{1}{R \cdot C} \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t) + \omega e^{-\frac{1}{RC}t} \right) \end{aligned}$$

I heftet om "grunnleggende funksjonslære" viste vi hvordan de to første leddene inne i parentesene kan omformes til

$$A \sin(\omega t - \varphi)$$

der

$$A = \sqrt{\left(\frac{1}{R \cdot C} \right)^2 + \omega^2}$$

og $\varphi = \arctan(\omega \cdot RC)$.

Videre ser vi at leddet $e^{-\frac{1}{RC}t} \rightarrow 0$ når $t \rightarrow \infty$. Så snart vi kan neglisjere dette leddet, kan altså løsningen skrives

$$U_C(t) = \frac{\frac{1}{R \cdot C}}{\left(\left(\frac{1}{R \cdot C} \right)^2 + \omega^2 \right)} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{R \cdot C} \right)^2 + \omega^2} \sin(\omega t - \varphi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{R \cdot C} \right)^2}} \sin(\omega t - \varphi).$$

Dette er en sinus-svingning med amplitude

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{R \cdot C} \right)^2}}$$

som er forsinket en tid $T = \frac{\varphi}{\omega}$ i forhold til den påtrykte spenningen.

2.6. Varmetransport.

Bakgrunn: Varmetransport er et stort og komplisert fagfelt. Her skal vi kun se på en liten flik av dette fagfeltet. Vi skal ta for oss et legeme som har temperatur T , mens omgivelsene rundt legemet har temperatur T_0 . Eksperimenter viser at dersom legemet ikke tilføres energi på annen måte enn ved kontakt med omgivelsene, vil *temperaturendringen* ΔT i legemet i et kort tidsintervall Δt være proporsjonal med temperaturforskjellen mellom legemet og omgivelsene, og proporsjonal med Δt . Vi skal la T (stor bokstav) stå for *temperatur*, mens t (liten bokstav) står for *tid*. Da får vi:

$$\Delta T = -k(T - T_0)\Delta t$$

Proporsjonalitetsfaktoren k avhenger av legemets størrelse og varmekapasitet, og av størrelse og termiske egenskaper for grenseflaten mellom legemet og omgivelsene. Disse sammenhengene skal vi ikke komme inn på nå. Minustegnet skyldes at temperaturen i legemet *avtar* når $T > T_0$ slik at legemet avgir varme, mens temperaturen *øker* når $T < T_0$ slik at legemet mottar varme.

Vi skal videre anta at legemet har samme temperatur T over alt. I praksis er dette lite realistisk, fordi det alltid vil være en varmetransport inne i legemet, og en slik varmetransport krever en temperaturforskjell. Men dersom temperaturen endres langsomt, eller dersom vi har en væske eller gass med omrøring, kan vi bruke denne antakelsen.

Nå lar vi $\Delta t \rightarrow 0$. Da kan likningen ovenfor skrives på formen

$$dT = -k(T - T_0)dt \Leftrightarrow \frac{dT}{dt} = -k(T - T_0).$$

Dette er den grunnleggende likningen for varmetransport. Vi rammer den derfor inn:

Dersom temperaturen i et legeme er T , og omgivelsestemperaturen er T_0 , har vi at

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0)$$

der t er tiden mens k er en konstant som avhenger av fysiske egenskaper ved legemet og omgivelsene.

I eksemplene nedenfor skal vi se på to anvendelser av denne likningen.

Eksempel 2.6.1: En melkekartong har stått lenge i kjøleskapet, slik at temperaturen i melka er blitt 5.0°C . Den tas ut av kjøleskapet, og settes i et rom der temperaturen er konstant lik 20°C . Etter å ha stått i rommet i 30 minutter, er temperaturen i melka blitt 8.0°C .

- Finn temperaturen T i melka som funksjon av tiden t .
- Hvor lang tid tar det før temperaturen i melka er steget til 17°C ?

Løsning: Starter med å løse differensiallikningen, og benytter da at omgivelsestemperaturen T_0 er konstant lik 20°C . Får da:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0) \Leftrightarrow \frac{dT}{T - T_0} = -k dt$$

Dette integreres:

$$\int \frac{dT}{T - T_0} = \int -k dt \Leftrightarrow \ln|T - T_0| = -k \cdot t + C_1$$

$$|T - T_0| = e^{-k \cdot t + C_1} = e^{-k \cdot t} \cdot e^{C_1} = C e^{-k \cdot t}$$

der $C = e^{C_1}$. Nå må vi benytte de kjente opplysningene:

Når $t = 0$, er $T = 5^\circ\text{C}$. Setter dette inn i løsningen (og ser bort fra benevninger), og får

$$|5 - 20| = C e^{-k \cdot 0} \Leftrightarrow |-15| = C \cdot 1 \Leftrightarrow \underline{C = 15}$$

Siden $T < T_0$, er

$$|T - T_0| = -(T - T_0) = -T + T_0 = -T + 20,$$

slik at

$$|T - T_0| = C e^{-k \cdot t} \Leftrightarrow -T + 20 = 15 e^{-k \cdot t} \Leftrightarrow T = \underline{20 - 15 e^{-k \cdot t}}.$$

Nå gjenstår det å finne k . Vi bruker *minutt* som tidsenhet, og benytter at

$$T(30) = 8 \Leftrightarrow 8 = 20 - 15 e^{-k \cdot 30} \Leftrightarrow 15 e^{-k \cdot 30} = 12 \Leftrightarrow e^{-k \cdot 30} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

$$\Leftrightarrow -30k = \ln\left(\frac{4}{5}\right) \Leftrightarrow k = -\frac{1}{30}(\ln 4 - \ln 5) = \frac{1}{30}(\ln 5 - \ln 4) = \underline{\frac{1}{30} \ln\left(\frac{5}{4}\right)}$$

Da blir

$$\begin{aligned} T(t) &= 20 - 15 e^{-k \cdot t} = 20 - 15 e^{-\left(\frac{1}{30} \ln\left(\frac{5}{4}\right)\right)t} = 20 - 15 \left(e^{\ln\left(\frac{5}{4}\right)}\right)^{-\frac{1}{30}t} \\ &= 20 - 15 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{-\frac{1}{30}t} = \underline{\underline{20 - 15 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{30}t}}} \end{aligned}$$

Når temperaturen er steget til 17°C , har vi at

$$T(t) = 17 = 20 - 15 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{30}t} \Leftrightarrow 15 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{30}t} = 20 - 17 = 3 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{30}t} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}.$$

Tar logaritmen på begge sider:

$$\frac{1}{30}t \cdot \ln\left(\frac{4}{5}\right) = \ln\left(\frac{1}{5}\right) \Leftrightarrow t = 30 \frac{\ln 1 - \ln 5}{\ln 4 - \ln 5} = 30 \frac{\ln 5}{\ln 5 - \ln 4} \approx \underline{\underline{216}}.$$

Det vil altså ta 216 minutter, eller 3 timer og 36 minutter, fra kartongen tas ut av kjøleskapet og til temperaturen er blitt 17°C .

Eksempel 2.6.2: Vi skal anta at temperaturen i løpet av et vinterdøgn varierer sinusformet fra -5°C om natten til 5°C om dagen. Dersom vi lar start-tidspunktet være det tidspunktet der temperaturen passerer 0°C på vei opp, kan temperaturen gis ved formelen

$$T_0(t) = 5 \sin\left(\frac{1}{24} \cdot 2\pi t\right) = 5 \sin\left(\frac{1}{12} \pi t\right)$$

der tiden t er målt i timer. Finn hvordan temperaturen inne i ei hytte varierer med tiden når vi antar at start-temperaturen inne i hytta er 0°C .

Løsning: Vi tar igjen utgangspunkt i likningen

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0).$$

Setter inn at

$$T_0(t) = 5 \sin\left(\frac{1}{12} \pi t\right)$$

og får

$$\frac{dT}{dt} = -k\left(T - 5\sin\left(\frac{1}{12}\pi t\right)\right) \Leftrightarrow \frac{dT}{dt} + k \cdot T = 5k \cdot \sin\left(\frac{1}{12}\pi t\right).$$

Dette er en lineær differensiallikning som løses etter standard oppskrift. Vi finner først

$$F(t) = \int k dt = k \cdot t,$$

slik at løsningen på differensiallikningen blir

$$T(t) = e^{-kt} \left(\int 5k \sin\left(\frac{1}{12}\pi t\right) e^{kt} dt + C \right).$$

Nå må vi fortsette på samme måte som i Eksempel 2.5.2. Vi benytter at

$$\int e^{\alpha t} \sin(\omega t) dt = \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} (\alpha \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t)) e^{\alpha t} + C$$

og får

$$\begin{aligned} T(t) &= e^{-kt} \left(5k \cdot \frac{1}{k^2 + \left(\frac{1}{12}\pi\right)^2} \left(k \sin\left(\frac{1}{12}\pi t\right) - \frac{1}{12}\pi \cos\left(\frac{1}{12}\pi t\right) \right) e^{kt} + C \right) \\ &= \frac{5k}{k^2 + \left(\frac{1}{12}\pi\right)^2} \left(k \sin\left(\frac{1}{12}\pi t\right) - \frac{1}{12}\pi \cos\left(\frac{1}{12}\pi t\right) \right) + C e^{-kt} \end{aligned}$$

Finner C:

$$\begin{aligned} T(0) = 0 &\Leftrightarrow \frac{5k}{k^2 + \left(\frac{1}{12}\pi\right)^2} \left(k \sin(0) - \frac{1}{12}\pi \cos(0) \right) + C e^0 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{5k}{k^2 + \left(\frac{1}{12}\pi\right)^2} \left(-\frac{1}{12}\pi \right) + C = 0 \Leftrightarrow C = \frac{\frac{5}{12}k\pi}{k^2 + \left(\frac{1}{12}\pi\right)^2} \end{aligned}$$

Altså blir

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{5k}{k^2 + \left(\frac{1}{12}\pi\right)^2} \left(k \sin\left(\frac{1}{12}\pi t\right) - \frac{\pi}{12} \cos\left(\frac{1}{12}\pi t\right) \right) + \frac{\frac{5}{12}k\pi}{k^2 + \left(\frac{1}{12}\pi\right)^2} e^{-kt} \\ &= \frac{5k}{k^2 + \left(\frac{1}{12}\pi\right)^2} \left(k \sin\left(\frac{1}{12}\pi t\right) - \frac{1}{12}\pi \cos\left(\frac{1}{12}\pi t\right) + \frac{1}{12}\pi e^{-kt} \right) \end{aligned}$$

Dette fryktinngytende uttrykket blir kanskje lettere å forstå dersom vi starter med å merke oss at leddet $\frac{1}{12}\pi e^{-kt}$ inne i parentesen går mot null når t blir stor. Etter en tid er det derfor de to første leddene som vil dominere. Disse leddene blir lettere å tolke dersom vi husker fra "grunnleggende funksjonslære" at

$$k \sin\left(\frac{1}{12}\pi t\right) - \frac{1}{12}\pi \cos\left(\frac{1}{12}\pi t\right) = \sqrt{k^2 + \left(\frac{1}{12}\pi\right)^2} \cdot \sin\left(\frac{1}{12}\pi t - \varphi\right)$$

der

$$\tan \varphi = \frac{\frac{1}{12}\pi}{k}.$$

Dermed kan løsningen skrives på formen

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{5k}{k^2 + \left(\frac{1}{12}\pi\right)^2} \left(\sqrt{k^2 + \left(\frac{1}{12}\pi\right)^2} \cdot \sin\left(\frac{1}{12}\pi t - \varphi\right) + \frac{1}{12}\pi e^{-kt} \right) \\ &= \frac{5k}{\sqrt{k^2 + \left(\frac{1}{12}\pi\right)^2}} \cdot \left(\sin\left(\frac{1}{12}\pi t - \varphi\right) + \frac{1}{12}\pi e^{-kt} \right) \end{aligned}$$

Det første leddet blir en sinus-funksjon som er tidsforskjøvet i forhold til ute-temperaturen, mens det siste leddet skyldes start-temperaturen og forsvinner etter hvert.

For å få mer kjøtt og blod på denne løsningen, må vi anslå en fornuftig verdi av k . Da benytter vi at leddet $\frac{1}{12}\pi e^{-kt}$ kommer fra start-temperaturen i hytta. Dersom vi antar at dette bidraget er neglisjerbart etter ca. ett døgn, og definerer "neglisjerbart" som $\frac{1}{12}\pi e^{-2} \approx 0.035$, kan vi sette

$$\frac{1}{12}\pi e^{-k \cdot 24} \approx \frac{1}{12}\pi e^{-2} \Leftrightarrow -24k \approx -2 \Leftrightarrow k \approx \frac{1}{12}.$$

Med denne verdien av k blir

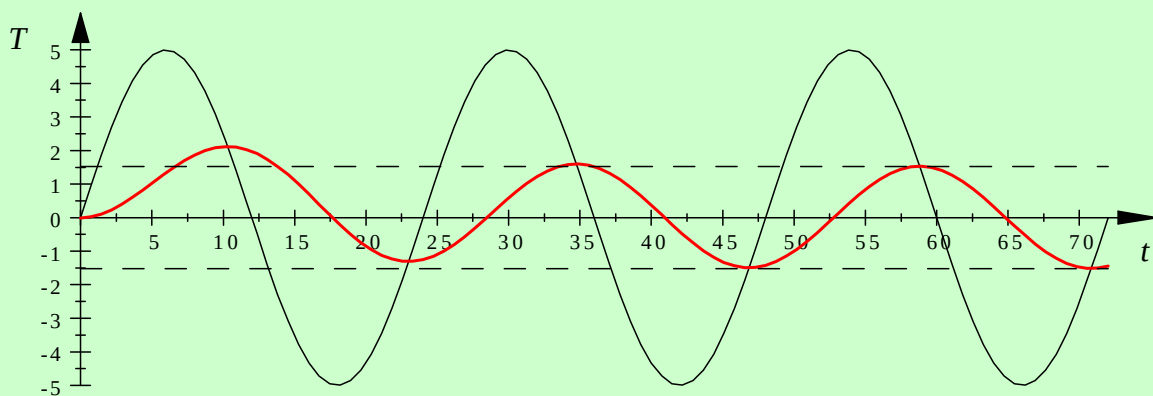
$$\tan \varphi = \frac{\frac{1}{12}\pi}{k} = \frac{\frac{1}{12}\pi}{\frac{1}{12}} = \pi \Leftrightarrow \varphi = 1.26 \text{ rad} \approx 72^\circ.$$

Videre blir

$$k^2 + \left(\frac{1}{12}\pi\right)^2 = \left(\frac{1}{12}\right)^2 + \left(\frac{1}{12}\pi\right)^2 \approx 0.0755$$

slik at

$$T(t) = \frac{5 \cdot \frac{1}{12}}{\sqrt{0.0755}} \cdot \sin\left(\frac{1}{12}\pi t - 1.26\right) + \frac{5 \cdot \frac{1}{12}}{0.0755} \cdot \frac{1}{12}\pi e^{-\frac{1}{12}t} \approx \underline{\underline{1.52 \sin\left(\frac{1}{12}\pi t - 1.26\right) + 1.44e^{-\frac{1}{12}t}}}$$



En grafisk framstilling av temperaturen T som funksjon av tiden t for de første 3 døgnene er vist ovenfor. Der er også utetemperaturen tegnet inn sammen med de rette linjene $T = \pm 1.52$.

Vi ser hvordan temperaturen i hytta svinger mellom -1.52°C og 1.52°C etter at start-bidraget er borte. Videre ser vi at temperaturen inne i hytta vil øke så lenge det er varmere utenfor enn inne i hytta, og at temperaturen inne i hytta avtar når det blir kaldere utenfor enn inne i hytta. Det virker jo rimelig, og antyder at vår løsning er korrekt.

3. Lineære 2. ordens differensiallikninger.

3.1. Innledning.

En 2.ordens differensiallikning er en likning som inneholder $y''(x)$, og som også kan inneholde $y'(x)$, $y(x)$ og / eller x . Slike likninger er adskillig vanskeligere å løse enn de tilsvarende første ordens differensiallikningene. Vi skal begrense oss til *lineære* 2. ordens differensiallikninger:

En differensiallikning av typen
 $y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = r(x)$
kalles en *lineær 2. ordens differensiallikning*.

Betegnelsen *lineær* kommer av at både y , y' og y'' inngår som førstegradsfaktorer.

Du husker sikkert at lineære *første* ordens differensiallikninger løses med [formel](#). Dessverre fins det ingen slik formel til å løse lineære 2. ordens differensiallikninger. Det er faktisk bare i noen helt spesielle tilfeller at slike likninger lar seg løse eksakt. Heldigvis er det svært mange problemstillinger innen fagområder som fysikk, mekanikk, elektrisitetslære osv. som fører til slike løsbare likninger. Du bør derfor lære deg løsningsteknikkene for slike likninger.

Mange av de teknikkene vi skal utvikle, kan lett generaliseres til lineære n 'te ordens differensiallikninger, d.v.s. likninger som inneholder n 'te deriverte av y .

Vi skal først se på en type lineære 2.ordens differensiallikninger som lar seg løse eksakt. Det er likninger der $q(x) \equiv 0$ slik at likningen blir

$$y'' + p(x) \cdot y' = r(x).$$

Slike likninger løses ved å innføre en ny funksjon

$$z(x) = y'(x) \Rightarrow z'(x) = y''(x).$$

Denne substitusjonen omformer likningen til en lineær 1. ordens differensiallikning

$$z' + p(x) \cdot z = r(x)$$

som vi kan løse med formel. Deretter finner vi $y(x)$ ved å integrere $z(x)$. La oss se hvordan dette fungerer i praksis:

Eksempel 3.1.1: Løs disse differensiallikningene:

a) $y'' + \frac{1}{x} y' = x.$

b) $y'' - y' = x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

Løsning: I begge oppgavene innfører vi

$$z(x) = y'(x) \Leftrightarrow z'(x) = y''(x).$$

a) Likningen blir

$$z' + \frac{1}{x} z = x.$$

Hjelpfunksjonen blir da

$$F(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln x$$

slik at

$$\begin{aligned} z(x) &= e^{-\ln x} \left(\int x \cdot e^{\ln x} dx + C \right) = \frac{1}{x} \left(\int x \cdot x dx + C \right) \\ &= \frac{1}{x} \left(\int x^2 dx + C \right) = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{3} x^3 + C \right) = \frac{1}{3} x^2 + \frac{C}{x} \end{aligned}$$

Her har jeg benyttet at

$$e^{\ln x} = x$$

slik at

$$e^{-\ln x} = (e^{\ln x})^{-1} = x^{-1} = \frac{1}{x}.$$

Men vi er egentlig bare halvveis i løsningen. Vi skal jo finne y , ikke bare z . Nå vet vi at

$$z(x) = y'(x)$$

slik at

$$y(x) = \int z(x) dx = \int \left(\frac{1}{3} x^2 + \frac{C}{x} \right) dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} x^3 + C \cdot \ln|x| + C_2 = \frac{1}{9} x^3 + C \ln|x| + C_2.$$

b) Substitusjonen $y' = z$ fører til at likningen omformes til

$$z' - z = x.$$

Dette er en lineær første ordens differensiallikning, som løses på vanlig måte:

$$F(x) = \int (-1) dx = -x.$$

$$\begin{aligned} z(x) &= e^{-(F(x))} \left(\int g(x) \cdot e^{F(x)} dx + C \right) = e^{-(-x)} \left(\int x \cdot e^{-x} dx + C \right) = e^x \left((-x-1)e^{-x} + C \right) \\ &= (-x-1)e^{x-x} + Ce^x = \underline{Ce^x - x - 1} \end{aligned}$$

Integralet er løst med delvis integrasjon.

Så må vi finne y . Vi tar da utgangspunkt i at $z = y'$ som gir

$$y' = z \Leftrightarrow y = \int z dx = \int (Ce^x - x - 1) dx = \underline{Ce^x - \frac{1}{2}x^2 - x + C_2}.$$

Legg merke til at vi får to integrasjonskonstanter. Heldigvis kjenner vi to startbetingelser, og kan da finne de to integrasjonskonstantene:

$$y'(0) = 0 \Leftrightarrow z(0) = 0 \Leftrightarrow Ce^0 - 0 - 1 = 0 \Leftrightarrow C - 1 = 0 \Leftrightarrow \underline{C = 1}.$$

$$y(0) = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot e^0 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 - 0 + C_2 = 0 \Leftrightarrow 1 + C_2 = 0 \Leftrightarrow \underline{C_2 = -1}.$$

Altså blir løsningen av differensiallikningen:

$$\underline{y(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1}.$$

Løs [oppgave 3.1.1](#).

Når vi nå skal gå løs på mer generelle 2. ordens differensiallikninger, trenger vi et par viktige definisjoner:

Dersom $r(x) \equiv 0$ forenkles likningen til

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = 0.$$

Da sier vi at likningen er *homogen*.

I motsatt fall er den *inhomogen*.

Disse begrepene er svært viktige på grunn av setningen nedenfor:

Den generelle løsningen av den inhomogene lineære differensiallikningen

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = r(x)$$

er

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

der $y_h(x)$ er den generelle løsningen av den tilhørende *homogene* likningen,

mens $y_p(x)$ er en *partikulær løsning* av den inhomogene likningen.

En *partikulær løsning* er en eller annen funksjon som passer inn i den gitte *inhomogene* differensiallikningen.

Setningen inneholder to påstander:

1. Dersom $y_h(x)$ er løsning av den tilhørende *homogene* likningen, mens $y_p(x)$ er en partikulær løsning av den inhomogene likningen, så er

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

også løsning av den inhomogene likningen.

2. Det fins ingen andre løsninger av den inhomogene likningen.

Du finner [bevis](#) for disse påstandene i et eget notat.

Det er nå naturlig å studere slike likninger i denne rekkefølgen:

Først skal vi se på [homogene](#) lineære 2.ordens differensiallikninger.

Deretter skal vi se hvordan vi løser [inhomogene](#) lineære 2.ordens differensiallikninger, d.v.s. hvordan vi finner en partikulær løsning av likningen.

Slike likninger forekommer ofte innen fagområder som for eksempel fysikk, mekanikk og elektrisitetstlære. I et kapittel om [svingninger](#) kan du se eksempler på dette.

Hvis du først behersker teknikken for å løse 2.ordens differensiallikninger, er det kort vei til å løse [høyere ordens differensiallikninger](#) og [system av 1.ordens differensiallikninger](#).

Til slutt bør du regne gjennom et utvalg [blandede oppgaver](#).

3.2. Homogene lineære 2.ordens differensiallikninger.

3.2.1. Generelle egenskaper.

En *homogen* lineær 2. ordens differensiallikning er altså en likning av typen

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = 0.$$

Som nevnt i innledningen fins det ikke noen formel eller noen annen generell teknikk for å løse slike likninger. Men det er utarbeidet mye nyttig teori for løsningen av slike likninger. Men før vi går løs på denne teorien, skal vi se på et enkelt eksempel:

Eksempel 3.2.1: Løs differensiallikningen

$$y'' + y = 0.$$

Løsning: Likningen kan omformes til

$$y'' = -y.$$

Problemet er altså å finne en funksjon som er slik at når den deriveres to ganger, kommer vi tilbake til den funksjonen vi gikk ut fra, men med motsatt fortegn. Da kan vi jo prøve

$$y_1(x) = \sin x.$$

Deriverer vi to ganger, får vi:

$$y_1'(x) = \cos x,$$

$$y_1''(x) = -\sin x = -y_1(x).$$

Altså er funksjonen

$$y_1(x) = \sin x$$

en løsning av differensiallikningen.

Men vi kan også prøve

$$y_2(x) = \cos x.$$

Deriverer vi to ganger, får vi

$$y_2'(x) = -\sin x,$$

$$y_2''(x) = -\cos x = -y_2(x).$$

Altså er funksjonen

$$y_2(x) = \cos x$$

også en løsning av differensiallikningen.

Vi har altså funnet at differensiallikningen vår har to løsninger

$$y_1(x) = \sin x$$

og

$$y_2(x) = \cos x.$$

Kan den ha andre løsninger? Svaret er et ubetinget JA! Enhver lineær kombinasjon av disse to løsningene, d.v.s. ethvert uttrykk av formen

$$y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

der C_1 og C_2 er fritt valgte konstanter, er også løsning av likningen. Dette ser vi slik:

$$y'(x) = C_1 \cos x + C_2 (-\sin x)$$

$$y''(x) = C_1 (-\sin x) + C_2 (-\cos x)$$

$$= -C_1 \sin x - C_2 \cos x$$

$$= -y(x)$$

Altså vil

$$y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

passe inn i likningen uansett hvilke verdier C_1 og C_2 har.

Løs [oppgave 3.2.1](#).

Kan det tenkes at likningen i eksemplet ovenfor har enda flere løsninger? Svaret er nå *NEI*. Da støtter vi oss på setningen nedenfor, som oppsummerer noen av de viktigste egenskapene for løsningen av slike homogene lineære 2. ordens differensiallikninger.

La $p(x)$ og $q(x)$ være to funksjoner som er kontinuerlige innenfor et intervall I . Innenfor dette intervallet gjelder:

Den homogene lineære 2. ordens differensiallikningen

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = 0$$

har alltid to lineært uavhengige løsninger $y_1(x)$ og $y_2(x)$.

Den generelle løsningen av differensiallikningen kan skrives

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

der C_1 og C_2 er to konstanter som kan bestemmes dersom vi kjenner en start-tilstand $y(x_0)$ og $y'(x_0)$.

Vi skal ikke bevise denne setningen.

Merk hvordan resultatene i eksemplet ovenfor stemmer med setningen. Vi fant to løsninger

$y_1(x) = \sin x$ og $y_2(x) = \cos x$. Vi fant også at

$$y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

var løsning av likningen. Men setningen garanterer i tillegg at det ikke fins andre løsninger av likningen.

Setningen inneholder flere påstander:

1. Likningen har alltid to lineært uavhengige løsninger $y_1(x)$ og $y_2(x)$.
2. Enhver lineær kombinasjon
$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$
er også løsning av likningen.
3. Det fins ingen andre løsninger av likningen.
4. Når en start-tilstand $y(x_0)$ og $y'(x_0)$ er kjent, kan C_1 og C_2 bestemmes slik at likningen har en entydig løsning.

Denne setningen er egentlig et spesialtilfelle av en mer generell setning for n 'te ordens lineære differensiallikninger. Slike likninger har alltid n lineært uavhengige løsninger. Den generelle løsningen av en n 'te ordens homogen lineær differensiallikning er da en lineær kombinasjon av disse n lineært uavhengige løsningene.

Ovenfor har vi flere ganger brukt uttrykket "lineært uavhengige funksjoner". Hva betyr det? I sin enkleste form kan vi si at:

To funksjoner $y_1(x)$ og $y_2(x)$ er *lineært avhengige* dersom det fins et tall a som er slik at

$$y_1(x) = a \cdot y_2(x).$$

Dersom det ikke fins noe slikt tall, er funksjonene *lineært uavhengige*.

Eksempel 3.2.2: Undersøk om funksjonene $y_1(x)$ og $y_2(x)$ er lineært avhengige når

- a) $y_1(x) = x^2$ og $y_2(x) = 4x^2$.
- b) $y_1(x) = \sin(2x)$ og $y_2(x) = \sin x \cdot \cos x$.

Løsning:

- a) Her ser vi direkte at
$$y_2(x) = 4x^2 = 4y_1(x)$$
slik at funksjonene er lineært avhengige.
- b) Denne er verre. Men dersom du husker dine trigonometriske identiteter, vil du huske at
$$y_1(x) = \sin(2x) = 2 \sin x \cdot \cos x = 2y_2(x)$$
slik at også disse to funksjonene er lineært avhengige.

Eksempel b) ovenfor viser at det kan være behov for en bedre test på lineær uavhengighet. Her kommer den:

Vi har gitt to funksjoner $y_1(x)$ og $y_2(x)$

Definer **Wronski-determinanten**

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$

Vi kan da vise at:

- 1) Funksjonene $y_1(x)$ og $y_2(x)$ er *lineært uavhengige* i et intervall I hvis og bare hvis $W(x)$ er forskjellig fra null for minst en x i intervallet.
- 2) Funksjonene er *lineært avhengige* hvis og bare hvis $W(x) \equiv 0$ i hele intervallet.

La oss se på et eksempel:

Eksempel 3.2.3: Undersøk om funksjonene $y_1(x) = e^{ax}$ og $y_2(x) = e^{bx}$ der a og b er to konstanter, er lineært uavhengige.

Løsning: Vi setter opp Wronski-determinanten:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{ax} & e^{bx} \\ ae^{ax} & be^{bx} \end{vmatrix} = e^{ax} \cdot be^{bx} - ae^{ax} \cdot e^{bx} = \underline{(b-a)e^{ax} \cdot e^{bx}}$$

Vi ser at dersom $a = b$, blir Wronski-determinanten identisk lik null slik at $y_1(x)$ og $y_2(x)$ er lineært avhengige. Det er helt naturlig fordi funksjonene da er like. Men dersom $a \neq b$ er Wronski-determinanten aldri lik null, og funksjonene er da lineært uavhengige.

Du finner mer om lineær (u)avhengighet og Wronski-determinanten i et lite [tilleggsnotat](#).

3.2.2. Likninger med konstante koeffisienter.

Hittil har vi gått som katten rundt den varme grøten. Vi har sagt mye om hvordan løsningen av differensiallikningen ser ut. Men vi har sagt fint lite om hvordan vi finner løsningen. Grunnen er at det vanligvis er temmelig vanskelig å finne løsningen.

Vi skal begrense oss til et viktig spesialtilfelle: Likningen har *konstante koeffisienter*. Dette vil si at $p(x) = a$ og $q(x) = b$ der både a og b er konstanter. Likninger reduseres da til

$$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0.$$

Løsningsteknikken for en slik likning er oppsummert nedenfor:

Den homogene differensiallikningen

$$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0$$

der a og b er konstanter, løses ved at du først setter opp den *karakteristiske likningen*

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

og finner røttene i denne med vanlig formel for løsning av andregradslikninger. Du må deretter skille mellom tre tilfeller:

1. To forskjellige reelle røtter λ_1 og λ_2 :

Differensiallikningen har løsning

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

2. To kompleks konjugerte røtter $\lambda = \alpha \pm i\beta$:

Differensiallikningen har løsning

$$y(x) = e^{\alpha x} (B_1 \cos(\beta x) + B_2 \sin(\beta x)).$$

Løsningen kan også skrives på formen

$$y(x) = A e^{\alpha x} \cos(\beta x + \varphi)$$

eller

$$y(x) = A e^{\alpha x} \sin(\beta x + \varphi)$$

3. To like røtter $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$:

Differensiallikningen har løsning

$$y(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}.$$

Du finner utledning av setningen ovenfor i eget [notat](#).

Når vi bruker oppskriften ovenfor, vil løsningen inneholde to ukjente konstanter. Vi har da funnet den **generelle løsningen** av differensiallikningen. Dersom vi kjenner en starttilstand gitt ved $y(x_0)$ og $y'(x_0)$, kan vi bestemme disse konstantene. Da finner vi en **spesiell løsning** av differensiallikningen. Mange ganger nøyer vi oss med å finne den generelle løsningen.

Eksempel 3.2.4: Vi har gitt differensiallikningen

$$y'' + 5y' + 4y = 0.$$

- a) Finn den generelle løsningen av likningen.
b) Finn den spesiell løsningen som tilfredsstiller startbetingelsene

$$y(0) = 3, \quad y'(0) = 0.$$

Løsning:

a) Vi setter opp og løser den karakteristiske likningen:

$$\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} = \begin{cases} -1 \\ -4 \end{cases}$$

Differensiallikningen har da den generelle løsningen

$$y(x) = \underline{\underline{C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x}}}.$$

b) For å finne konstantene, må jeg først finne et uttrykk for $y'(x)$:

$$y'(x) = -C_1 e^{-x} - 4C_2 e^{-4x}.$$

Setter inn startbetingelsene:

$$y(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0 = C_1 + C_2 = 3.$$

$$y'(0) = -C_1 e^0 - 4C_2 e^0 = -C_1 - 4C_2 = 0.$$

Legger sammen disse likningene, og får

$$-3C_2 = 3 \Leftrightarrow \underline{\underline{C_2 = -1}}.$$

Da blir

$$C_1 = 3 - C_2 = 3 - (-1) = \underline{\underline{4}}.$$

Den spesielle løsningen av differensiallikningen er da

$$\underline{\underline{y(x) = 4e^{-x} - e^{-4x}}}.$$

Eksempel 3.2.5: Vi har gitt differensiallikningen

$$y'' + 4y' + 5y = 0$$

a) Finn den generelle løsningen av likningen.

b) Finn den spesielle løsningen som tilfredsstiller startbetingelsene

$$y(0) = 3, \quad y'(0) = 0.$$

Løsning:

a) Vi setter opp og løser den karakteristiske likningen:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = \underline{\underline{-2 \pm i}}.$$

Siden den karakteristiske likningen har to kompleks konjugerte røtter, blir løsningen av differensiallikningen

$$y(x) = \underline{\underline{e^{-2x} (B_1 \cos x + B_2 \sin x)}}.$$

Løsningen kan også skrives på formen

$$\underline{\underline{y(x) = A e^{-2x} \cos(x + \varphi)}}.$$

b) For å finne konstantene B_1 og B_2 , må jeg først finne et uttrykk for $y'(x)$:

$$y'(x) = -2e^{-2x} (B_1 \cos x + B_2 \sin x) + e^{-2x} (-B_1 \sin x + B_2 \cos x).$$

Setter inn startbetingelsene:

$$y(0) = e^0 (B_1 \cos 0 + B_2 \sin 0) = B_1 = 3.$$

$$y'(0) = -2e^0 (B_1 \cos 0 + B_2 \sin 0) + e^0 (-B_1 \sin 0 + B_2 \cos 0) \\ = -2B_1 + B_2 = 0$$

Av den siste likningen får vi

$$B_2 = 2B_1 = 2 \cdot 3 = 6.$$

Den spesielle løsningen av differensiallikningen blir derfor

$$y(x) = e^{-2x} (3 \cos x + 6 \sin x).$$

Dersom løsningen er skrevet på formen

$$y(x) = Ae^{-2x} \cos(x + \varphi)$$

må vi først finne et uttrykk for $y'(x)$ for å finne A og φ .

$$y'(x) = A(-2e^{-2x} \cos(x + \varphi) + e^{-2x} (-\sin(x + \varphi))) \\ = Ae^{-2x} (-2 \cos(x + \varphi) - \sin(x + \varphi))$$

Setter inn startbetingelsene:

$$y(0) = Ae^0 \cos(0 + \varphi) = A \cos \varphi = 3$$

$$y'(0) = Ae^0 (-2 \cos(0 + \varphi) - \sin(0 + \varphi)) \\ = -A(2 \cos \varphi + \sin \varphi) = 0$$

Av den siste likningen får vi

$$2 \cos \varphi + \sin \varphi = 0 \Leftrightarrow \tan \varphi = -2 \Leftrightarrow \varphi = \begin{cases} -63.4^\circ \\ 116.6^\circ \end{cases}$$

Settes $\varphi = -63.4^\circ$ inn i (1), får vi

$$A = \frac{3}{\cos \varphi} = \frac{3}{\cos(-63.4^\circ)} = 6.70.$$

Bruker vi $\varphi = 116.6^\circ$, blir A negativ noe vi ikke ønsker.

Løsningen av differensiallikningen blir derfor

$$y(x) = 6.70e^{-2x} \cos(x - 63.4^\circ).$$

For sikkerhets skyld kan vi sjekke at de to løsningene er ekvivalente:

$$6.70e^{-2x} \cos(x - 63.4^\circ) = 6.70e^{-2x} (\cos x \cdot \cos(-63.4^\circ) - \sin x \cdot \sin(-63.4^\circ)) \\ = 6.70e^{-2x} (0.4478 \cdot \cos x - 0.8942 \cdot \sin x) \\ = e^{-2x} (3.00 \cos x + 5.99 \sin x)$$

Når vi tar hensyn til avrundingsunøyaktigheter, ser vi at løsningene er identiske.

Eksempel 3.2.6: Vi har gitt differensiallikningen

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

- Finn den generelle løsningen av likningen.
- Finn den spesielle løsningen som tilfredsstiller startbetingelsene

$$y(0) = 3, \quad y'(0) = 0.$$

Løsning:

a) Vi setter opp og løser den karakteristiske likningen:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2} = -2.$$

Den karakteristiske likningen har to sammenfallende røtter. Differensiallikningen har da løsningen

$$y(x) = \underline{C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}}.$$

b) For å finne konstantene, må jeg først finne et uttrykk for $y'(x)$:

$$\begin{aligned} y'(x) &= -2C_1 e^{-2x} + C_2 (1 \cdot e^{-2x} + x(-2)e^{-2x}) \\ &= -2C_1 e^{-2x} + C_2 (1 - 2x) e^{-2x} \end{aligned}$$

Setter inn startbetingelsene:

$$y(0) = C_1 e^0 + C_2 \cdot 0 \cdot e^0 = C_1 = 3.$$

$$y'(0) = -2C_1 e^0 + C_2 (1 - 0) e^0 = -2C_1 + C_2 = 0.$$

Av den siste likningen får vi

$$C_2 = 2C_1 = 2 \cdot 3 = 6.$$

Løsningen av differensiallikningen blir derfor

$$y(x) = \underline{\underline{3e^{-2x} + 6xe^{-2x}}}.$$

Denne løsningsteknikken *må* du trene inn. Start med å finne den generelle løsningen av likningene i [Oppgave 3.2.2](#), og gå deretter videre med [Oppgave 3.2.3](#).

3.3. Inhomogene likninger.

3.3.1. Innledning.

Vi har allerede nevnt at den generelle løsningen av den inhomogene lineære differensiallikningen

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = r(x)$$

alltid kan skrives på formen

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

der $y_h(x)$ er den generelle løsningen av den tilhørende *homogene* likningen, mens $y_p(x)$ er en *partikulær løsning* av den inhomogene likningen. En *partikulær løsning* er en eller annen funksjon som passer inn i den gitte inhomogene differensiallikningen.

Vi har også sett hvordan vi kan løse den tilhørende homogene likningen, i alle fall dersom likningen har konstante koeffisienter. Nå gjenstår det å finne en partikulær løsning. Men før vi gjør det, kan vi se på et innledende eksempel.

Eksempel 3.3.1: Vi har gitt differensiallikningen $y'' + y = x$.

- a) Vis at likningen har en partikulær løsning $y_p(x) = x$, og finn den generelle løsningen av likningen.
b) Finn den spesielle løsningen som har startverdiene $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

Løsning:

- a) Den homogene likningen er

$$y'' + y = 0.$$

I Eksempel 3.2.1 har vi funnet at denne likningen har den generelle løsningen

$$y_h(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Så skal vi vise at funksjonen

$$y_p(x) = x$$

passer inn i den inhomogene likningen slik at den kan brukes som partikulær løsning.

Dette påvises ved innsetting:

$$y_p(x) = x \Rightarrow y_p'(x) = 1 \Rightarrow y_p''(x) = 0.$$

Setter inn i den gitte differensiallikningen, og får:

$$y_p'' + y_p = x \Leftrightarrow 0 + x = x$$

som stemmer. Altså er den generelle løsningen av den gitte likningen

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \underline{\underline{C_1 \sin x + C_2 \cos x + x}}.$$

- b) For å kunne benytte startverdiene, må vi først derivere $y(x)$:

$$y'(x) = C_1 \cos x - C_2 \sin x + 1.$$

Startbetingelsene gir oss nå:

$$y(0) = 1 \Leftrightarrow C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 + 0 = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{C_2 = 1}}.$$

$$y'(0) = -1 \Leftrightarrow C_1 \cos 0 - C_2 \sin 0 + 1 = -1 \Leftrightarrow \underline{\underline{C_1 = -2}}.$$

Den spesielle løsningen med de gitte startverdiene blir derfor

$$y(x) = \underline{\underline{-2 \sin x + \cos x + x}}.$$

Prøv deg selv på [Oppgave 3.3.1](#).

Du innser sikkert at slike ”prøve- og feile”-metoder ikke fører fram generelt. Vi må nok utvikle bedre metoder for å finne en partikulær løsning. Vi skal se på to slike metoder.

Først skal først ta for oss **ubestemte koeffisienters metode**, som er en forholdsvis grei metode dersom $r(x)$ består av visse vanlige, enkle funksjoner. Men metoden har sine begrensninger.

Deretter skal vi ta for oss **Lagranges metode** (også kalt **metoden med variasjon av parametre**), som er en mer generell metode. Ulempen med Lagranges metode er at den ofte fører til en del regning, og den kan også gi integraler som ikke lar seg løse eksakt.

3.3.2. Ubestemte koeffisienters metode.

Denne metoden går i korthet ut på at vi skal "gjette" hvordan den partikulære løsningen ser ut, dog slik at vi skal tilpasse noen konstanter slik at vår "gjetteløsning" passer inn i likningen. Nå skal vi ikke gjette vilt. En noe upresis regel går ut på at partikulærløsningen skal ha samme form som $r(x)$. Mer presist kan vi si at dersom $r(x)$ er et polynom i x , en sinus- eller cosinus-funksjon, eller en eksponentialfunksjon, prøver du en partikulær løsning etter tabellen nedenfor:

$r(x)$:	Prøv $y_p(x)$:
$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$	$A_0 + A_1x + \dots + A_nx^n$
$a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x)$	$A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$
$a \cdot e^{\alpha x}$	$A \cdot e^{\alpha x}$

Du ser at våre "prøveløsninger" $y_p(x)$ inneholder en eller flere ukjente koeffisienter A , A_0 , A_1 , B , osv. Ditt problem går ut på å bestemme disse koeffisientene. Du gjør det ved å sette inn $y_p(x)$ i differensiallikningen, og deretter bestemme koeffisientene slik at likningen er oppfylt for *alle* verdier av x . Før vi ser eksempler på hvordan dette gjøres i praksis, skal jeg komme med noen merknader:

- Dersom $r(x)$ er et n -tegradspolynom, må du finne *alle* de $n+1$ ubestemte koeffisientene $A_0, A_1, \dots, A_n$.
Eksempel: Selv om $r(x) = 3x^2$ (konstantledd og førstegradsledd mangler), må du bruke et fullstendig andregradspolynom $y_p(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2$ og finne både A_0 , A_1 og A_2 .
- Selv om $r(x)$ inneholder *bare* sinus-ledd eller *bare* cosinus-ledd, må $y_p(x)$ inneholde *både* sinus- og cosinus-ledd. Vi kan også skrive $y_p(x)$ på formen $A \sin(\omega x + \varphi)$ eller $A \cos(\omega x + \varphi)$. Disse formene er ofte nyttige i praktiske problem, men fører gjerne til mer kompliserte regninger enn formen $A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$.
- Dersom $r(x)$ er en sum eller et produkt av ledd i venstre kolonne i tabellen ovenfor, må $y_p(x)$ være en tilsvarende sum eller et tilsvarende produkt av ledd fra høyre kolonne.
Eksempel: Dersom $r(x) = 2x \sin(3x)$, må du bruke $y_p(x) = (A_0 + A_1x)(\cos(3x) + B \sin(3x))$.

En annen versjon av disse reglene er at $y_p(x)$ skal inneholde alle typer ledd som forekommer i $r(x)$, samt første- og andrederiverte av disse leddene.

Reglene ovenfor svikter dersom $r(x)$ inneholder ledd som allerede inngår i løsningen $y_h(x)$ av den tilhørende homogene likningen. Da vil reglene gi ledd i $y_p(x)$ som allerede inngår i $y_h(x)$, og slike ledd har vi ikke bruk for. Hva gjør vi da?

Dersom vi ved å følge reglene ovenfor får en $y_p(x)$ som inneholder ledd som allerede inngår i $y_h(x)$, må slike ledd multipliseres med x .

Denne justeringen fører vanligvis (men ikke alltid) fram.

Så var det en viktig detalj til slutt:

Dersom du kjenner en start-tilstand og skal finne konstantene som inngår i $y_h(x)$, må disse konstantene finnes *etter* at $y_p(x)$ er funnet.

Nå er tiden inne til å se på noen eksempler:

Eksempel 3.3.2: I differensiallikningene nedenfor skal du først finne den generelle løsningen. Deretter skal du finne den spesielle løsningen som tilfredsstiller de oppgitte startbetingelsene:

- a) $y'' + 5y' + 4y = 16x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$.
- b) $y'' + 5y' + 4y = 3e^{-x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$.
- c) $y'' + 5y' + 4y = 34\sin x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$.
- d) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.

Løsning: Fra eksempel 3.2.4 (eller ved å løse den karakteristiske likningen) vet vi at den homogene likningen

$$y'' + 5y' + 4y = 0$$

har løsning

$$y_h(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x}.$$

Dette kan vi benytte i oppgave a) – c).

Når vi går på jakt etter partikulær løsning, prøver vi en funksjon $y_p(x)$ av samme form som $r(x)$, med de presiseringer og tilpasninger som er nevnt ovenfor.

a) $y'' + 5y' + 4y = 16x$

Her er $r(x) = 16x$, d.v.s. et førstegradspolynom i x . Vi prøver derfor en partikulær løsning som består av et komplett førstegradspolynom:

$$y_p(x) = A_0 + A_1 x \Rightarrow y_p'(x) = A_1 \Rightarrow y_p''(x) = 0.$$

Setter inn i differensiallikningen:

$$y_p'' + 5y_p' + 4y_p = 16x$$

$$0 + 5A_1 + 4(A_0 + A_1x) = 16x$$

$$5A_1 + 4A_0 + 4A_1x - 16x = 0$$

$$(5A_1 + 4A_0) + (4A_1 - 16)x = 0$$

Sammenhengen ovenfor skal være oppfylt for *alle* verdier av x . Dette er kun oppfylt dersom

$$5A_1 + 4A_0 = 0$$

og

$$4A_1 - 16 = 0 \Leftrightarrow 4A_1 = 16 \Leftrightarrow \underline{A_1 = 4}.$$

Setter dette inn i den første likningen:

$$5A_1 + 4A_0 = 0 \Leftrightarrow 4A_0 = -5A_1 = -5 \cdot 4 = -20 \Leftrightarrow \underline{A_0 = -5}.$$

Partikulær-løsningen blir da

$$y_p(x) = \underline{-5 + 4x}$$

slik at den generelle løsningen av differensiallikningen blir

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \underline{C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x} + 4x - 5}.$$

Nå først er tiden inne til å finne C_1 og C_2 . Vi finner først $y'(x)$:

$$y'(x) = -C_1 e^{-x} - 4C_2 e^{-4x} + 4.$$

Innsetting av den oppgitte start-tilstanden gir:

$$y(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0 + 4 \cdot 0 - 5 = C_1 + C_2 - 5 = 3 \Leftrightarrow C_1 + C_2 = 8$$

$$y'(0) = -C_1 e^0 - 4C_2 e^0 + 4 = -C_1 - 4C_2 + 4 = -1 \Leftrightarrow C_1 + 4C_2 = 5$$

Trekker den øverste likningen fra den nederste, og får

$$3C_2 = -3 \Leftrightarrow \underline{C_2 = -1}.$$

Da blir

$$C_1 + C_2 = 8 \Leftrightarrow C_1 = 8 - C_2 = 8 - (-1) = \underline{9}$$

slik at den spesielle løsningen av differensiallikningen som oppfyller startbetingelsen blir

$$y(x) = \underline{9e^{-x} - e^{-4x} + 4x - 5}.$$

b) $y'' + 5y' + 4y = 3e^{-x}$

Her er det nærliggende å prøve en partikulær løsning av formen $y_p(x) = Ae^{-x}$. Men siden løsningen av den homogene likningen er

$$y_h(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x},$$

kan vi ikke bruke en slik partikulærløsning siden et slikt ledd allerede inngår i $y_h(x)$. Vi multipliserer derfor med x , og prøver

$$y_p(x) = Axe^{-x} \Rightarrow y_p'(x) = A(1 \cdot e^{-x} + x \cdot (-e^{-x})) = Ae^{-x}(1 - x)$$

$$\Rightarrow y_p''(x) = A(-e^{-x}(1 - x) + e^{-x}(-1)) = Ae^{-x}(x - 2)$$

Setter disse uttrykkene inn i differensiallikningen:

$$y_p'' + 5y_p' + 4y_p = 3e^{-x}$$

$$Ae^{-x}(x-2) + 5Ae^{-x}(1-x) + 4Axe^{-x} = 3e^{-x}$$

$$Ae^{-x}(x-2+5-5x+4x) = 3e^{-x}$$

$$A \cdot 3 = 3 \Leftrightarrow \underline{A=1}$$

Partikulærløsningen blir da

$$y_p(x) = \underline{xe^{-x}}$$

slik at den generelle løsningen av differensiallikningen blir

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \underline{C_1e^{-x} + C_2e^{-4x} + xe^{-x}}.$$

Nå er tiden inne til å finne C_1 og C_2 . Vi finner først $y'(x)$:

$$\begin{aligned} y'(x) &= -C_1e^{-x} - 4C_2e^{-4x} + (1 \cdot e^{-x} + x(-e^{-x})) \\ &= -C_1e^{-x} - 4C_2e^{-4x} + e^{-x}(1-x) \end{aligned}$$

Innsetting av den kjente start-tilstanden gir:

$$y(0) = C_1e^0 + C_2e^0 + 0 = C_1 + C_2 = 3$$

$$y'(0) = -C_1e^0 - 4C_2e^0 + e^0(1-0) = -C_1 - 4C_2 + 1 = 1 \Leftrightarrow C_1 + 4C_2 = 0$$

Trekker disse likningene fra hverandre, og får

$$3C_2 = -3 \Leftrightarrow \underline{C_2 = -1}.$$

Da blir

$$C_1 = -4C_2 = -4(-1) = 4$$

slik at den spesielle løsningen av differensiallikningen som oppfyller startbetingelsen blir

$$y(x) = \underline{4e^{-x} - e^{-4x} + xe^{-x}}.$$

c) $y'' + 5y' + 4y = 34 \sin x.$

Selv om $r(x)$ kun inneholder et sinus-ledd, må vår partikulærløsning inneholde både sinus- og cosinus-ledd. Vi prøver

$$\begin{aligned} y_p(x) &= A_1 \cos x + A_2 \sin x \Rightarrow y_p'(x) = -A_1 \sin x + A_2 \cos x \\ \Rightarrow y_p''(x) &= -A_1 \cos x - A_2 \sin x \end{aligned}$$

Setter disse uttrykkene inn i differensiallikningen og ordner:

$$y_p'' + 5y_p' + 4y_p = 34 \sin x$$

$$(-A_1 \cos x - A_2 \sin x) + 5(-A_1 \sin x + A_2 \cos x) + 4(A_1 \cos x + A_2 \sin x) = 34 \sin x$$

$$(-A_1 + 5A_2 + 4A_1) \cos x + (-A_2 - 5A_1 + 4A_2) \sin x = 34 \sin x$$

$$(3A_1 + 5A_2) \cos x + (-5A_1 + 3A_2 - 34) \sin x = 0$$

Sammenhengen ovenfor skal være oppfylt for *alle* verdier av x . Dette er kun oppfylt dersom

$$3A_1 + 5A_2 = 0$$

og

$$-5A_1 + 3A_2 = 34.$$

Multipliserer øverste likning med 5 og nederste likning med 3 og adderer:

$$25A_2 + 9A_2 = 3 \cdot 34 \Leftrightarrow \underline{A_2 = 3}$$

som innsatt i den første likningen gir

$$A_1 = -\frac{5}{3}A_2 = -\frac{5}{3} \cdot 3 = -5.$$

Partikulærløsningen blir da

$$y_p(x) = -5\cos x + 3\sin x$$

slik at den generelle løsningen av differensiallikningen blir

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \underline{\underline{C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x} - 5\cos x + 3\sin x}}.$$

Nå er tiden inne til å finne C_1 og C_2 . Vi finner først $y'(x)$:

$$y'(x) = -C_1 e^{-x} - 4C_2 e^{-4x} + 5\sin x + 3\cos x.$$

Innsetting av den kjente start-tilstanden gir:

$$y(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0 - 5 \cdot \cos 0 + 3 \cdot \sin 0 = C_1 + C_2 - 5 = 3 \Leftrightarrow C_1 + C_2 = 8$$

$$y'(0) = -C_1 e^0 - 4C_2 e^0 + 5 \cdot \sin 0 + 3 \cdot \cos 0 = -C_1 - 4C_2 + 3 = 1 \Leftrightarrow C_1 + 4C_2 = 2$$

Trekker disse likningene fra hverandre, og får

$$3C_2 = -6 \Leftrightarrow \underline{\underline{C_2 = -2}}.$$

Da blir

$$C_1 + C_2 = 8 \Leftrightarrow C_1 = 8 - C_2 = 8 - (-2) = 10$$

slik at den spesielle løsningen av differensiallikningen som oppfyller startbetingelsen blir

$$y(x) = \underline{\underline{10e^{-x} - 2e^{-4x} - 5\cos x + 3\sin x}}.$$

d) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$

Fra Eksempel 3.2.6 (eller ved å løse den karakteristiske likningen) vet vi at løsningen av den tilhørende homogene likningen er

$$y_h(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}.$$

Siden både e^{-2x} og $x e^{-2x}$ inngår i løsningen av den homogene likningen, er verken Ae^{-2x} eller Axe^{-2x} brukbare som partikulærløsninger. Vi prøver derfor

$$y_p(x) = Ax^2 e^{-2x} \Rightarrow y_p'(x) = A(2x e^{-2x} + x^2 (-2)e^{-2x}) = 2A(x - x^2)e^{-2x}$$

$$\Rightarrow y_p''(x) = 2A(1 - 2x)e^{-2x} + 2A(x - x^2)(-2)e^{-2x} = 2A(1 - 4x + 2x^2)e^{-2x}$$

Setter disse uttrykkene inn i differensiallikningen og ordner:

$$y_p'' + 4y_p' + 4y_p = e^{-2x}$$

$$2A(1 - 4x + 2x^2)e^{-2x} + 4 \cdot 2A(x - x^2)e^{-2x} + 4Ax^2 e^{-2x} = e^{-2x}$$

$$A(2 - 8x + 4x^2 + 8x - 8x^2 + 4x^2) = 1$$

$$A \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{A = \frac{1}{2}}}$$

Partikulærløsningen blir altså

$$y_p(x) = \underline{\underline{\frac{1}{2} x e^{-2x}}}.$$

Den generelle løsningen av differensiallikningen blir da

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \underline{\underline{C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + \frac{1}{2} x^2 e^{-2x}}}.$$

Finner konstantene:

$$y'(x) = -2C_1 e^{-2x} + C_2(1 \cdot e^{-2x} + x(-2)e^{-2x}) + \frac{1}{2}(2x e^{-2x} + x^2(-2)e^{-2x})$$

$$y(0) = C_1 e^0 + C_2 \cdot 0 \cdot e^0 + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot e^0 = \underline{\underline{C_1 = 3}}$$

$$y'(0) = -2C_1 e^0 + C_2(1 \cdot e^0 + 0) + \frac{1}{2} \cdot 0 = -2C_1 + C_2 = 0$$

Da blir

$$C_2 = 2C_1 = 2 \cdot 3 = 6,$$

slik at løsningen blir

$$y(x) = \underline{\underline{3e^{-2x} + 6xe^{-2x} + \frac{1}{2}x^2e^{-2x}}}.$$

Som du ser, er det mye pirkarbeid når vi først skal finne den generelle løsningen av den homogene likningen, deretter finne en partikulær løsning, og til slutt bestemme konstantene slik at startbetingelsene er oppfylt. Trøst deg med at når vi kommer bort i slike likninger i praksis, er vi sjelden interessert i å finne disse konstantene. Differensiallikningen er ofte en matematisk modell av et fysisk system. Da ønsker vi vanligvis en generell løsning, uavhengig av starttilstanden.

Løs [Oppgave 3.3.2](#), [Oppgave 3.3.3](#).

Etter litt trening vil du oppdage at metoden ovenfor faktisk er ganske grei dersom $r(x)$ har en ”pen” form. Den er derfor blitt en slags standardmetode. Men noen ganger svikter metoden. Da kan det være kjekt å ha metoden nedenfor til disposisjon.

3.3.3. Lagranges metode (variasjon av parametre).

Denne metoden benytter seg av en formel for å finne en partikulær løsning. Metoden kan brukes i mange situasjoner der ubestemte koeffisienters metode ikke kan brukes. Oppskriften ser slik ut:

La $p(x)$, $q(x)$ og $r(x)$ være funksjoner som er kontinuerlige i et intervall I .

La videre $y_1(x)$ og $y_2(x)$ være to lineært uavhengige løsninger til differensiallikningen

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = 0$$

i dette intervallet.

I dette intervallet har da differensiallikningen

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = r(x)$$

en partikulær løsning

$$y_p(x) = y_2(x) \cdot \int \frac{y_1(x) \cdot r(x)}{W(x)} dx - y_1(x) \cdot \int \frac{y_2(x) \cdot r(x)}{W(x)} dx$$

der

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

er Wronski-determinanten til $y_1(x)$ og $y_2(x)$.

Merknad: Dersom du tar med integrasjonskonstanter når du løser integralene, får du løsningen av den tilhørende homogene likningen med "på kjøpet". Det er derfor vanlig å sløyfe disse integrasjonskonstantene.

Du finner bevis for setningen i [vedlegget](#).

Svakheten ved denne metoden er at den ofte fører til integraler som er vanskelig å løse. Men når først integralene lar seg løse, er den grei å ty til slik eksemplene nedenfor viser.

Eksempel 3.3.3: Finn en partikulær løsning til disse differensiallikningene:

a) $y'' + y = \sin x$

b) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$ (se Eksempel 3.3.2d)

Løsning:

a) Vi løser først den tilhørende homogene likningen. Den karakteristiske likningen blir

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i.$$

To lineært uavhengige løsninger av den homogene likningen blir da

$$y_1(x) = \cos x, \quad y_2(x) = \sin x.$$

Da blir

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

slik at vi får en partikulær løsning

$$\begin{aligned} y_p(x) &= y_2(x) \cdot \int \frac{y_1(x) \cdot r(x)}{W(x)} dx - y_1(x) \cdot \int \frac{y_2(x) \cdot r(x)}{W(x)} dx \\ &= \sin x \cdot \int \frac{\cos x \cdot \sin x}{1} dx - \cos x \cdot \int \frac{\sin x \cdot \sin x}{1} dx \end{aligned}$$

Det første integralet kan for eksempel løses ved å benytte at

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

slik at

$$\int \cos x \cdot \sin x dx = \int \frac{1}{2} \sin(2x) dx = -\frac{1}{4} \cos(2x),$$

mens

$$\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x)$$

slik at

$$\int \sin^2 x dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x) \right) dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin(2x).$$

Dermed blir

$$\begin{aligned} y_p(x) &= -\frac{1}{4} \sin x \cdot \cos(2x) - \cos x \cdot \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin(2x) \right) \\ &= -\frac{1}{2} x \cdot \cos x + \frac{1}{4} (\cos x \cdot \sin(2x) - \sin x \cdot \cos(2x)) \end{aligned}$$

Vi kan forenkne dette uttrykket slik:

$$\cos x \cdot \sin(2x) - \sin x \cdot \cos(2x) = \cos x \cdot 2 \sin x \cos x - \sin x (2 \cos^2 x - 1) = \sin x.$$

Men $\sin x$ inngår allerede i $y_p(x)$. Vi trenger ikke ta det med en gang til. Vår partikulære løsning reduseres da til

$$\underline{\underline{y_p(x) = -\frac{1}{2} x \cdot \cos x.}}$$

- b) Fra Eksempel 3.3.2d vet vi at den tilhørende homogene likningen har to lineært uavhengige løsninger

$$y_1(x) = e^{-2x} \quad \text{og} \quad y_2(x) = xe^{-2x}.$$

Da blir

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & e^{-2x} - 2xe^{-2x} \end{vmatrix} \\ &= e^{-2x}(e^{-2x} - 2xe^{-2x}) + 2e^{-2x} \cdot xe^{-2x} = e^{-2x} \cdot e^{-2x} = e^{-4x} \end{aligned}$$

slik at vi får en partikulær løsning

$$\begin{aligned} y_p(x) &= y_2(x) \cdot \int \frac{y_1(x) \cdot r(x)}{W(x)} dx - y_1(x) \cdot \int \frac{y_2(x) \cdot r(x)}{W(x)} dx \\ &= xe^{-2x} \cdot \int \frac{e^{-2x} \cdot e^{-2x}}{e^{-4x}} dx - e^{-2x} \cdot \int \frac{xe^{-2x} \cdot e^{-2x}}{e^{-4x}} dx \\ &= xe^{-2x} \cdot \int 1 dx - e^{-2x} \cdot \int x dx = xe^{-2x} \cdot x - e^{-2x} \cdot \frac{1}{2} x^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2} x^2 e^{-2x}}} \end{aligned}$$

som stemmer med resultatet fra Eksempel 3.3.2d.

3.4. Høyere ordens lineære differensiallikninger.

De prinsippene vi har sett på for å løse lineære 2. ordens differensiallikninger, kan uten videre generaliseres til høyere ordens likninger. Vi skal ikke fordype oss i teori, men skal heller se på eksempler:

Eksempel 3.4.1: Finn den generelle løsningen av disse differensiallikningene:

a) $y''' + 4y'' - y' - 4y = 0$

b) $y''' + 2y'' + y' + 2y = 8e^{-x}$

Løsning:

- a) Setter opp den karakteristiske likningen:

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 - \lambda - 4 = 0$$

Denne likningen løses med litt kreativ faktorisering:

$$\lambda^2(\lambda + 4) - (\lambda + 4) = 0$$

$$(\lambda + 4)(\lambda^2 - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda + 4)(\lambda + 1)(\lambda - 1) = 0$$

Nå ser vi løsningen $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$.

Den generelle løsningen av differensiallikningen blir derfor

$$\underline{\underline{y(x) = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^x.}}$$

- b) Løser først den homogene likningen, og setter opp den karakteristiske likningen:

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$$

Vi faktoreriserer etter samme prinsipp som før:

$$\lambda^2(\lambda + 2) + (\lambda + 2) = 0$$

$$(\lambda + 2)(\lambda^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 2)(\lambda + i)(\lambda - i) = 0$$

Nå ser vi løsningen $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -i$, $\lambda_3 = i$.

λ_1 fører nå til at den generelle løsningen av den homogene differensiallikningen må inneholde et ledd $C_1 e^{-2x}$, mens λ_2 og λ_3 gir opphav til ledd av formen

$$e^{0x}(B_1 \cos(1x) + B_2 \sin(1x)) = B_1 \cos x + B_2 \sin x.$$

Løsningen av den homogene likningen blir derfor

$$y_h(x) = \underline{C_1 e^{-2x} + B_1 \cos x + B_2 \sin x}.$$

Så går vi på jakt etter en partikulær løsning av formen

$$y_p(x) = Ae^{-x} \Rightarrow y_p'(x) = -Ae^{-x} \Rightarrow y_p''(x) = Ae^{-x} \Rightarrow y_p'''(x) = -Ae^{-x}.$$

Innsetting:

$$-Ae^{-x} + 2Ae^{-x} - Ae^{-x} + 2Ae^{-x} = 8e^{-x}.$$

Multipliserer med e^x og samler ledd:

$$2A = 8 \Leftrightarrow A = 4.$$

Dermed er den generelle løsningen av den inhomogene likningen

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \underline{\underline{C_1 e^{-2x} + B_1 \cos x + B_2 \sin x + 4e^{-x}}}.$$

Oppgave 3.4.1.

3.5. System av lineære 1.ordens differensiallikninger.

Det fins flere metoder til å løse system av lineære 1.ordens differensiallikninger. I denne omgang skal vi se på den metoden som ofte virker mest nærliggende: Vi skal omforme et sett av n lineære 1.ordens differensiallikninger til en n 'te ordens differensiallikning. Vi skal imidlertid begrense oss til $n = 2$, slik at et system av 2 lineære 1.ordens differensiallikninger omformes til en 2.ordens differensiallikning.

Istedenfor å fordype oss i teori, skal vi se på et eksempel:

Eksempel 3.5.1:

Løs likningssystemet nedenfor ved å omforme det til en lineær 2.ordens differensiallikning.

$$y_1' = 2y_1 - 3y_2, \quad y_1(0) = 5$$

$$y_2' = -y_1 + 3e^{2x}, \quad y_2(0) = -2$$

Løsning: Vi skal bruke en slags eliminasjons- og innsetningsmetode. Vi finner en av de ukjente fra den likningen som *ikke* inneholder den deriverte av den ukjente, deriverer, og setter inn i den andre likningen. Dette innebærer at vi kan finne y_1 av likningen for y_2' , eller vi kan finne y_2 av likningen for y_1' . Jeg velger å finne y_1 av likningen for y_2' :

$$y_2' = -y_1 + 3e^{2x} \Leftrightarrow y_1 = -y_2' + 3e^{2x}.$$

Dette deriveres:

$$y_1' = -y_2'' + 6e^{2x}.$$

Så setter vi inn i likningen for y_1' slik at vi får en likning som kun inneholder y_2 og dens deriverte:

$$\begin{aligned}y_1' &= 2y_1 - 3y_2 \\ -y_2'' + 6e^{2x} &= 2(-y_2' + 3e^{2x}) - 3y_2 \\ -y_2'' + 6e^{2x} &= -2y_2' + 6e^{2x} - 3y_2 \\ y_2'' - 2y_2' - 3y_2 &= 0\end{aligned}$$

Dette er en lineær, homogen 2.ordens differensiallikning med konstante koeffisienter. Vi løser den på vanlig måte. Den karakteristiske likningen blir

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}.$$

Nå kan vi sette opp den generelle løsningen for $y_2(x)$:

$$y_2(x) = \underline{C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}}.$$

Så må vi finne $y_1(x)$. Vi kan gå fram på samme måte som før, og finne y_2 av likningen for y_1' , sette inn i den andre likningen, og på den måte får en likning som kun inneholder y_1 . Men som oftest er det enklere å benytte at vi allerede har funnet sammenhengen

$$y_1 = -y_2' + 3e^{2x}.$$

Setter inn for y_2' , og får:

$$\begin{aligned}y_1(x) &= -y_2' + 3e^{2x} \\ &= -(C_1 \cdot 3e^{3x} + C_2(-e^{-x})) + 3e^{2x} \\ &= \underline{-3C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} + 3e^{2x}}\end{aligned}$$

Til slutt finner vi konstantene C_1 og C_2 :

$$\begin{aligned}y_1(0) = 5 &\Leftrightarrow -3C_1 e^0 + C_2 e^0 + 3e^0 = 5 \Leftrightarrow -3C_1 + C_2 = 2. \\ y_2(0) = -2 &\Leftrightarrow C_1 e^0 + C_2 e^0 = -2 \Leftrightarrow C_1 + C_2 = -2.\end{aligned}$$

Trekker disse likningene fra hverandre, og får

$$-4C_1 = 4 \Leftrightarrow \underline{C_1 = -1}.$$

Da blir

$$C_2 = -2 - C_1 = -2 - (-1) = \underline{-1}.$$

Løsningen av likningssystemet blir da:

$$\begin{aligned}y_1(x) &= -3(-1)e^{3x} + (-1)e^{-x} + 3e^{2x} = \underline{3e^{3x} - e^{-x} + 3e^{2x}}. \\ y_2(x) &= (-1)e^{3x} + (-1)e^{-x} = \underline{\underline{-e^{3x} - e^{-x}}}.\end{aligned}$$

Oppgave 3.5.1.

Så lenge vi har to likninger med to ukjente, er denne metoden forholdsvis grei, spesielt dersom vi skal finne den generelle løsningen slik at vi slipper å beregne konstantene C_1 og

C_2 . Men dersom vi har mer enn to ukjente, blir det fort mer komplisert. Prinsippet er at du systematisk eliminerer en ukjent om gangen. Dersom du har et likningssystem med 3 ukjente, kan du starte med å finne y_3 av en likning som *ikke* inneholder y_3' , derivere denne, og sette inn over alt hvor du finner y_3 eller y_3' . Dermed får du et likningssystem med "bare" y_1 og y_2 samt deres deriverte.

I heftet om matriseregning skal vi vise en annen metode for å løse slike system av lineære 1.ordens differensiallikninger. I et annet hefte om Laplace-transform skal vi se på enda en metode.

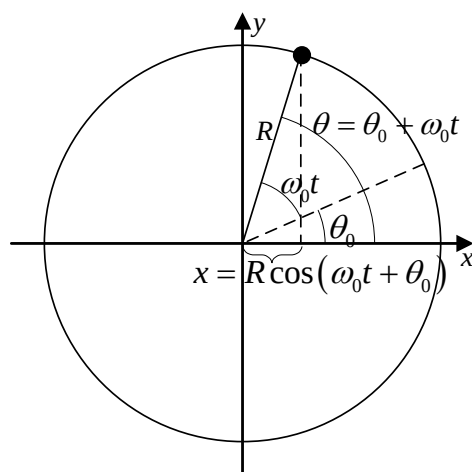
4. Svingninger.

4.1. Innledning.

Svingninger er helt vanlig i fysiske systemer. Som barn har du sikkert svingt fram og tilbake eller opp og ned i ei huske på lekeplassen. Som student har du kanskje jumpet opp og ned i en gammel bil med dårlig fjæring på hullete veier. Og hvis du har vært om bord i en båt i grov sjø, har du opplevd en mer kvalmende form for mekaniske svingninger.

Svingninger er også vanlig i elektriske systemer. All vekselstrømslære bygger på svingeteori. Mottaking av radio- og TV-signaler bygger på resonans mellom en elektrisk svingekrets og de mottatte signalene. Så du skjønner sikkert at en ingeniør bør kjenne til teorien for svingninger og resonans.

I denne innledningen skal jeg ta for meg noen hovedtrekk av teorien for slike svingninger. Jeg skal definere et par sentrale begreper, og jeg skal vise hvordan frie, udempede svingninger kan oppstå i et enkelt mekanisk system. Mer realistiske situasjoner med damping og ytre krefter, samt resonans, vil bli behandlet senere. Da vil jeg også gi en kort omtale av elektriske svingninger.



Vi skal starte med å se nærmere på en velkjent periodisk bevegelse: en partikkel som beveger seg med konstant vinkelfart ω_0 (målt i radianer pr sekund) i en sirkelbane med radius R . Dersom vi starter klokka idet linja fra origo til partikkelen danner en startvinkel θ_0 med x -aksen, vil partikkelen etter en tid t ha tilbakelagt en vinkel

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t.$$

Da er x -komponenten til partikkelens posisjon

$$x(t) = R \cos \theta = R \cos(\theta_0 + \omega_0 t).$$

Denne x -komponenten vil bevege seg fram og tilbake, omtrent som en pendel.

Den konstante vinkelfarten ω_0 kalles gjerne *vinkelfrekvensen* fordi den angir hvor mange *radianer* som tilbakelegges pr sekund. Dette må ikke forveksles med *frekvensen* som angir hvor mange hele svingninger som gjennomføres pr sekund. Siden en hel svingning utgjør 2π radianer, er sammenhengen mellom frekvensen f og vinkelfrekvensen ω_0 gitt ved

$$\omega_0 = 2\pi \cdot f \quad \Leftrightarrow \quad f = \frac{\omega_0}{2\pi}.$$

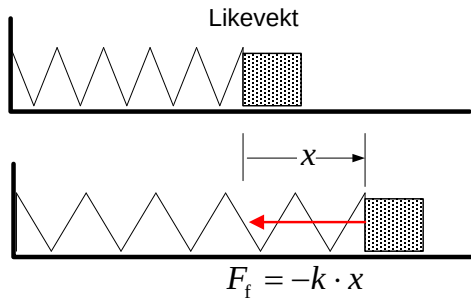
Frekvensen angir altså antall hele svingninger pr sekund (eller s^{-1}), som også benevnes *Hertz* (Hz).

En annen viktig størrelse er *svingetiden* eller *perioden* T , som er gitt ved

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Perioden angis helst i *sekund*.

4.2. Et kloss-fjær-system.



La oss nå se på et annet svingesystem som tilsynelatende er helt forskjellig fra partikkelen som går i sirkelbane med konstant vinkelfart. Vi skal se på en kloss med masse m som kan gli uten friksjon på en horisontal flate. Klossen er festet til ei fjær som har fjærkonstant k . Dersom fjæra forskyves en strekning x fra likevekt, vil fjæra trekke eller skyve klossen med en kraft

$$F_f = -k \cdot x$$

der minustegnet angir at kraften alltid har motsatt retning av forskyvningen x fra likevekt. Klossens tyngde og normalkraften fra underlaget er motsatt like store, og tas derfor ikke med i kraftregnskapet.

Ifølge Newtons 2. lov vil denne kraften gi klossen en akselerasjon a gitt ved

$$F = m \cdot a \Leftrightarrow -k \cdot x = m \cdot a.$$

Nå må vi benytte at farten v er posisjonsendring pr tidsenhet, slik at

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

og at akselerasjonen a er fartsendring pr tidsenhet slik at

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Dermed blir Newtons 2. lov:

$$F = m \cdot a \Leftrightarrow -k \cdot x = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} \Leftrightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0.$$

Dette er en lineær 2. ordens differensiallikning. Vi setter opp og løser den karakteristiske likningen

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}}$$

der i er den imaginære enheten. Løsningen av differensiallikningen kan skrives på mange måter, for eksempel slik:

$$x(t) = A \cdot e^{0t} \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi \right) = A \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi \right).$$

Men dette minner jo påfallende om uttrykket for x -komponenten til partikkelen som går i sirkelbane:

$$x(t) = R \cos \theta = R \cos(\theta_0 + \omega_0 t).$$

Disse uttrykkene blir like dersom vi setter

$$R = A, \quad \theta_0 = \varphi, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Vi ser altså at klossen som er festet til ei fjær beveger seg på nøyaktig samme måte som x -komponenten til en partikkel som går i sirkelbane med konstant vinkelfart. Vi finner også frekvens og periode for svingebevegelsen uttrykt ved klossens masse og fjærkonstanten.

Vi oppsummerer:

Når en partikkel med masse m påvirkes av en kraft $F = -k \cdot x$, er partikkelens posisjon gitt ved differensiallikningen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

Denne likningen har løsningen

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

der vinkelfrekvensen ω_0 og perioden T er gitt ved

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

En slik bevegelse kalles en **enkel harmonisk svingning**, og partikkelen er en **harmonisk oscillator**.

Eksempel 4.2.1: Ei elastisk fjær med fjærstivheten $k = 200 \text{ N/m}$ er plassert horisontalt. Den ene enden av fjæra er fast i en vegg, mens den andre enden er festet til et legeme med massen $m = 0.50 \text{ kg}$ som ligger på et friksjonsfritt, horisontalt underlag. Vi drar legemet bort fra likevekt og slipper. Bestem vinkelfrekvensen, frekvensen og perioden til de resulterende oscillasjonene.

Løsning:

Siden det ikke virker andre horisontale krefter på legemet, er krafta på legemet gitt ved

$$F = -kx.$$

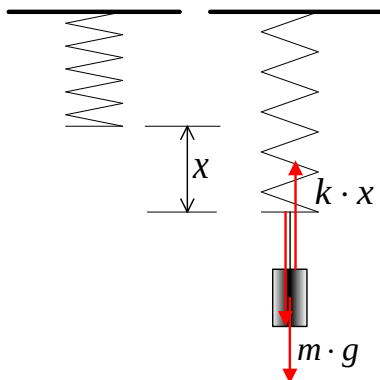
Dermed er legemet en harmonisk oscillator. Da vet vi at

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200 \text{ N/m}}{0.50 \text{ kg}}} = \underline{\underline{20 \text{ rad/s}}}.$$

Da er:

$$\text{Frekvens} \quad f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{20 \text{ rad/s}}{2\pi} = \underline{\underline{3.2 \text{ s}^{-1}}}.$$

$$\text{Periode} \quad T = \frac{1}{f} = \frac{1}{3.2 \text{ s}^{-1}} = \underline{\underline{0.31 \text{ s}}}.$$



Hva skjer dersom vi lar kloss-fjær-systemet henge fritt under påvirkning av tyngdekraften mg ? I figuren til venstre antar vi at fjæra er så lett at vi kan se bort fra fjæras egen masse. Så henger vi opp loddet og setter det i svingninger.

Vi legger inn et koordinatsystem med positiv retning *nedover*. Når fjæra er strekt en strekning x , påvirkes klossen av en kraftsum

$$F = mg - kx.$$

Da blir Newtons 2. lov

$$F = m \cdot a \Leftrightarrow mg - kx = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = g.$$

Dette er en inhomogen differensiallikning. Vi vet at løsningen kan skrives på formen

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

der vi allerede vet at

$$x_h(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \text{ der } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Det er nå rimelig å anta at $x_p(t)$ er en konstant x_0 siden høyresiden av differensiallikningen er en konstant. Vi setter inn i likningen, og får

$$0 + \frac{k}{m}x_0 = g \Leftrightarrow x_0 = \frac{mg}{k}.$$

Dermed har vi at

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = \underline{\underline{A \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{mg}{k}}}.$$

La oss se nærmere på uttrykket $x_0 = \frac{mg}{k}$. Det kan lett omformes til $mg = kx_0$, som sier at tyngdekraften er lik kraften i fjæra (men motsatt rettet). Dette er en likevektsposisjon der klossen kan henge i ro. Løsningen sier altså at klossen vil svinge om denne likevektsposisjonen på samme måte som om den lå på et friksjonsfritt underlag.

Dette er et overraskende resultat. Sammen med uttrykket for perioden

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

ser vi at **perioden avhenger kun av fjærkonstanten k og massen m , og avhenger ikke av tyngdens akselerasjon g eller av hvor stort utslaget er, eller av om klossen henger fritt eller glir på et vannrett, friksjonsfritt underlag.**

Hittil har vi kun sett på et kloss-fjær-system. Men det fins en mengde andre mekaniske system som oppfører seg på nøyaktig samme måte. Du finner et lite utvalg i et [vedlegg](#).

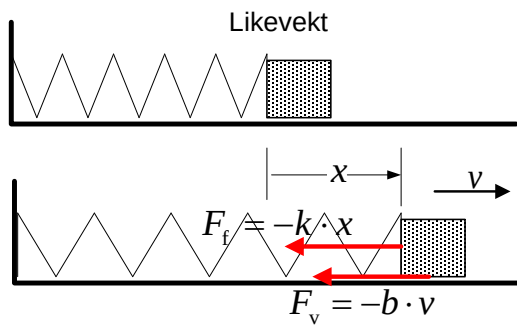
4.3. Dempede svingninger.

4.3.1. Likningen for en dempet svingning.

I innledningen så vi på et kloss-fjær-system uten friksjon. Nå skal vi trekke inn friksjon, og vi skal begrense oss til en form for friksjon som kalles *viskøs friksjon*. Denne karakteriseres ved at friksjonskraften er proporsjonal med farten og har motsatt retning av fartsretningen:

$$F_v = -b \cdot v.$$

Her er b en dempingsfaktor som gis i $\text{N}/(\text{m/s})$. Denne formen for friksjon er vanlig når man skal lage en enkel matematisk modell av luftmotstand eller vannmotstand, der b avhenger av legemets størrelse og form, og selvsagt av hvilket medium legemet beveger seg i.



Figuren til venstre antyder at Newtons 2. lov blir $-k \cdot x - b \cdot v = m \cdot a$.

Så setter vi inn at $v = \frac{dx}{dt}$ og at $a = \frac{d^2x}{dt^2}$, og får

$$\begin{aligned} -k \cdot x - b \cdot \frac{dx}{dt} &= m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \\ \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} \cdot x &= 0 \end{aligned}$$

Vi ser at når $b = 0$ vil denne likningen reduseres til vår velkjente likning for en udempet svingning:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$$

eller generelt

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot x = 0$$

der $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ for vårt kloss-fjær-system. Nå viser det seg at helt tilsvarende likninger dukker opp i en mengde andre situasjoner. Vi skal derfor gi likningen en mer generell form:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \cdot \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 \cdot x = 0$$

der $\delta = \frac{b}{2m}$ for vårt kloss-fjær-system. Det merkelige 2-tallet skyldes at vi etter hvert får enklere uttrykk ved å sette det inn her. Vi summerer opp:

Likningen for en dempet svingning er

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

Her er δ og ω_0 positive konstanter.

For et kloss-fjær-system er $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ og $\delta = \frac{b}{2m}$.

4.3.2. Vi løser likningen.

På vanlig måte løser vi likningen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

ved å sette opp og løse den karakteristiske likningen:

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{-2\delta \pm \sqrt{(2\delta)^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}.$$

Nå må vi skille mellom tre tilfeller:

1. Dersom dempingen er så liten at $0 \leq \delta < \omega_0$, får vi et negativt tall under rottegnet. Vi skriver da

$$\lambda = -\delta \pm \sqrt{-(\omega_0^2 - \delta^2)} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \underline{-\delta \pm i\omega}$$

der vi har innført

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

Løsningen av differensiallikningen kan da skrives på formen

$$\underline{x(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)}.$$

Siden $\delta > 0$, er dette en cosinus-svingning der amplituden $Ae^{-\delta t}$ avtar med tiden og går mot null. Denne situasjonen kaller vi **underdamping**, og vi sier at vi får en **underdempet svingning** (ofte bare kalt *dempet svingning*). Dette er en svært vanlig situasjon, og er behandlet spesielt i et lite [tillegg](#).

2. Dersom dempingen er så stor at $\delta > \omega_0$, får vi et positivt tall under rottegnet. Den karakteristiske likningen får da to forskjellige reelle røtter λ_1 og λ_2 . Løsningen av differensiallikningen blir derfor

$$\underline{x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}}.$$

Nå blir både λ_1 og λ_2 negative tall fordi $\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} < \sqrt{\delta^2} = \delta$. Altså vil $x(t) \rightarrow 0$ når $t \rightarrow \infty$. Dette er helt naturlig fordi friksjonen fører til at bevegelsen stanser. Vi får faktisk ingen svinging i det hele tatt. Bevegelsen stopper idet klossen er tilbake i likevektsposisjonen. Denne situasjonen kaller vi **overdamping**.

3. På grensen mellom underdamping og overdamping er $\delta = \omega_0$. Dette spesialtilfellet kalles **kritisk damping**, og spiller liten rolle i praksis. For fullstendighetens skyld kan vi likevel ta med at den karakteristiske likningen da får to like røtter

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta,$$

slik at løsningen av differensiallikningen blir

$$\underline{x(t) = C_1 e^{-\delta t} + C_2 t \cdot e^{-\delta t}}.$$

Det er ikke meningen at du skal gå rundt og huske disse formlene. Du bør heller merke deg hvordan vi setter opp differensiallikningen, og løse den. Når jeg nå skal se på et eksempel med vårt kloss-fjær-system, vil jeg sette opp differensiallikningen ut fra Newtons 2. lov og løse derfra.

Eksempel 4.3.1: Vi har et kloss-fjær-system der klossen har masse $m = 0.20 \text{ kg}$ mens fjærkonstanten er $k = 20 \text{ N/m}$.

- a) Finn den generelle løsningen av svingelikningen i disse tilfellene:

- 1) $b = 0$ (udempet svingning)
- 2) $b = 1.12 \text{ N/(m/s)}$.
- 3) $b = 5.0 \text{ N/(m/s)}$.
- 4) Finn den verdien av b som gir kritisk damping, og finn den generelle løsningen av svingelikningen i dette tilfellet.

- b) Klossen dras ut en strekning $x_0 = 0.10\text{m}$ og slippes uten startfart. Finn klossens posisjon x som funksjon av tiden t i de fire tilfellene som er angitt ovenfor, og tegn grafen til $x(t)$ i disse tilfellene.

Løsning:

a) Newtons 2. lov gir

$$F = m \cdot a \Leftrightarrow -b \cdot v - k \cdot x = m \cdot a \Leftrightarrow -b \cdot \frac{dx}{dt} - k \cdot x = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} \cdot x = 0.$$

Setter inn de oppgitte dataene, ser bort fra benevninger og får

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{0.20} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{20}{0.20} \cdot x = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 5b \cdot \frac{dx}{dt} + 100x = 0.$$

a1) Når $b = 0$ reduseres svinglikningen til

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 100x = 0.$$

Den karakteristiske likningen blir

$$\lambda^2 + 100 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{-100} = \pm 10i.$$

Løsningen av svingelikningen kan da skrives

$$\underline{\underline{x(t) = A \cdot \cos(10t + \varphi)}}.$$

a2) Når $b = 1.12$ blir svinglikningen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5 \cdot 1.12 \frac{dx}{dt} + 100x = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 5.6 \frac{dx}{dt} + 100x = 0.$$

Den karakteristiske likningen blir

$$\lambda^2 + 5.6\lambda + 100 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{-5.6 \pm \sqrt{5.6^2 - 4 \cdot 100}}{2} = \frac{-5.6 \pm \sqrt{-368.64}}{2} = \frac{-5.6 \pm 19.2i}{2} = \underline{\underline{-2.8 \pm 9.6i}}$$

Løsningen av svingelikningen kan da skrives

$$\underline{\underline{x(t) = A \cdot e^{-2.8t} \cdot \cos(9.6t + \varphi)}}.$$

a3) Når $b = 5.0$ blir svinglikningen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5 \cdot 5.0 \frac{dx}{dt} + 100x = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 25 \frac{dx}{dt} + 100x = 0.$$

Den karakteristiske likningen blir

$$\lambda^2 + 25\lambda + 100 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{-25 \pm \sqrt{25^2 - 4 \cdot 100}}{2} = \frac{-25 \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{-25 \pm 15}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -5 \\ \lambda_2 = -20 \end{cases}$$

Løsningen av svingelikningen kan da skrives

$$\underline{\underline{x(t) = C_1 e^{-5t} + C_2 e^{-20t}}}.$$

a4) I det generelle tilfellet er den karakteristiske likningen

$$\lambda^2 + 5b \cdot \lambda + 100 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-5b \pm \sqrt{(5b)^2 - 4 \cdot 100}}{2} = \frac{-5b \pm \sqrt{25b^2 - 400}}{2}.$$

Vi får kritisk demping når

$$25b^2 - 400 = 0 \Leftrightarrow b^2 = 16 \Leftrightarrow \underline{b = 4} \text{ (husk at } b \text{ må være positiv).}$$

Da blir

$$\lambda = \frac{-5 \cdot 4}{2} = \underline{-10}$$

slik at løsningen av svingelikningen blir

$$\underline{x(t) = e^{-10t} (C_1 + C_2 t)}.$$

b) Av opplysningene i oppgaven kan vi uten videre sette opp at

$$\underline{x(0) = 0.10}.$$

Når klossen slippes uten startfart, er

$$v(0) = 0 \Leftrightarrow \underline{\frac{dx}{dt}(0) = 0}.$$

Dette gir to likninger som vi kan finne de ukjente konstantene fra.

$$b1) \quad x(t) = A \cdot \cos(10t + \varphi) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = A \cdot 10(-\sin(10t + \varphi))$$

De to startbetingelsene gir nå

$$x(0) = 0.10 \Leftrightarrow A \cdot \cos(10 \cdot 0 + \varphi) = 0.10 \Leftrightarrow A \cos \varphi = 0.10. \quad (1)$$

$$\frac{dx}{dt}(0) = 0 \Leftrightarrow 10A(-\sin(10 \cdot 0 + \varphi)) = 0 \Leftrightarrow A \sin \varphi = 0. \quad (2)$$

Av (2) får vi $\varphi = 0$ eller $\varphi = \pi$. For å få positiv A i (1), må vi bruke $\underline{\varphi = 0}$. Da blir

$$A \cdot \cos 0 = 0.10 \Leftrightarrow \underline{A = 0.10}.$$

Løsningen blir da

$$\underline{x(t) = 0.10 \cos(10t)}$$

$$b2) \quad x(t) = A \cdot e^{-2.8t} \cdot \cos(9.6t + \varphi)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A(-2.8 \cdot e^{-2.8t} \cdot \cos(9.6t + \varphi) + e^{-2.8t}(-9.6) \sin(9.6t + \varphi)) \\ &= -Ae^{-2.8t} (2.8 \cos(9.6t + \varphi) + 9.6 \sin(9.6t + \varphi)) \end{aligned}$$

De to startbetingelsene gir nå

$$x(0) = 0.10 \Leftrightarrow A \cdot e^{-2.8 \cdot 0} \cdot \cos(9.6 \cdot 0 + \varphi) = 0.10 \Leftrightarrow A \cos \varphi = 0.10. \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(0) &= 0 \Leftrightarrow -Ae^{-2.8 \cdot 0} (2.8 \cos(9.6 \cdot 0 + \varphi) + 9.6 \sin(9.6 \cdot 0 + \varphi)) = 0 \\ &\Leftrightarrow A(2.8 \cos \varphi + 9.6 \sin \varphi) = 0 \Leftrightarrow 9.6 \sin \varphi = -2.8 \cos \varphi \\ &\Leftrightarrow \tan \varphi = -\frac{2.8}{9.6} \Leftrightarrow \varphi = \underline{-0.284} \vee \varphi = \underline{2.858} \end{aligned} \quad (2)$$

Merk at vi må oppgi vinkelen i radianer.

For å få positiv A i (1), må vi bruke $\underline{\varphi = -0.284}$. Da blir

$$A \cdot \cos(-0.284) = 0.10 \Leftrightarrow \underline{A = 0.104}.$$

Løsningen blir da

$$\underline{x(t) = 0.104 \cdot e^{-2.8t} \cdot \cos(9.6t - 0.284)}$$

$$\text{b3)} \quad x(t) = C_1 e^{-5t} + C_2 e^{-20t} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -5C_1 e^{-5t} - 20C_2 e^{-20t}.$$

De to startbetingelsene gir nå

$$x(0) = 0.10 \Leftrightarrow C_1 e^{-5 \cdot 0} + C_2 e^{-20 \cdot 0} = 0.10 \Leftrightarrow C_1 + C_2 = 0.10. \quad (1)$$

$$\frac{dx}{dt}(0) = 0 \Leftrightarrow -5C_1 e^{-5 \cdot 0} - 20C_2 e^{-20 \cdot 0} = 0 \Leftrightarrow -C_1 - 4C_2 = 0. \quad (2)$$

Vi legger sammen likningene, og får

$$-3C_2 = 0.10 \Leftrightarrow C_2 = \underline{-0.033}.$$

Da blir

$$C_1 = -4C_2 = -4 \cdot (-0.033) = \underline{0.133}$$

Løsningen blir da

$$\underline{x(t) = 0.133e^{-5t} - 0.033e^{-20t}}.$$

$$\text{b4)} \quad x(t) = e^{-10t} (C_1 + C_2 t)$$

$$\frac{dx}{dt} = -10e^{-10t} (C_1 + C_2 t) + e^{-10t} \cdot C_2 = \underline{e^{-10t} (C_2 - 10C_1 - 10C_2 t)}$$

De to startbetingelsene gir nå

$$x(0) = 0.10 \Leftrightarrow e^{-10 \cdot 0} (C_1 + C_2 \cdot 0) = 0.10 \Leftrightarrow \underline{C_1 = 0.10}. \quad (1)$$

$$\frac{dx}{dt}(0) = 0 \Leftrightarrow e^{-10 \cdot 0} (C_2 - 10 \cdot 0.10 - 10C_2 \cdot 0) = 0 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow C_2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \underline{C_2 = 1}$$

Løsningen blir da

$$\underline{x(t) = e^{-10t} (0.10 + t)}$$

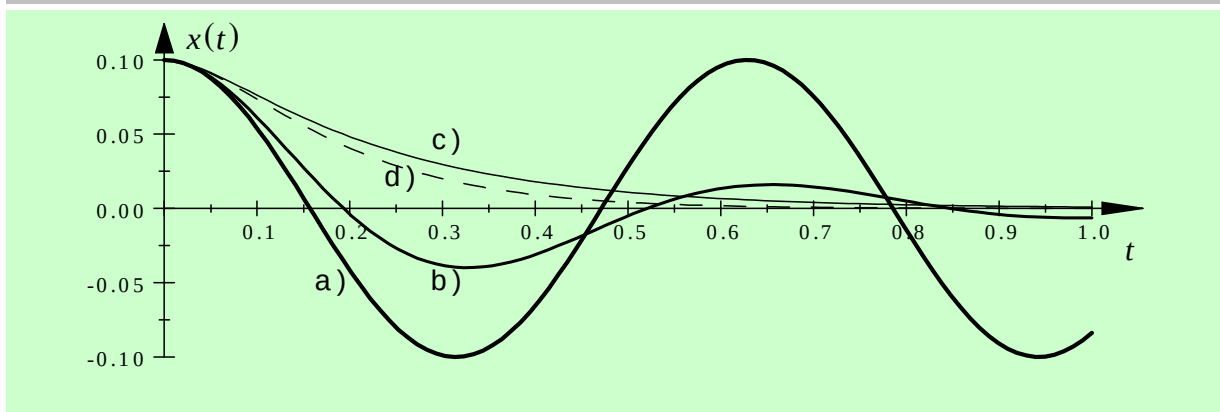
De løsningene vi har funnet i de fire tilfellene, ser svært ulike ut. Men når vi tegner grafene, viser det seg at de ikke blir så ulike likevel. Grafene til funksjonene er vist nedenfor. Der ser du bl.a. at for den udedpede svingningen blir svingetiden

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{10\text{s}^{-1}} \approx 0.628\text{s}.$$

Hvis du ser nøye etter, vil du se at svingetiden for den dempede svingningen er *litt* lengre. Det er rimelig, fordi svingetiden nå blir

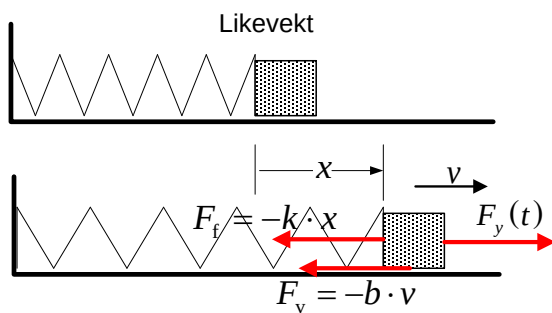
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{9.6\text{s}^{-1}} \approx 0.654\text{s}.$$

Ikke store forskjellen, men så vidt synlig på grafen.



Hittil har vi forutsatt at vårt svingende system ikke utsettes for ytre krefter (mer presist: vektorsummen av eventuelle ytre krefter er lik null). Da vil svingningene før eller senere dø bort, siden det i praksis alltid vil være friksjon til stede. Dersom vi skal opprettholde svingningene, må det være ytre krefter til stede. Da får vi **tvungne svingninger** med mulighet for **resonans**.

4.4. Tvungne svingninger.



Vi skal igjen ta utgangspunkt i et kloss-fjær-system, men skal la systemet påvirkes av en ytre kraft $F_y(t)$ i tillegg til fjærkraft og friksjonskraft. Systemet blir da som vist på figuren til venstre.

Så setter vi opp Newtons 2. lov, og benytter at $v = \frac{dx}{dt}$ og $a = \frac{d^2x}{dt^2}$:

$$F_y(t) - k \cdot x - b \cdot v = m \cdot a \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{1}{m} \cdot F_y(t).$$

Nå er det mange andre systemer som kan utføre svingninger på samme måte som kloss-fjær-systemet vårt. Vi skal derfor se på en mer generell svingelikning:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = Y(t).$$

For kloss-fjær-systemet vårt blir $\delta = \frac{b}{2m}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, og $Y(t) = \frac{F_y(t)}{m}$.

Fra teorien for inhomogene lineære differensiallikninger vet vi at slike likninger har løsning av formen

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

der $x_h(t)$ er løsningen av den tilhørende homogene likningen (d.v.s. en dempet svingning uten ytre påvirkninger) mens $x_p(t)$ er en partikulær løsning av den inhomogene likningen.

Fra våre analyser av dempede svingninger vet vi at utslagene her går mot null fordi de inneholder faktorer og ledd av formen $Ae^{-\delta t}$ der $\delta > 0$, eller $Ae^{\lambda t}$ der $\lambda < 0$. Dette medfører

at $x_h(t) \rightarrow 0$ slik at $x(t) \rightarrow x_p(t)$ når $t \rightarrow \infty$. Vi må derfor konsentrere oss om å finne $x_p(t)$, som forteller oss hvordan systemet vil oppføre seg etter at bidraget fra de frie svingningene er dødd bort på grunn av friksjon.

Vi skal begrense oss til å se på *periodiske* ytre påvirkninger. Den enkleste formen for en periodisk påvirkning er

$$Y(t) = Y_0 \cos(\Omega t)$$

(eller tilsvarende sinus-ledd). Dersom du har vært borti Fourier-rekker, vil du vite at *alle* periodiske funksjoner skal skrives som en sum av slike funksjoner, så det er ikke noen stor begrensning at vi kun ser på cosinus- eller sinus-funksjoner.

Selv om du vet hvordan du finner en slik partikulær løsning, er det nokså plundrete å finne den i dette tilfellet. Jeg har derfor ”gjemt” utledningen i et lite [tillegg](#). Jeg har forresten ikke kunnet motstå fristelsen til å skrive et annet lite tillegg der jeg viser hvordan vi på en enklere måte kan finne en partikulær løsning ved å bruke [komplekse funksjoner](#). Dette siste tillegget kan også være en introduksjon til bruk av komplekse størrelser i [vekselstrømslæra](#).

Resultatet av utregningene i tillegget er summert opp nedenfor.

Vi har svingelikningen

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = Y(t)$$

der

$$Y(t) = Y_0 \cos(\Omega t).$$

Den partikulære løsningen kan skrives

$$x_p(t) = A \cos(\Omega t + \varphi)$$

der

$$A = \frac{Y_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}}$$

og

$$\tan \varphi = -\frac{2\delta \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

La oss se hvordan dette fungerer i praksis.

Eksempel 4.4.1: Vi har et kloss-fjær-system med masse $m = 0.20$ kg, $k = 20$ N/m og $b = 1.0$ N/(m/s). Systemet påvirkes av en ytre kraft

$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t) = (2.0 \text{ N}) \cos(\Omega t).$$

Hvordan blir svingebevegelsen etter at det er inntrådt stabil tilstand når:

- a) $\Omega = 5.0$ rad/s .
- b) $\Omega = 10$ rad/s .
- c) $\Omega = 15$ rad/s .

Løsning: Med de oppgitte størrelsene finner vi:

$$\delta = \frac{b}{2m} = \frac{1.0 \text{ N/(m/s)}}{2 \cdot 0.20 \text{ kg}} = 2.5 \text{ s}^{-1}.$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{20 \text{ N/m}}{0.20 \text{ kg}}} = 10 \text{ rad/s}.$$

$$Y_0 = \frac{F_0}{m} = \frac{2.0 \text{ N}}{0.20 \text{ kg}} = 10 \text{ m/s}^2.$$

Fra formlene i ramma ovenfor finner vi at

$$\tan \varphi = -\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} = -\frac{2 \cdot 2.5 \cdot \Omega}{10^2 - \Omega^2} = -\frac{5\Omega}{100 - \Omega^2}.$$

$$A = \frac{Y_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} = \frac{10}{\sqrt{(10^2 - \Omega^2)^2 + 4 \cdot 2.5^2 \cdot \Omega^2}} = \frac{10}{\sqrt{(100 - \Omega^2)^2 + 25\Omega^2}}.$$

I grafene nedenfor er $Y(t) = Y_0 \cos(\Omega t)$ tegnet med tynn strek, og Y_0 er satt til 0.10 for sammenlikningens skyld. Utslaget $x(t)$ er tegnet med tykk strek.

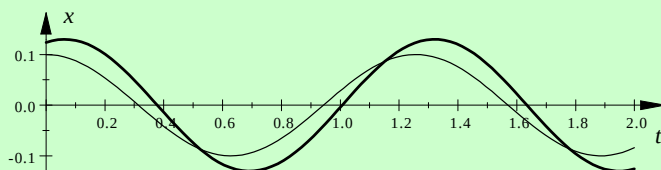
a) Når $\Omega = 5.0 \text{ rad/s}$, blir

$$\tan \varphi = -\frac{5 \cdot 5.0}{100 - 5.0^2} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \varphi = \arctan\left(-\frac{1}{3}\right) = -0.32.$$

$$A = \frac{10}{\sqrt{(100 - 5.0^2)^2 + 25 \cdot 5.0^2}} = 0.13.$$

Utslaget blir altså

$$x(t) = A \cos(\Omega t + \varphi) = \underline{\underline{0.13 \cos(5t - 0.32)}}.$$



Vi ser av grafen at utslaget kommer litt etter den ytre kraften, og at største utslag er litt større enn Y_0 .

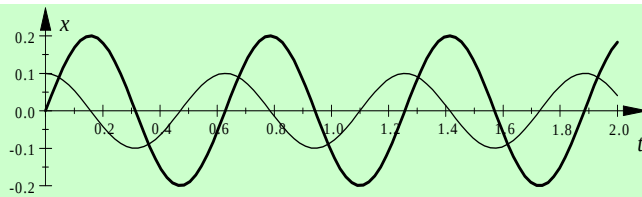
b) Når $\Omega = 10 \text{ rad/s}$, blir

$$\tan \varphi = -\frac{5 \cdot 10}{100 - 10^2} \rightarrow -\infty \Leftrightarrow \varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

$$A = \frac{10}{\sqrt{(100 - 10^2)^2 + 25 \cdot 10^2}} = 0.20.$$

Utslaget blir altså

$$x(t) = A \cos(\Omega t + \varphi) = \underline{\underline{0.20 \cos(10t - \frac{1}{2}\pi)}}.$$



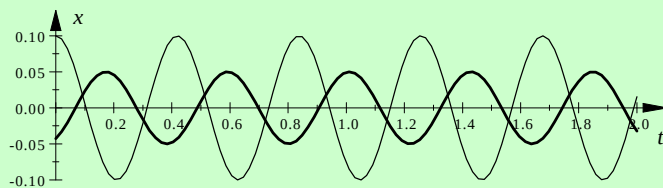
Vi ser av grafen at utslaget kommer klart etter den ytre kraften, og at største utslag er dobbelt så stort som Y_0 .

$$c) \quad \tan \varphi = -\frac{5 \cdot 15}{100 - 15^2} \rightarrow \frac{3}{5} \Leftrightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{3}{5}\right) = 0.54 - \pi = -2.60.$$

$$A = \frac{10}{\sqrt{(100 - 15^2)^2 + 15^2 \cdot 10^2}} = 0.05.$$

Utslaget blir altså

$$x(t) = A \cos(\Omega t + \varphi) = \underline{\underline{0.05 \cos(15t - 2.60)}}.$$



Vi ser av grafen at utslaget kommer klart etter den ytre kraften, og at største utslag er bare halvparten av Y_0 .

Du stusser kanskje over at vi satte $Y_0 = 0.10$ i grafene ovenfor. Dette valget skyldes at dersom vi har en *konstant* kraft med størrelse $F_0 = 2.0 \text{ N}$, vil fjæra forlenges en strekning x_0 gitt ved

$$F_0 = k \cdot x_0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{F_0}{k} = \frac{2.0 \text{ N}}{20 \text{ N/m}} = 0.10 \text{ m}.$$

Vi sammenliknet altså med det utslaget vi ville fått om vi brukte en konstant kraft $F_0 = 2.0 \text{ N}$ istedenfor en varierende kraft

$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t) = (2.0 \text{ N}) \cos(\Omega t).$$

Den viktigste lærdommen vi kan trekke av eksemplet ovenfor, er at amplituden til svingningene avhenger av frekvensen til den ytre kraften. Både for $\Omega = 5.0 \text{ rad/s}$ og for $\Omega = 10 \text{ rad/s}$ blir utslaget større enn om vi brukte en tilsvarende konstant kraft. Men for $\Omega = 15 \text{ rad/s}$ blir utslaget mindre. Denne effekten skal vi studere nærmere i neste avsnitt.

4.5. Resonans.

I forrige avsnitt fant vi at når svingesystemet gitt ved

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = Y(t)$$

påvirkes av en ytre påvirkning

$$Y(t) = Y_0 \cos(\Omega t),$$

er utslaget gitt ved

$$x(t) = A \cos(\Omega t + \varphi)$$

der

$$A = \frac{Y_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}$$

og

$$\tan \varphi = -\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

I eksempel 4.1 så vi hvordan A avhenger av vinkelfrekvensen Ω til den ytre påvirkningen. Vi så også at for visse verdier av Ω kan A bli større enn om systemet påvirkes av en *konstant* påvirkning Y_0 og slippes. Vi skal nå undersøke dette fenomenet nærmere.

Vi merker oss at både ω_0 og δ kun avhenger at hvordan det fysiske systemet er bygd opp. For et gitt system er disse størrelsene fast. Den eneste størrelsen som kan variere er Ω . For å finne ut hvordan A avhenger av Ω , deriverer vi A med hensyn på Ω . Da får vi

$$\begin{aligned} A &= Y_0 \cdot \left((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{dA}{d\Omega} &= Y_0 \cdot \left((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \cdot (2(\omega_0^2 - \Omega^2)(-2\Omega) + 4\delta^2 \cdot 2\Omega) \\ &= Y_0 \cdot \left((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 4\Omega(\Omega^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2) \end{aligned}$$

For å finne største verdi av A løser vi likningen $\frac{dA}{d\Omega} = 0$ med hensyn på Ω :

$$\frac{dA}{d\Omega} = 0 \Leftrightarrow \Omega = 0 \vee \Omega^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2 = 0.$$

Løsningen $\Omega = 0$ er ikke interessant (den svarer til konstant ytre påvirkning). Vi må derfor konsentrere oss om

$$\Omega^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2 = 0 \Leftrightarrow \underline{\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}}.$$

Vi ser altså at amplituden A blir størst når

$$\Omega = \Omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}.$$

Denne frekvensen kalles *resonansfrekvensen* Ω_{res} . Vi ser at når $\delta \ll \omega_0$ er $\Omega_{\text{res}} \approx \omega_0$. Men vi ser også at Ω_{res} alltid er mindre enn ω_0 .

I uttrykket for resonansfrekvens må vi ha et positivt tall under rottegnet, d.v.s. at

$$\omega_0^2 - 2\delta^2 > 0 \Leftrightarrow \delta < \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_0.$$

Vi ser altså at $\delta < \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_0$ for at vi skal få resonans. Dersom dempingen er så stor at δ er større enn denne grensen, får vi ikke resonans. Dette er viktig å kjenne til dersom vi har systemer der vi må unngå resonans.

For å finne ut hvor stort utslaget blir ved resonansfrekvensen, setter vi inn $\Omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$ i uttrykket for A :

$$A_{\text{res}} = \frac{Y_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} = \frac{Y_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - (\omega_0^2 - 2\delta^2))^2 + 4\delta^2(\omega_0^2 - 2\delta^2)}}$$

$$= \frac{Y_0}{\sqrt{(2\delta^2)^2 + 4\delta^2\omega_0^2 - 8\delta^4}} = \frac{Y_0}{\sqrt{4\delta^2\omega_0^2 - 4\delta^4}} = \frac{Y_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

For oversiktens skyld skal jeg summere opp hovedtrekkene:

Et system som følger differensiallikningen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = Y_0 \cos(\Omega t)$$

utfører *tvungne svingninger*. Når stabil tilstand er inntrådt, er utslaget

$$x(t) = A \cos(\Omega t + \varphi)$$

der amplituden er

$$A = \frac{Y_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}$$

og

$$\tan \varphi = -\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

Dersom $\delta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_0$, får vi *resonans* ved en *resonansfrekvens*

$$\Omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}.$$

Ved denne frekvensen er amplituden i svingningene

$$A_{\text{res}} = \frac{Y_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}.$$

Eksempel 4.4.2: Vi skal holde oss til det samme kloss-fjær-systemet som vi har brukt tidligere (masse $m = 0.20$ kg, $k = 20$ N/m). Den ytre kraften er gitt ved

$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t) = 2.0 \cos(\Omega t).$$

Da har vi tidligere vist at $\omega_0 = 10$ rad/s og at $Y_0 = 10$ m/s².

- Finn (om mulig) resonansfrekvensen og maksimalt utslag når dempingskonstanten er:
 - $b = 0.5$ N/(m/s).
 - $b = 1.0$ N/(m/s).
 - $b = 2.0$ N/(m/s).
 - $b = 4.0$ N/(m/s).
- Bestem den største verdien av b som kan gi resonans.
- Tegn grafene av A som funksjon av Ω i de fire tilfellene som er brukt i del a) av eksemplet.

Løsning:

a1) Når $b = 0.5 \text{ N/(m/s)}$, er

$$\delta = \frac{b}{2m} = \frac{0.5 \text{ N/(m/s)}}{2 \cdot 0.20 \text{ kg}} = 1.25 \text{ s}^{-1}.$$

Da blir

$$\Omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \sqrt{(10 \text{ rad/s})^2 - 2 \cdot (1.25 \text{ s}^{-1})^2} = \underline{\underline{9.84 \text{ rad/s}}}.$$

Ved denne frekvensen er maksimalt utslag

$$A_{\text{res}} = \frac{Y_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{10 \text{ m/s}^2}{2 \cdot 1.25 \text{ s}^{-1} \sqrt{(10 \text{ rad/s})^2 - (1.25 \text{ s}^{-1})^2}} = \underline{\underline{0.403 \text{ m}}}$$

a2) Når $b = 1.0 \text{ N/(m/s)}$, er

$$\delta = \frac{b}{2m} = \frac{1.0 \text{ N/(m/s)}}{2 \cdot 0.20 \text{ kg}} = 2.5 \text{ s}^{-1}.$$

Da blir

$$\Omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \sqrt{(10 \text{ rad/s})^2 - 2 \cdot (2.5 \text{ s}^{-1})^2} = \underline{\underline{9.35 \text{ rad/s}}}.$$

Ved denne frekvensen er maksimalt utslag

$$A_{\text{res}} = \frac{Y_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{10 \text{ m/s}^2}{2 \cdot 2.5 \text{ s}^{-1} \sqrt{(10 \text{ rad/s})^2 - (2.5 \text{ s}^{-1})^2}} = \underline{\underline{0.207 \text{ m}}}.$$

a3) Når $b = 2.0 \text{ N/(m/s)}$, er

$$\delta = \frac{b}{2m} = \frac{2.0 \text{ N/(m/s)}}{2 \cdot 0.20 \text{ kg}} = 5.0 \text{ s}^{-1}.$$

Da blir

$$\Omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \sqrt{(10 \text{ rad/s})^2 - 2 \cdot (5.0 \text{ s}^{-1})^2} = \underline{\underline{7.07 \text{ rad/s}}}.$$

Ved denne frekvensen er maksimalt utslag

$$A_{\text{res}} = \frac{Y_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{10 \text{ m/s}^2}{2 \cdot 5.0 \text{ s}^{-1} \sqrt{(10 \text{ rad/s})^2 - (5.0 \text{ s}^{-1})^2}} = \underline{\underline{0.115 \text{ m}}}.$$

a4) Når $b = 4.0 \text{ N/(m/s)}$, er

$$\delta = \frac{b}{2m} = \frac{4.0 \text{ N/(m/s)}}{2 \cdot 0.20 \text{ kg}} = 10.0 \text{ s}^{-1}.$$

Da blir

$$\Omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \sqrt{(10 \text{ rad/s})^2 - 2 \cdot (10.0 \text{ s}^{-1})^2} = \sqrt{-100 \text{ rad/s}}.$$

Da er det ikke resonans.

b) For å få resonans, må

$$\delta \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 10 \text{ rad/s} = \underline{\underline{7.07 \text{ s}^{-1}}}.$$

Da er

$$\delta = \frac{b}{2m} \Leftrightarrow b = 2m \cdot \delta = 2 \cdot 0.20 \text{ kg} \cdot 7.07 \text{ s}^{-1} = \underline{\underline{2.83 \text{ N/(m/s)}}}.$$

c) Vi setter inn kjente størrelser i uttrykket for amplituden, og ser bort fra benevninger:

$$A(\Omega) = \frac{Y_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} = \frac{10}{\sqrt{(10^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}.$$

Da får vi:

1) $b = 0.5 \Leftrightarrow \delta = 1.25.$

$$A(\Omega) = \frac{10}{\sqrt{(10^2 - \Omega^2)^2 + 4 \cdot 1.25^2 \Omega^2}} = \frac{10}{\sqrt{(100 - \Omega^2)^2 + 6.25\Omega^2}}.$$

2) $b = 1.0 \Leftrightarrow \delta = 2.5.$

$$A(\Omega) = \frac{10}{\sqrt{(10^2 - \Omega^2)^2 + 4 \cdot 2.5^2 \Omega^2}} = \frac{10}{\sqrt{(100 - \Omega^2)^2 + 25\Omega^2}}.$$

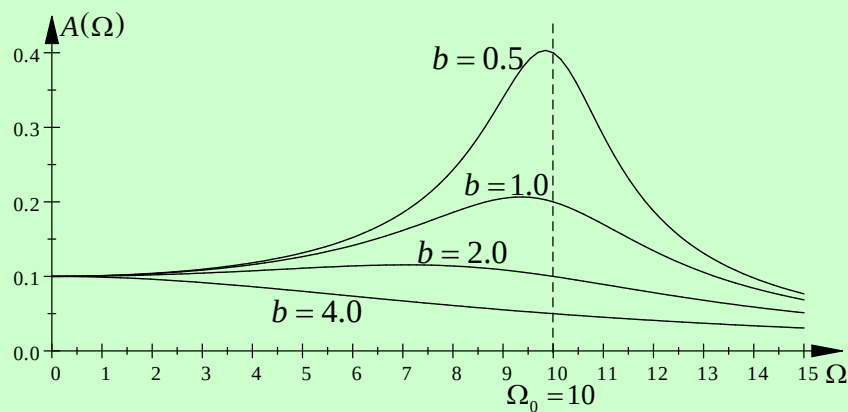
3) $b = 2.0 \Leftrightarrow \delta = 5.0.$

$$A(\Omega) = \frac{10}{\sqrt{(10^2 - \Omega^2)^2 + 4 \cdot 5.0^2 \Omega^2}} = \frac{10}{\sqrt{(100 - \Omega^2)^2 + 100\Omega^2}}.$$

4) $b = 3.0 \Leftrightarrow \delta = 10.0.$

$$A(\Omega) = \frac{10}{\sqrt{(10^2 - \Omega^2)^2 + 4 \cdot 10^2 \Omega^2}} = \frac{10}{\sqrt{(100 - \Omega^2)^2 + 400\Omega^2}}.$$

Plotter disse uttrykkene:



Vi ser at grafen stemmer med de verdiene vi fant i del a) av denne oppgaven.

5. Blandede oppgaver.

Blandede oppgaver.

Her finner du en samling av oppgaver innen differensiallikninger. De fleste av oppgavene har vært gitt som eksamensoppgaver. Du finner løsninger på oppgavene ved å klikke på oppgave-nummeret.

Oppgave 1

Løs disse differensiallikningene:

a) $x \cdot y' - y = x^2 \cdot \cos x$

b) $xy' = y^2 - y$

c) $y' - 3x^2 y = \frac{3e^{x^3}}{\sqrt{1-9x^2}}$

Oppgave 2

Løs disse differensiallikningene med de oppgitte startbetingelsene:

a) $\frac{dx}{dt} = x^2 + x, \quad x(0) = 1$

b) $\frac{dx}{dt} + \frac{x}{t} = \sqrt{1-t^2}, \quad x(1) = 0$

c) $\frac{dx}{dt} = k(A-x) \cdot t, \quad x(0) = 2A$

d) $x \cdot y' - y = x^2, \quad y(2) = 10$

e) $x \cdot y' = y + x^2 \cos x, \quad y(\pi) = \pi.$

f) $x \frac{dy}{dx} + y = e^{-2x}, \quad y(1) = 0.$

g) $xy' + y = e^{-x}, \quad y(1) = 0. \quad \text{Du kan forutsette at } x > 0.$

h) $\frac{dy}{dx} + 2y^2 = 0, \quad y(1) = -\frac{1}{2}$

i) $\frac{dy}{dx} + 2y = e^{-3x}, \quad y(0) = 0.$

j) $\frac{dy}{dx} - 2xy = xe^{x^2}, \quad y(0) = 1.$

k) $\frac{dy}{dx} - 2xy^2 = 0, \quad y(1) = 2.$

l) $x^2 \cdot \frac{dy}{dx} + x \cdot y = x - 1, \quad y(1) = 0.$

m) $(x^2 + 1)y' = xy, \quad y(0) = 3.$

n) $y'(x) + (\cos x) \cdot y(x) = \cos x, \quad y(0) = 0$

o) $y' = e^{x-y}, \quad y(0) = 2.$

p) $(x^2 + 1)y' + 2xy = 3x^2, \quad y(0) = 1.$

q) $y' \cdot \cos x + y \cdot \sin x = \tan x, \quad y(0) = 0, \quad -\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi.$

Oppgave 3

Løs differensial-likningen

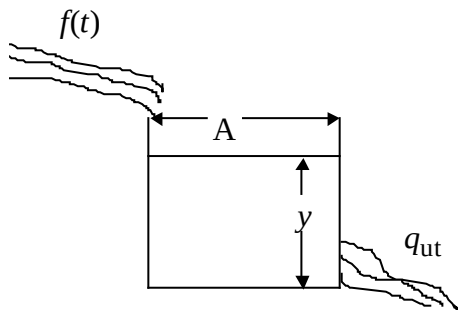
$$t^2 \frac{dx}{dt} = 2x^2 - x$$

når du får opplyst at $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 1.$

Oppgave 4

a) Vis (ved å utføre integrasjonen) at

$$\int e^t \cos t \, dt = \frac{1}{2} e^t (\cos t + \sin t) + C$$



Vi skal nå se nærmere på hva som skjer når det blir flom i ei lita elv. I elva er det gravd ut et basseng med loddrette vegger, slik at arealet A av vannflaten er konstant uavhengig av vannhøyden y i bassenget. Videre antar vi at den vannmengden som strømmer inn i bassenget er gitt ved en funksjon $f(t)$ målt i m^3/s , mens den vannmengden som strømmer ut av bassenget er $q_{ut} = k \cdot y$ der k er en konstant.

b) Vi at vannhøyden y i bassenget er gitt ved differensiallikningen

$$f(t) - ky = A \frac{dy}{dt}$$

Forklar hvordan du resonnerer.

c) Ved normal, konstant vannføring i elva er $f(t) = 1.0 \text{ m}^3/\text{s}$. Hvor stor er da den konstante vannhøyden y_0 i bassenget?

I resten av oppgaven skal du sette $A = 1.0$ og $k = 1.0$.

d) Når det blir flom i elva, antar vi at vannføringen er gitt ved formelen

$$f(t) = 2 - \cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

der t er antall dager siden flommen startet.

Benytt resultatene ovenfor til å vise at vannhøyden $y(t)$ i bassenget i dette tidsrommet finnes ved å løse differensiallikningen

$$\frac{dy}{dt} + y = 2 - \cos t, \quad y(0) = 1.$$

Løs denne likningen.

e) For å finne det tidspunktet da vannhøyden $y(t)$ er størst, må vi løse likningen

$$\sin t - \cos t + e^{-t} = 0.$$

Vis dette.

Likningen lar seg ikke løse eksakt. Bruk Newtons metode til å finne en tilnærmet løsning med 3 korrekte sifre. Bruk $t_0 = \pi$ som startverdi.

Oppgave 5

a) Gitt funksjonen

$$y(t) = 30 + 30e^{-0.2t} - 40e^{-0.1t}, \quad t \geq 0.$$

1) Finn minimumspunktet med tilhørende funksjonsverdi for $y(t)$.

2) Tegn en skisse av grafen til $y(t)$ med eventuelle asymptoter.

b) Vi skal nå studere temperaturen på hytta di. Vi antar at dersom det ikke er noen energitilførsel, så er varmetapet proporsjonalt med innetemperaturen. Dette leder til at innetemperaturen $y(t)$ er gitt ved differensiallikningen

$$\frac{dy}{dt} = -ky$$

der t er tiden målt i timer.

1) Løs denne likningen når du vet at $y(0) = 20$ grader.

2) Finn k når du vet at temperaturen synker fra 20 grader til 12.1 grader på 5 timer.

c) Når sola står opp, blir det en energitilførsel. Vi antar at denne energitilførselen fører til at innetemperaturen på hytta er gitt ved

$$\frac{dy}{dt} = -ky + 3(1 - e^{-at})$$

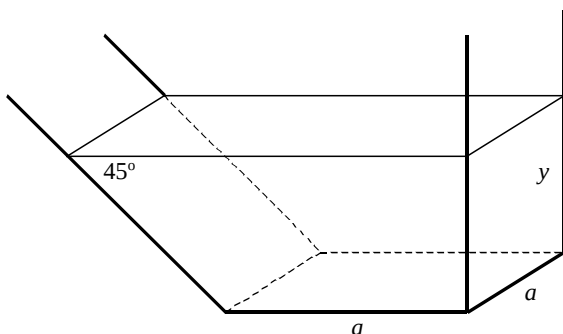
der $k = 0.1$ og $a = 0.2$ når t er gitt i timer.

1) Løs denne likningen når du vet at $y(0) = 20$ grader.

2) Bruk resultatene fra oppgave a) til å fortelle hvordan temperaturen i hytta utvikler seg.

3) Finn $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ kun ved å benytte den gitte differensiallikningen (uten å kjenne løsningen).

Oppgave 6



En beholder har kvadratisk bunn med sidekant a . Bunnen står vannrett. Tre sidekanter står loddrett, den fjerde danner en vinkel på 45° med horisontalplanet. Se figuren. Vi fyller vann i karet, og vannhøyden er y .

a) Sett opp en formel for vannvolumet uttrykt ved a og y .

I resten av oppgaven skal du sette $a = 1$ m.

- b) Vi fyller vann i karet med en hastighet på $0.001 \text{ m}^3/\text{s}$. Hvor fort øker vannhøyden y i det øyeblikk $y = 0.25$ m?
- c) Vi lager et avløp i bunnen av karet, slik at den vannmengden som renner ut er gitt ved $0.001y$ (målt i m^3/s). Det renner fremdeles $0.001 \text{ m}^3/\text{s}$ inn i karet.
- 1) Vis at vannhøyden y nå er gitt ved differensiallikningen $(1+y)dy = 0.001(1-y)dt$.
 - 2) Løs denne likningen når du vet at karet var tomt når $t = 0$.
 - 3) Hvor lang tid tar det før vannhøyden når halvparten av sin maksimale verdi?

Oppgave 7

I denne oppgaven skal vi studere bevegelsen til en båt som har masse $m = 1000$ kg. Vi skal anta at når båten går framover med fart v , så er friksjonskraften (vannmotstanden) gitt ved $F_f = -k \cdot v$ der $k = 500 \text{ N/(m/s)}$.

De integralene som forekommer, kan du løse med tabell, kalkulator eller liknende.

- a) Ved tidspunktet $t = 0$ går båten med konstant fart $v_0 = 10 \text{ m/s}$. I dette øyeblikket begynner motoren å fuske, og den stanser helt ved $t = 5.0 \text{ s}$. Anta at motorkraften avtar lineært i dette tidsrommet. Tegn en graf av motorkraften $F(t)$ når $0 \leq t \leq 5$, og bruk grafen til å sette opp en formel for $F(t)$ når $0 \leq t \leq 5$.
- b) Vis at i tidsrommet $0 \leq t \leq 5$ er båtens fart gitt ved differensiallikningen $\frac{dv}{dt} + \frac{1}{2}v = 5 - t$ med startbetingelse $v(0) = 10$.
Løs denne differensial-likningen.
- c) Sett opp den differensiallikningen som gjelder når $t > 5$, og løs denne. Tegn deretter graf av farten som funksjon av t når $t \geq 0$.

Oppgave 8

Et legeme med masse $m = 100 \text{ kg}$ beveger seg med en fart v gjennom vann. Vi antar at størrelsen til vannmotstanden da er gitt ved

$$F = k_1 v + k_2 v^2$$

der $k_1 = 10 \text{ N/(m/s)}$ og $k_2 = 1.0 \text{ N/(m/s)}^2$, med retning mot bevegelsen.

Anta videre at summen av alle andre krefter er lik null.

- a) Vis at legemets fart $v(t)$ da er gitt ved differensiallikningen

$$100 \frac{dv}{dt} + 10v + v^2 = 0.$$

- b) Løs denne likningen når $v(0) = 10$ m/s, og illustrer løsningen grafisk for $0 \leq t \leq 30$ sekunder.

Oppgave 9

Anta at kraften som virker på et legeme som beveger seg gjennom vann med fart v er gitt ved

$$F = m \cdot \frac{dv}{dt}$$

der vi bruker $m = 1$ og $v(0) = 0$, og setter

- a) $F = 10 - v$
b) $F = 10 - \frac{1}{10}v^2$
c) $F = 20 - v - \frac{1}{10}v^2$.

Finn $v(t)$ i disse tilfellene. Hint: Bestem en terminalfart v_t slik at $\frac{dv}{dt} = 0$, og innfør en ny variabel $u = v_t - v$.

Oppgave 10

Løs differensiallikningen

$$x \cdot y'' - y' = 1, \quad y'(1) = 1, \quad y(1) = 1$$

Oppgave 11

Løs disse differensiallikningene:

- a) $y'' + 6y' + 10y = 0$
b) $4y'' + 4y' + 17 = 0$
c) $y'' + 2y' + 5y = 10x$
d) $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = -2t - 2$
e) $y'' + 4y' + 3y = e^{-x}$

Oppgave 12

Løs disse differensiallikningene:

- a) $\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = 2e^t, \quad y(0) = 0, \quad \frac{dy}{dt}(0) = 1$
b) $y'' - y = e^x + e^{-x}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 12$
c) $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = \sin t, \quad x(0) = 1, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 0$

Oppgave 13

Vi har gitt differensiallikningen

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + b \cdot \frac{dy}{dx} + 5y = 0 \quad \text{der } b \text{ er en positiv konstant.}$$

- a) For hvilke verdier av b blir løsningen av likningen en dempet svingning?
- b) Sett $b = 4$, og løs likningen når startbetingelsene er

$$y(0) = 0, \quad \frac{dy}{dt}(0) = 1.$$

Oppgave 14

- a) Finn den generelle løsningen av differensiallikningen

$$y'' + 4y' + 4y = x + 2$$

der y er en funksjon av x .

- b) Vi har gitt differensiallikningen

$$y'' + k \cdot y' + 4y = 0$$

der y er en funksjon av x mens k er en konstant. For hvilke verdier av k blir løsningen av denne likningen en dempet svingning?

Oppgave 15

- a) Løs differensiallikningen

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + 2y = 0$$

- b) Løs differensiallikningen

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + 2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} = 1 - e^{-t}$$

Oppgave 16

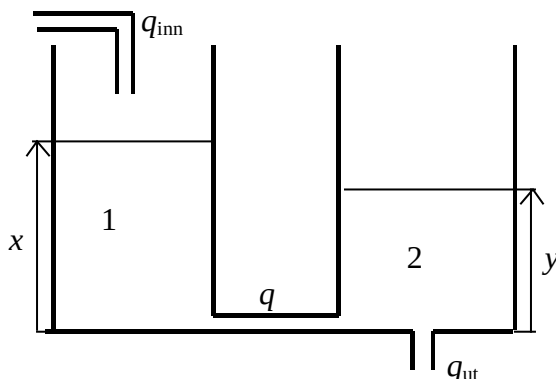
- a) Finn den generelle løsningen av differensiallikningen

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{14}{3} \frac{dy}{dt} + \frac{8}{3} y = 0$$

- b) Løs differensiallikningen

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{14}{3} \frac{dy}{dt} + \frac{8}{3} y = 1 - e^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad \frac{dy(0)}{dt} = 0$$

- c)



To sylindriske kar som begge har samme tverrsnittsareal $A = 1.0 \text{ m}^2$, er forbundet med et tynt rør som figuren over viser. Væskeniåene i de to karene er henholdsvis x og y .

Væskestrømmen mellom de to karene er

$$q = x - y \text{ (målt i m}^3/\text{minutt).}$$

Væskestrømmen ut av kar 2 er

$$q_{\text{ut}} = \frac{8}{3} y \text{ (målt i m}^3/\text{minutt).}$$

Ved tidspunktet $t = 0$ er begge karene tomme. Da åpnes en ventil slik at væskestrømmen inn i kar 1 blir

$$q_{\text{inn}} = 1 - e^{-t} \text{ når } t \geq 0 \text{ (målt i m}^3/\text{minutt).}$$

I) Vis at væskeniåene i de to karene er gitt av likningssettet

$$\frac{dx}{dt} = -x + y + 1 - e^{-t} \quad x(0) = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = x - \frac{11}{3}y \quad y(0) = 0$$

(Hint: benytt at $\frac{dV}{dt}$ = væskestrøm inn – væskestrøm ut, der V er volumet).

II) Vis at likningssettet over kan omformes til likningen i b).

III) Finn $x(t)$.

IV) Når $t \rightarrow \infty$, oppstår en stasjonær tilstand. Finn x og y i denne stasjonære tilstanden ut fra de gitte opplysningene om væskestrømmene q_{inn} , q og q_{ut} .

Oppgave 17

Et legeme med masse 5 kg beveger seg langs x -aksen. Det påvirkes av en konstant kraft

$$\mathbf{F} = 10 \text{ N}$$

og av en friksjonskraft

$$\mathbf{F}_f = -10 \frac{dx}{dt} \text{ (målt i Newton).}$$

a) Bruk Newtons 2. lov samt at akselerasjonen

$$a = \frac{d^2x}{dt^2},$$

og vis at vi får differensial-likningen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} = 2.$$

b) Løs denne likningen når

$$x(0) = 0 \text{ og } \frac{dx}{dt}(0) = 5.$$

Oppgave 18

En kloss med masse $m = 1.0 \text{ kg}$ kan gli uten friksjon på et horisontalt underlag. Klossen påvirkes av en horisontal fjærkraft med størrelse

$$F_{\text{fjær}} = -k \cdot x \text{ der } k = 3.0 \text{ N/m}$$

og x er avstanden fra likevekt. Klossen påvirkes også av en horisontal kraft

$$F = F_0 \cdot e^{-t} \text{ der } F_0 = 4.0 \text{ N.}$$

a) Sett opp Newtons 2. lov, og vis at den fører til differensial-likningen

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 3x = 4e^{-t}.$$

b) Løs denne likningen når

$$x(0) = 0 \text{ og } \frac{dx}{dt}(0) = 0.$$

Løsninger på blandede oppgaver.

Oppgave 1a

$$x \cdot y' - y = x^2 \cdot \cos x \Leftrightarrow y' - \frac{1}{x} y = x \cdot \cos x$$

Vi ser at dette er en lineær differensiallikning som løses etter standard oppskrift:

$$F(x) = \int -\frac{1}{x} dx = -\ln x$$

Da blir

$$y(x) = e^{-(\ln x)} \left(\int x \cdot \cos x \cdot e^{-\ln x} dx + C \right) = x \left(\int \cancel{x} \cdot \cos x \cdot \frac{1}{\cancel{x}} dx + C \right) = \underline{\underline{x(\sin x + C)}}.$$

Her har jeg benyttet at

$$e^{\ln x} = x,$$

og at

$$e^{-\ln x} = (e^{\ln x})^{-1} = x^{-1} = \frac{1}{x}.$$

Oppgave 1b

$$xy' = y^2 - y$$

Denne likningen er ikke lineær fordi den inneholder et y^2 -ledd. Altså må den være separabel for at jeg skal kunne løse den.

$$xy' = y^2 - y \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y(y-1)}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{y(y-1)} = \frac{dx}{x}$$

Delbrøkoppspalter venstre side for å kunne integrere:

$$\frac{1}{y(y-1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1} = \frac{Ay - A + By}{y(y-1)} = \frac{(A+B)y - A}{y(y-1)}.$$

Dette gir likningssystemet

$$A + B = 0$$

$$-A = 1$$

som har løsning $A = -1$, $B = -A = 1$.

Altså er

$$\int \frac{1}{y(y-1)} dy = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{-1}{y} dy + \int \frac{1}{y-1} dy = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\ln|y| + \ln|y-1| = \ln|x| + \ln C$$

$$-\ln|y| + \ln|y-1| - \ln|x| - \ln C = 0$$

$$\ln \left| \frac{y-1}{Cxy} \right| = 0 \Leftrightarrow \frac{y-1}{Cxy} = 1$$

Den felles integrasjonskonstanten har jeg kalt $\ln C$, og forutsetter at fortegnet velges slik at brøken blir positiv. Finner y:

$$\frac{y-1}{Cxy} = 1 \Leftrightarrow y-1 = Cxy \Leftrightarrow y - Cxy = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{1-Cx}.$$

Oppgave 1c

$$y' - 3x^2 y = \frac{3e^{x^3}}{\sqrt{1-9x^2}}$$

Dette er en lineær differensiallikning, der

$$F(x) = \int -3x^2 dx = -x^3.$$

Bruker formel:

$$y(x) = e^{-F(x)} \left(\int \frac{3e^{x^3}}{\sqrt{1-9x^2}} e^{F(x)} dx + C \right) = e^{-(-x^3)} \left(\int \frac{3e^{x^3}}{\sqrt{1-9x^2}} e^{-x^3} dx + C \right)$$

$$= e^{x^3} \left(\int \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}} dx + C \right)$$

Substituerer $u = 3x \Rightarrow du = 3dx$, slik at integralet blir

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u$$

Altså blir løsningen

$$\underline{\underline{y(x) = e^{x^3} (\arcsin(3x) + C)}}.$$

Oppgave 2a

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + x, \quad x(0) = 1$$

Denne likningen er separabel:

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + x \Leftrightarrow \frac{dx}{x^2 + x} = dt$$

Delbrøkoppspalter:

$$\frac{1}{x^2 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + Bx}{x(x+1)} = \frac{(A+B)x + A}{x^2 + x}.$$

Sammenlikner koeffisienter:

$$A = 1, A + B = 0$$

slik at

$$B = -A = -1.$$

Integrerer:

$$\int dt = \int \frac{dx}{x(x+1)} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$t = \ln|x| - \ln|x+1| + \ln|C| = \ln \left| \frac{Cx}{x+1} \right|$$

Forutsetter at C er slik at brøken blir positiv. Finner x :

$$e^t = \frac{Cx}{x+1} \Leftrightarrow e^t(x+1) = Cx \Leftrightarrow Cx - e^t x = e^t \Leftrightarrow x = \frac{e^t}{C - e^t}$$

Finner C av startbetingelsen:

$$x(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{e^0}{C - e^0} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{C - 1} = 1 \Leftrightarrow 1 = C - 1 \Rightarrow \underline{C = 2}$$

Altså er

$$x(t) = \frac{e^t}{2 - e^t} \cdot \frac{e^{-t}}{e^{-t}} = \frac{1}{2e^{-t} - 1}$$

Oppgave 2b

$$\frac{dx}{dt} + \frac{x}{t} = \sqrt{1-t^2}, \quad x(1) = 0$$

Dette er en lineær 1. ordens differensiallikning. Finner først hjelpefunksjonen:

$$F(t) = \int \frac{1}{t} dt = \ln t$$

Setter inn i formelen:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-F(t)} \left(\int \sqrt{1-t^2} \cdot e^{F(t)} dt + C \right) = e^{-\ln t} \left(\int \sqrt{1-t^2} \cdot e^{\ln t} dt + C \right) \\ &= (e^{\ln t})^{-1} \left(\int \sqrt{1-t^2} \cdot t dt + C \right) = t^{-1} \left(\int \sqrt{1-t^2} \cdot t dt + C \right) \end{aligned}$$

Benytter substitusjonen

$$u = 1 - t^2 \Rightarrow \frac{du}{dt} = -2t \Rightarrow t dt = -\frac{1}{2} du$$

for å løse integralet:

$$\begin{aligned} x(t) &= t^{-1} \left(\int \sqrt{u} \left(-\frac{1}{2} du \right) + C \right) = t^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\int u^{\frac{1}{2}} du + C \right) \\ &= \frac{1}{t} \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C \right) = -\frac{1}{t} \left(\frac{1}{3} (1-t^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} C \right) \end{aligned}$$

Bruker startbetingelsen til å finne C :

$$x(1) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{1} \left(\frac{1}{3} (1-1^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} C \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} C = 0 \Leftrightarrow \underline{C = 0}$$

Altså er

$$x(t) = -\frac{1}{t} \left(\frac{1}{3} (1-t^2)^{\frac{3}{2}} \right) = -\frac{1}{3t} \left(\sqrt{1-t^2} \right)^3.$$

Oppgave 2c

$$\frac{dx}{dt} = k(A - x) \cdot t, \quad x(0) = 2A$$

Denne likningen er separabel:

$$\frac{dx}{A - x} = ktdt \Leftrightarrow \int \frac{dx}{A - x} = \int ktdt$$

Bruker substitusjonen

$$u = A - x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du$$

$$\int \frac{-du}{u} = k \int t dt \Leftrightarrow -\ln|u| = k \cdot \frac{1}{2}t^2 + C$$

$$\ln|A - x| = -k \cdot \frac{1}{2}t^2 - C$$

$$|A - x| = e^{-\frac{1}{2}kt^2 - C} = e^{-\frac{1}{2}kt^2} \cdot e^{-C}$$

Av startbetingelsen får vi nå

$$|A - 2A| = e^{0-C} \Leftrightarrow e^{-C} = |-A| = \underline{A}.$$

Altså er

$$|A - x| = Ae^{-\frac{1}{2}kt^2}.$$

Må skille mellom to tilfeller:

1) $x < A$: Da er $A - x > 0$, slik at $|A - x| = A - x$. Dette gir

$$A - x = Ae^{-\frac{1}{2}kt^2} \Leftrightarrow x = A(1 - e^{-\frac{1}{2}kt^2}).$$

2) $x > A$: Da er $A - x < 0$, slik at $|A - x| = -(A - x)$. Dette gir

$$-(A - x) = Ae^{-\frac{1}{2}kt^2} \Leftrightarrow x = A(1 + e^{-\frac{1}{2}kt^2}).$$

Siden $x(0) = 2A > A$ er løsning 1 ovenfor ubrukelig. Løsningen på problemet blir derfor

$$\underline{\underline{x(t) = A(1 + e^{-\frac{1}{2}kt^2})}}.$$

Oppgave 2d

$$x \cdot y' - y = x^2, \quad y(2) = 10$$

Likningen er lineær, men jeg må dele på x for å få den på standardform:

$$x \cdot y' - y = x^2 \Leftrightarrow y' - \frac{1}{x}y = x$$

Finner hjelpefunksjonen:

$$F(x) = \int -\frac{1}{x} dx = \underline{-\ln x}$$

Setter inn i løsnings-formelen:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-F(x)} \left(\int x \cdot e^{F(x)} dx + C \right) = e^{\ln x} \left(\int x e^{-\ln x} dx + C \right) \\ &= x \left(\int \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} dx + C \right) = x \left(\int 1 dx + C \right) = x(x + C) = \underline{\underline{x^2 + Cx}} \end{aligned}$$

Finner C ut fra startbetingelsen:

$$y(2)=10 \Leftrightarrow 2^2 + 2C = 10 \Leftrightarrow 2C = 10 - 4 = 6 \Leftrightarrow \underline{C=3}$$

Da blir

$$y(x) = \underline{x^2 + 3x}.$$

Oppgave 2e

$$x \cdot y' = y + x^2 \cos x, \quad y(\pi) = \pi$$

Dette er en lineær likning, men jeg må dele på x og flytte ledd for å få den på standardform:

$$x \cdot y' = y + x^2 \cos x \Leftrightarrow y' - \frac{1}{x} \cdot y = x \cdot \cos x.$$

Finner hjelpefunksjonen

$$F(x) = \int -\frac{1}{x} dx = \underline{-\ln x}.$$

Da er løsningen

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-F(x)} \left(\int x \cdot \cos x \cdot e^{F(x)} dx + C \right) = e^{\ln x} \left(\int x \cdot \cos x \cdot e^{-\ln x} dx + C \right) \\ &= x \left(\int \cancel{x} \cdot \cos x \cdot \frac{1}{\cancel{x}} dx + C \right) = x \left(\int \cos x dx + C \right) = \underline{x(\sin x + C)} \end{aligned}$$

Finner C :

$$y(\pi) = \pi \Leftrightarrow \cancel{\pi} (\sin \pi + C) = \cancel{\pi} \Leftrightarrow 0 + C = 1 \Leftrightarrow \underline{C=1}.$$

Da blir

$$y(x) = \underline{x(\sin x + 1)}.$$

Oppgave 2f

$$x \frac{dy}{dx} + y = e^{-2x} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y = \frac{1}{x} e^{-2x}, \quad y(1) = 0.$$

Finner hjelpefunksjonen

$$F(x) = \int \frac{1}{x} dx = \underline{\ln x}$$

slik at løsningen av differensiallikningen blir

$$y(x) = e^{-F(x)} \left(\int \frac{1}{x} e^{-2x} e^{F(x)} dx + C \right) = e^{-\ln x} \left(\int \frac{1}{x} e^{-2x} e^{\ln x} dx + C \right).$$

Men

$$e^{\ln x} = x,$$

slik at

$$e^{-\ln x} = (e^{\ln x})^{-1} = x^{-1} = \frac{1}{x}.$$

Da blir

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\ln x} \left(\int \frac{1}{x} e^{-2x} e^{\ln x} dx + C \right) = \frac{1}{x} \left(\int \frac{1}{x} e^{-2x} \cdot x dx + C \right) = \frac{1}{x} \left(\int e^{-2x} dx + C \right) \\ &= \underline{\frac{1}{x} \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} + C \right)} \end{aligned}$$

Finner C:

$$y(1) = \frac{1}{1} \left(\frac{1}{-2} e^{-2 \cdot 1} + C \right) = -\frac{1}{2} e^{-2} + C = 0 \Leftrightarrow \underline{C = \frac{1}{2} e^{-2}}.$$

Da blir

$$y(x) = \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} + \frac{1}{2} e^{-2} \right) = \underline{\underline{\frac{1}{2x} (e^{-2} - e^{-2x})}}.$$

Oppgave 2g

$$xy' + y = e^{-x} \Leftrightarrow y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}e^{-x}, \quad y(1) = 0.$$

Finner hjelpefunksjonen

$$F(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln x.$$

Løsningen av differensiallikningen blir

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-F(x)} \left(\int e^{F(x)} \cdot \frac{1}{x} e^{-x} dx + C \right) = e^{-\ln x} \left(\int e^{\ln x} \frac{1}{x} e^{-x} dx + C \right) \\ &= x^{-1} \left(\int x \cdot \frac{1}{x} e^{-x} dx + C \right) = \frac{1}{x} \left(\int e^{-x} dx + C \right) = \underline{\underline{\frac{1}{x} (-e^{-x} + C)}} \end{aligned}$$

$$y(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1} (-e^{-1} + C) = 0 \Leftrightarrow \underline{C = e^{-1}}.$$

$$y(x) = \underline{\underline{\frac{1}{x} (e^{-1} - e^{-x})}}.$$

Oppgave 2h

$$\frac{dy}{dx} + 2y^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -2y^2 \Leftrightarrow \frac{dy}{y^2} = -2dx$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int -2dx \Leftrightarrow -\frac{1}{y} = -2x + C.$$

$$y(1) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2 \cdot 1 + C \Leftrightarrow 2 = -2 + C \Leftrightarrow C = 4.$$

Da blir

$$-\frac{1}{y} = -2x + 4 \Leftrightarrow y = \underline{\underline{\frac{1}{2x - 4}}}.$$

Oppgave 2i

$$\frac{dy}{dx} + 2y = e^{-3x}.$$

$$F(x) = \int 2dx = 2x$$

$$y(x) = e^{-2x} \left(\int e^{-3x} \cdot e^{2x} dx + C \right) = e^{-2x} \left(\int e^{-x} dx + C \right) = e^{-2x} (-e^{-x} + C) = -e^{-3x} + Ce^{-2x}.$$

$$y(0) = 0 \Leftrightarrow -e^0 + Ce^0 = 0 \Leftrightarrow -1 + C = 0 \Leftrightarrow C = 1.$$

$$y(x) = -e^{-3x} + e^{-2x} = \underline{\underline{e^{-2x}(1 - e^{-x})}}.$$

Oppgave 2j

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = xe^{x^2}.$$

Dette er en lineær likning. Finner hjelpefunksjonen:

$$F(x) = \int -2xdx = -x^2.$$

Da blir løsningen av likningen

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-F(x)} \left(\int xe^{x^2} e^{F(x)} dx + C \right) = e^{x^2} \left(\int xe^{x^2} e^{-x^2} dx + C \right) \\ &= e^{x^2} \left(\int x dx + C \right) = \underline{\underline{e^{x^2} \left(\frac{1}{2}x^2 + C \right)}} \end{aligned}$$

Finner C:

$$y(0) = 1 \Leftrightarrow e^0 \left(\frac{1}{2} \cdot 0^2 + C \right) = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{C = 1}}.$$

Løsningen blir

$$\underline{\underline{y(x) = e^{x^2} \left(\frac{1}{2}x^2 + 1 \right)}}.$$

Oppgave 2k

Likningen er separabel:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2 \Leftrightarrow \frac{dy}{y^2} = 2xdx$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int 2xdx \Leftrightarrow -\frac{1}{y} = x^2 + C.$$

Finner C:

$$y(1) = 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} = 1^2 + C \Leftrightarrow C = -1 - \frac{1}{2} = \underline{\underline{-\frac{3}{2}}}.$$

Løsningen blir

$$-\frac{1}{y} = x^2 - \frac{3}{2} \Leftrightarrow y(x) = \underline{\underline{\frac{1}{\frac{3}{2} - x^2}}}.$$

Oppgave 2l

$$x^2 \cdot \frac{dy}{dx} + x \cdot y = x - 1 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}.$$

Danner hjelpefunksjonen

$$F(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln x.$$

Da er løsningen

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-F(x)} \left(\int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) \cdot e^{F(x)} dx + C \right) = e^{-\ln x} \left(\int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) e^{\ln x} dx + C \right) \\ &= \frac{1}{x} \left(\int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) x dx + C \right) = \frac{1}{x} \left(\int \left(1 - \frac{1}{x} \right) dx + C \right) = \frac{1}{x} (x - \ln x + C) \end{aligned}$$

Finner C:

$$y(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1}(1 - \ln 1 + C) = 1 - 0 + C = 0 \Leftrightarrow \underline{C = -1}.$$

Da blir

$$y(x) = \underline{\underline{\frac{1}{x}(x - \ln x - 1)}}.$$

Oppgave 2m

Velger å oppfatte likningen som separabel (den kan også oppfattes som lineær):

$$(x^2 + 1)y' = xy \Leftrightarrow (x^2 + 1)\frac{dy}{dx} = xy \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{xdx}{x^2 + 1}.$$

Integrerer begge sider:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{x^2 + 1} dx.$$

For å integrere høyre side, innføres substitusjonen

$$u = x^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow xdx = \frac{1}{2} du.$$

Da blir

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{1}{2} \frac{du}{u} \Leftrightarrow \ln|y| = \frac{1}{2} \ln|u| + \ln C = \ln \sqrt{x^2 + 1} + \ln C = \underline{\ln(C\sqrt{x^2 + 1})}.$$

Altså er

$$y = \underline{C\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Finner C:

$$y(0) = 3 \Leftrightarrow C\sqrt{0^2 + 1} = 3 \Leftrightarrow \underline{C = 3}.$$

Da blir

$$y(x) = \underline{\underline{3\sqrt{x^2 + 1}}}.$$

Oppgave 2n

$$y'(x) + (\cos x) \cdot y(x) = \cos x$$

Dette er en lineær 1.ordens likning. Finner hjelpefunksjonen:

$$\int \cos x dx = \sin x.$$

Da er løsningen

$$y(x) = e^{-\sin x} \left(\int \cos x \cdot e^{\sin x} dx + C \right).$$

Løser integralet ved hjelp av substitusjon:

$$u = \sin x \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Leftrightarrow du = \cos x dx$$

Da blir

$$\int \cos x \cdot e^{\sin x} dx = \int e^u du = e^u = \underline{e^{\sin x}}$$

slik at

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\sin x} \left(\int \cos x \cdot e^{\sin x} dx + C \right) = e^{-\sin x} (e^{\sin x} + C) \\ &= e^{-\sin x + \sin x} + Ce^{-\sin x} = \underline{1 + Ce^{-\sin x}} \end{aligned}$$

Setter inn startverdiene:

$$y(0) = 0 \Leftrightarrow 1 + Ce^{-\sin 0} = 0 \Leftrightarrow 1 + C \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow \underline{C = -1}$$

Løsningen blir da

$$y(x) = \underline{\underline{1 - e^{-\sin x}}}$$

Oppgave 2o

$$y' = e^{x-y} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^y} \Leftrightarrow e^y dy = e^x dx$$

Integrerer:

$$\int e^y dy = \int e^x dx \Leftrightarrow e^y = e^x + C.$$

$$y(0) = 2 \Leftrightarrow e^2 = e^0 + C \Leftrightarrow C = e^2 - 1.$$

Da blir

$$e^y = e^x + e^2 - 1 \Leftrightarrow y = \underline{\underline{\ln(e^x + e^2 - 1)}}.$$

Oppgave 2p

$$(x^2 + 1)y' + 2xy = 3x^2 \Leftrightarrow y' + \frac{2x}{x^2 + 1}y = \frac{3x^2}{x^2 + 1}$$

Finner først hjelpefunksjonen

$$F(x) = \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln(x^2 + 1)$$

(bruker substitusjonen $u = x^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow du = 2x dx$).

Da er

$$y(x) = e^{-F(x)} \left(\int \frac{3x^2}{x^2 + 1} \cdot e^{F(x)} dx + C \right) = e^{-\ln(x^2 + 1)} \left(\int \frac{3x^2}{x^2 + 1} \cdot e^{\ln(x^2 + 1)} dx + C \right).$$

Men

$$e^{\ln(x^2 + 1)} = x^2 + 1$$

slik at

$$e^{-\ln(x^2 + 1)} = \left(e^{\ln(x^2 + 1)} \right)^{-1} = (x^2 + 1)^{-1} = \frac{1}{x^2 + 1}$$

Da blir

$$y(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \left(\int \frac{3x^2}{\cancel{x^2 + 1}} \cdot \cancel{(x^2 + 1)} dx + C \right) = \frac{1}{x^2 + 1} \left(\int 3x^2 dx + C \right) = \underline{\underline{\frac{1}{x^2 + 1} (x^3 + C)}}.$$

$$y(0)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{0^2+1}(0^3+C)=1 \Leftrightarrow \underline{C=1}.$$

Da er

$$y(x) = \underline{\underline{\frac{x^3+1}{x^2+1}}}.$$

Oppgave 2q

$$y' \cdot \cos x + y \cdot \sin x = \tan x \Leftrightarrow y' + \frac{\sin x}{\cos x} \cdot y = \frac{\tan x}{\cos x}$$

Dette er en lineær differensiallikning som løses med formel. Finner først

$$F(x) = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{-du}{u} = -\ln|u| = -\ln(\cos x)$$

der jeg har brukt substitusjonen

$$u = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \Leftrightarrow \sin x dx = -du.$$

Absoluttverditegnet kan droppes fordi $\cos x > 0$ når $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$. Da blir

$$y(x) = e^{-F(x)} \left(\int \frac{\tan x}{\cos x} \cdot e^{F(x)} dx + C \right) = e^{\ln(\cos x)} \left(\int \frac{\tan x}{\cos x} \cdot e^{-\ln(\cos x)} dx + C \right)$$

Men

$$e^{\ln(\cos x)} = \cos x \Leftrightarrow e^{-\ln(\cos x)} = (e^{\ln(\cos x)})^{-1} = (\cos x)^{-1} = \frac{1}{\cos x},$$

slik at

$$\begin{aligned} y(x) &= \cos x \left(\int \frac{\tan x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} dx + C \right) = \cos x \left(\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx + C \right) = \cos x \left(\int \frac{-du}{u^3} + C \right) \\ &= \cos x \left(-\int u^{-3} du + C \right) = \cos x \left(-\frac{1}{-2} u^{-2} + C \right) = \cos x \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + C \right) \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos x} + C \cos x}} \end{aligned}$$

$$y(0)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos 0} + C \cos 0 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{1}{2}.$$

Dermed har vi løsningen

$$y(x) = \underline{\underline{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{2} \cos x}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\cos^2 x}{\cos x} \right) = \frac{1}{2} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} = \underline{\underline{\frac{1}{2} \frac{\sin^2 x}{\cos x} = \frac{1}{2} \sin x \cdot \tan x}}.$$

Oppgave 3

$$t^2 \frac{dx}{dt} = 2x^2 - x, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 1$$

Her er t den fri variable og x den funksjonen vi skal finne. Da er likningen ikke lineær siden vi har et x^2 -ledd. Må derfor separere:

$$t^2 \frac{dx}{dt} = 2x^2 - x \Leftrightarrow \frac{dx}{2x^2 - x} = \frac{dt}{t^2}$$

Delbrøkoppsummer venstre side:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2x^2 - x} &= \frac{1}{x(2x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-1} \\ &= \frac{A(2x-1) + Bx}{x(2x-1)} = \frac{(2A+B)x - A}{x(2x-1)}\end{aligned}$$

Sammenlikninger koeffisienter i telleren:

$$-A=1 \Leftrightarrow A=-1$$

$$2A+B=0 \Leftrightarrow B=-2A=2$$

Da får vi

$$\int \frac{dx}{2x^2 - x} = \int \frac{dt}{t^2} \Leftrightarrow \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{2}{2x-1} \right) dx = \int t^{-2} dt$$

Integrasjonen blir enklest dersom vi benytter at

$$\frac{2}{2x-1} = \frac{1}{x - \frac{1}{2}}$$

Vi integrerer, og får

$$-\ln|x| + \ln\left|x - \frac{1}{2}\right| = -t^{-1} + C$$

$$\ln\left|\frac{x - \frac{1}{2}}{x}\right| = -\frac{1}{t} + C$$

Nå er det enklest å finne C før vi går videre.

Når $t \rightarrow \infty$, vil $\frac{1}{t} \rightarrow 0$ slik at

$$\ln\left|\frac{1 - \frac{1}{2}}{1}\right| = 0 + C \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = C \Leftrightarrow C = -\ln 2.$$

Altså er

$$\begin{aligned}\ln\left|\frac{x - \frac{1}{2}}{x}\right| &= -\frac{1}{t} - \ln 2 \Leftrightarrow \ln\left|\frac{x - \frac{1}{2}}{x}\right| + \ln 2 = -\frac{1}{t} \\ \Leftrightarrow \ln\left|\frac{2(x - \frac{1}{2})}{x}\right| &= -\frac{1}{t} \Leftrightarrow \left|\frac{2x-1}{x}\right| = e^{-\frac{1}{t}}\end{aligned}$$

Nå vet vi at når $t \rightarrow \infty$ vil $x \rightarrow 1$. Da er både teller og nevner i brøken

$$\frac{2x-1}{x}$$

positive, slik at vi kan sløyfe absoluttverditegnene. Nå kan vi finne x :

$$\frac{2x-1}{x} = e^{-\frac{1}{t}} \Leftrightarrow 2x-1 = xe^{-\frac{1}{t}} \Leftrightarrow (2 - e^{-\frac{1}{t}})x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2 - e^{-\frac{1}{t}}}$$

Oppgave 4

a) Bruker delvis integrasjon to ganger:

$$\int e^t \overset{u'}{\cos t} \overset{v}{dt} = \overset{u}{e^t} \overset{v}{\cos t} - \int \overset{u}{e^t} (-\overset{v'}{\sin t}) dt = e^t \cos t + \int e^t \sin t dt$$

Videre er

$$\int e^t \overset{u'}{\sin t} \overset{v}{dt} = \overset{u}{e^t} \overset{v}{\sin t} - \int \overset{u}{e^t} \overset{v'}{\cos t} dt$$

Slår sammen:

$$\int e^t \cos t \, dt = e^t \cos t + \int e^t \sin t \, dt$$

$$\int e^t \cos t \, dt = e^t \cos t + \left(e^t \sin t - \int e^t \cos t \, dt \right)$$

$$2 \int e^t \cos t \, dt = e^t \cos t + e^t \sin t$$

$$\int e^t \cos t \, dt = \frac{1}{2} e^t (\cos t + \sin t) + C$$

Her er en integrasjonskonstant føyd til.

- b) Når $f(t)$ er vannstrøm inn og $q_{\text{ut}} = k \cdot y$ er vannstrøm ut, blir øking av vannmengde pr tidsenhet

$$f(t) - q_{\text{ut}} = f(t) - k \cdot y.$$

Men endringen av vannmengde i bassenget pr tidsenhet er

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d(Ay)}{dt} = A \frac{dy}{dt}$$

siden A er konstant. Settes disse to uttrykkene lik hverandre, får vi

$$\underline{\underline{f(t) - ky = A \frac{dy}{dt}}}$$

- c) Under konstante forhold er

$$\frac{dV}{dt} = 0 \Leftrightarrow f(t) - ky_0 = 0 \Leftrightarrow y_0 = \frac{f(t)}{k} = \underline{\underline{\frac{1}{k}}}.$$

- d) Av b) får vi ved innsetting av de gitte størrelsene

$$(2 - \cos t) - 1 \cdot y = 1 \cdot \frac{dy}{dt} \Leftrightarrow \underline{\underline{\frac{dy}{dt} + y = 2 - \cos t}}.$$

Når $t = 0$, er $f(t)$ fremdeles lik $1.0 \, \text{m}^3/\text{s}$, slik at

$$\underline{\underline{y(0) = 1}}$$

ifølge c), med $k = 1$.

Likningen løses med formel: Finner først hjelpefunksjonen

$$F(t) = \int 1 \, dt = \underline{t}.$$

Da er

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-F(t)} \left(\int e^{F(t)} (2 - \cos t) \, dt + C \right) = e^{-t} \left(\int e^t (2 - \cos t) \, dt + C \right) \\ &= e^{-t} \left(\int 2e^t \, dt - \int e^t \cos t \, dt \right) + Ce^{-t} = e^{-t} \left(2e^t - \frac{1}{2} e^t (\cos t + \sin t) \right) + Ce^{-t} \\ &= \underline{\underline{2 - \frac{1}{2} (\cos t + \sin t) + Ce^{-t}}} \end{aligned}$$

Finner C ved å benytte at $y(0) = 1$:

$$y(0)=1 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2}(\cos 0 + \sin 0) + Ce^0 = 1$$

$$\Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2}(1+0) + C \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow C = 1 - 2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Altså er

$$y(t) = \underline{\underline{2 - \frac{1}{2}(\cos t + \sin t + e^{-t})}}.$$

e) $y(t)$ er størst når

$$\frac{dy}{dt} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(-\sin t + \cos t - e^{-t}) = 0$$

som gir

$$\underline{\underline{\sin t - \cos t + e^{-t} = 0}}.$$

Vi definerer

$$F(t) = \sin t - \cos t + e^{-t} \Rightarrow \frac{dF}{dt} = \cos t + \sin t - e^{-t}.$$

Ifølge rekursjonsformelen fra Newtons metode blir

$$t_{n+1} = t_n - \frac{\frac{dF}{dt}(t_n)}{F(t_n)} = t_n - \frac{\sin t_n - \cos t_n + e^{-t_n}}{\cos t_n + \sin t_n - e^{-t_n}}$$

Starter med $t_0 = \pi$, og får

$$t_1 = \pi - \frac{\sin \pi - \cos \pi + e^{-\pi}}{\cos \pi + \sin \pi - e^{-\pi}} = \pi + 1 \approx \underline{\underline{4.14159}}$$

$t_2 = 3.93749$ etter samme framgangsmåte.

$t_3 = 3.94073$ etter samme framgangsmåte.

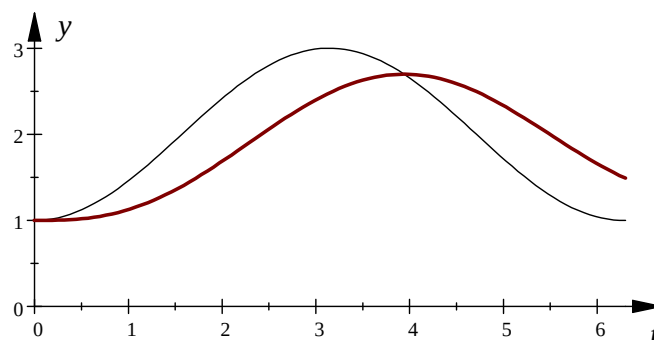
Altså er

$$\underline{\underline{t = 3.94}}$$

Figuren nedenfor viser nivået y som funksjon av t (tykk strek), sammen med grafen av vannstrømmen inn

$$f(t) = 2 - \cos t.$$

Vi husker at vannstrømmen ut har samme tallverdi som y . Vi ser (som ventet) at nivået y øker så lenge vannstrømmen inn er større enn vannstrømmen ut, og får sin største verdi når vannstrøm inn er lik vannstrøm ut. Dette inntreffer litt etter at vannstrømmen inn har nådd sin største verdi. Vi ser også at største verdi av vannstrømmen ut er mindre enn største verdi for vannstrømmen inn. Dette betyr at bassenget vil dempe og forsinke flommen.



Oppgave 5

a) $y(t) = 30 + 30e^{-0.2t} - 40e^{-0.1t}$

Deriverer for å finne minimumspunktet:

$$\frac{dy}{dt} = 0 + 30(-0.2)e^{-0.2t} - 40(-0.1)e^{-0.1t} = \underline{-6e^{-0.2t} + 4e^{-0.1t}}$$

Ekstremalpunkt når

$$\frac{dy}{dt} = 0 \Leftrightarrow -6e^{-0.2t} + 4e^{-0.1t} = 0.$$

Likningen løses enklest etter at den er multiplisert med $e^{0.2t}$:

$$(-6e^{-0.2t} + 4e^{-0.1t}) \cdot e^{0.2t} = 0$$

$$-6 + 4e^{0.1t} = 0 \Leftrightarrow 4e^{0.1t} = 6 \Leftrightarrow e^{0.1t} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$0.1t = \ln\left(\frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow t = 10 \cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right) \approx \underline{\underline{4.05}}$$

Sjekker at dette virkelig er minimumspunkt:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = (-6)(-0.2)e^{-0.2t} + 4(-0.1)e^{-0.1t} = \underline{1.2e^{-0.2t} - 0.4e^{-0.1t}}$$

Setter inn

$$t = 10 \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

og får

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2} &= 1.2e^{-0.2 \cdot 10 \ln(\frac{3}{2})} - 0.4e^{-0.1 \cdot 10 \ln(\frac{3}{2})} = 1.2e^{-2 \ln(\frac{3}{2})} - 0.4e^{-\ln(\frac{3}{2})} \\ &= 1.2\left(e^{\ln(\frac{3}{2})}\right)^{-2} - 0.4\left(e^{\ln(\frac{3}{2})}\right)^{-1} = 1.2\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} - 0.4\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = 1.2 \cdot \frac{4}{9} - 0.4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15} > 0 \end{aligned}$$

Siden den andrederiverte er positiv når den deriverte er lik null, har vi funnet et minimumspunkt. Der er temperaturen (målt i grader)

$$y_{\min} = 30 + 30e^{-0.2 \cdot 10 \ln(\frac{3}{2})} - 40e^{-0.1 \cdot 10 \ln(\frac{3}{2})} = 30 + 30\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} - 40\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \underline{\underline{\frac{50}{3} \approx 16.7}}$$

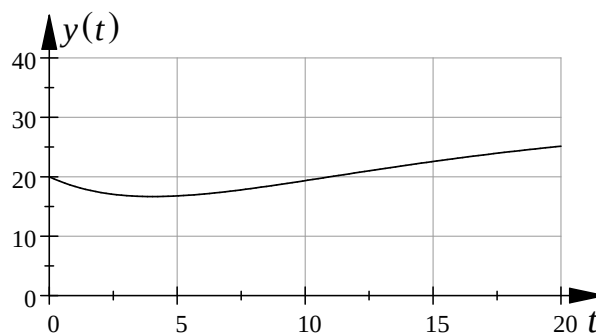
Her har jeg har ”stjålet” mellomregninger fra utregningen ovenfor.

Videre ser vi at

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 30$$

slik at $y = 30$ blir en asymptote.

Grafen blir da som vist til høyre:



b) $\frac{dy}{dt} = -ky \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -kdt$

Integrerer begge sider:

$$\ln y = -kt + C_1 \Leftrightarrow y = e^{-kt+C_1} = e^{-kt} \cdot e^{C_1} = \underline{Ce^{-kt}}$$

Finner C:

$$y(0) = 20 \Leftrightarrow C \cdot e^0 = 20 \Leftrightarrow C = 20$$

slik at

$$\underline{\underline{y(t) = 20e^{-kt}}}$$

Finner k :

$$y(5) = 12.1 \Leftrightarrow 20e^{-5k} = 12.1$$

$$e^{-5k} = \frac{12.1}{20} = 0.605 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{5} \ln 0.605 = \underline{\underline{0.1}}$$

c) $\frac{dy}{dt} = -ky + 3(1 - e^{-at})$

Ordner som en lineær differensiallikning, og setter inn de gitte konstantene:

$$\frac{dy}{dt} = -ky + 3(1 - e^{-at}) \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} + 0.1y = 3(1 - e^{-0.2t})$$

Dette er en lineær likning som løses med formel. Finner først

$$F(t) = \int 0.1 dt = 0.1t$$

og får nå

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-F(t)} \left(\int e^{F(t)} \cdot 3(1 - e^{-0.2t}) dt + C \right) = e^{-0.1t} \left(\int e^{0.1t} \cdot (3 - 3e^{-0.2t}) dt + C \right) \\ &= e^{-0.1t} \left(\int 3e^{0.1t} dt - \int 3e^{-0.1t} dt + C \right) = e^{-0.1t} \left(\frac{3}{0.1} e^{0.1t} - \frac{3}{-0.1} e^{-0.1t} + C \right) \\ &= \underline{\underline{30 + 30e^{-0.2t} + Ce^{-0.1t}}} \end{aligned}$$

Finner C :

$$y(0) = 20 \Leftrightarrow 30 + 30e^0 + Ce^0 = 20 \Leftrightarrow C = 20 - 30 - 30 = \underline{\underline{-40}}$$

Altså er

$$y(t) = \underline{\underline{30 + 30e^{-0.2t} - 40e^{-0.1t}}}$$

Dette er samme funksjon som i a). Vi kan derfor si at minimumstemperaturen i hytta blir 16.7 grader, og at temperaturen aldri kan overstige 30 grader.

I praksis kommer ikke temperaturen opp mot 30 grader, fordi formelen for energitilførsel ikke gjelder lenger når sola går ned.

Dersom det i det hele tatt skal eksistere en grenseverdi, må y gå mot en fast verdi når $t \rightarrow \infty$. Fysisk innebærer det at temperaturen i hytta nærmer seg en konstant verdi.

Da er

$$\frac{dy}{dt} = 0$$

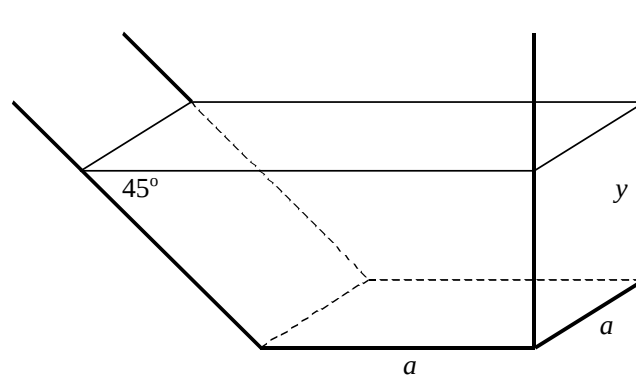
Videre vil $e^{-at} \rightarrow 0$ når $t \rightarrow \infty$, slik at vi får

$$\frac{dy}{dt} = 0 \Leftrightarrow -ky + 3(1 - 0) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{k} = \frac{3}{0.1} = \underline{\underline{30}}.$$

Dette stemmer med resultatet fra a).

Oppgave 6

a)



Av figuren ser vi at sideflaten er et parallelogram som har areal

$$A = \frac{a + (a + y)}{2} \cdot y = \frac{2a + y}{2} y = \left(a + \frac{1}{2}y\right)y$$

Da blir volumet

$$V = A \cdot a = \left(a + \frac{1}{2}y\right)y \cdot a = \underline{\underline{a^2 y + \frac{1}{2}ay^2}}.$$

b) "Hvor fort vannhøyden øker" må oppfattes som verdien av størrelsen $\frac{dy}{dt}$.

Av oppgaveteksten vet vi at

$$\frac{dV}{dt} = 0.001 \text{ m}^3/\text{s}$$

Vi deriverer formelen for volum med hensyn på tid, og får

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = \left(a^2 \cdot 1 + \frac{1}{2}a \cdot 2y\right) \frac{dy}{dt} = \left(a^2 + ay\right) \frac{dy}{dt}.$$

Setter $a = 1 \text{ m}$, $y = 0.25 \text{ m}$, og, og får

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{a^2 + ay} \cdot \frac{dV}{dt} = \frac{1}{(1 \text{ m})^2 + (1 \text{ m})(0.25 \text{ m})} \cdot 0.001 \text{ m}^3/\text{s} \\ &= \frac{1}{1.25 \text{ m}^2} \cdot 0.001 \text{ m}^3/\text{s} = \underline{\underline{8 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}}} \end{aligned}$$

c1) Fra b) vet vi at når $a = 1$, blir

$$\frac{dV}{dt} = (1 + y) \frac{dy}{dt}$$

Men ut fra opplysningene i oppgaven kan vi også sette

$$\frac{dV}{dt} = q_{\text{inn}} - q_{\text{ut}} = 0.001 - 0.001y = 0.001(1 - y).$$

Kombineres dette, får vi

$$\underline{\underline{(1 + y) \frac{dy}{dt} = 0.001(1 - y)}}$$

c2) Denne differensiallikningen er separabel:

$$(1+y)\frac{dy}{dt} = 0.001(1-y) \Leftrightarrow \frac{1+y}{1-y}dy = 0.001dt$$

Omformer venstre side for å kunne integrere:

$$\frac{y+1}{y-1} = \frac{(y-1)+2}{y-1} = 1 + \frac{2}{y-1}$$

Integrerer:

$$\int \frac{1+y}{1-y} dy = \int 0.001dt$$

$$\int 1dy + \int \frac{2}{y-1} dy = \int 0.001dt$$

$$y + 2\ln|y-1| = 0.001t + C \Leftrightarrow y + \ln(y-1)^2 = 0.001t + C$$

Setter $y = 0$ når $t = 0$, og får $C = 0$.

Altså er

$$\underline{\underline{y + \ln(y-1)^2 = 0.001t}}$$

(som det ikke er mulig å løse ut y av).

- c3) Vannhøyden når sin største verdi når det renner like mye ut som inn, d.v.s. når $0.001y = 0.001 \Leftrightarrow y = 1$.

Vannhøyden når halvparten av denne verdien når

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{0.001} \left(y + \ln(y-1)^2 \right) = 1000 \left(\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 \right) \\ &= 1000 \left(\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{1}{4}\right) \right) = \underline{\underline{500 - 1000\ln 4}} \end{aligned}$$

Oppgave 7

- a) Når båten har konstant fart $v_0 = 10 \text{ m/s}$, er motorkraften motsatt like stor som friksjonskraften slik at

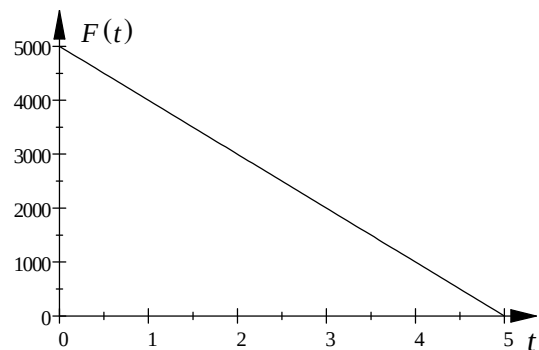
$$F = kv_0 = 500 \cdot 10 \text{ N} = \underline{\underline{5000 \text{ N}}}.$$

Videre avtar kraften lineært fra 5000 N til 0 N på 5 sekunder, slik at stigningstallet blir

$$\frac{0 \text{ N} - 5000 \text{ N}}{5 \text{ s}} = \underline{\underline{-1000 \text{ N/s}}}$$

Vi får at

$$\underline{\underline{F(t) = 5000 - 1000t.}}$$



- b) Setter opp Newtons 2. lov:

$$F(t) + F_f = m \cdot a \Leftrightarrow (5000 - 1000t) - 500v = 1000 \cdot \frac{dv}{dt}.$$

Forkorter og ordner:

$$\underline{\underline{\frac{dv}{dt} + \frac{1}{2}v = 5 - t}} \text{ med startbetingelse } v(0) = 10.$$

Dette er en lineær, 1. ordens likning. Hjelpfunksjonen blir

$$F(t) = \int \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2}t$$

slik at

$$v(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left(\int e^{\frac{1}{2}t} (5-t) dt + C \right) = e^{-\frac{1}{2}t} \left((14-2t)e^{\frac{1}{2}t} + C \right) = \underline{14-2t+Ce^{-\frac{1}{2}t}}$$

Finner C:

$$v(0) = 10 \Leftrightarrow 14 - 2 \cdot 0 + Ce^0 = 10 \Leftrightarrow \underline{C = -4}$$

Altså er

$$\underline{\underline{v(t) = 14 - 2t - 4e^{-\frac{1}{2}t} \quad \text{når } 0 \leq t \leq 5.}}$$

c) Når $t > 5$, er $F(t) = 0$. Da blir differensiallikningen

$$F(t) + F_f = m \cdot a \Leftrightarrow 0 - 500v = 1000 \cdot \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{v}{2}$$

Oppfatter likningen som separabel.

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v}{2} \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dt}{2}$$

Integrerer, og får

$$\ln v = -\frac{1}{2}t + C_1 \Leftrightarrow v = e^{-\frac{1}{2}t+C_1} = e^{-\frac{1}{2}t} \cdot e^{C_1} = \underline{C_2 e^{-\frac{1}{2}t}}$$

Startverdien er lik farten når $t = 5$ s:

$$v(5) = 14 - 2 \cdot 5 - 4e^{-\frac{1}{2} \cdot 5} = \underline{4(1 - e^{-\frac{5}{2}})}$$

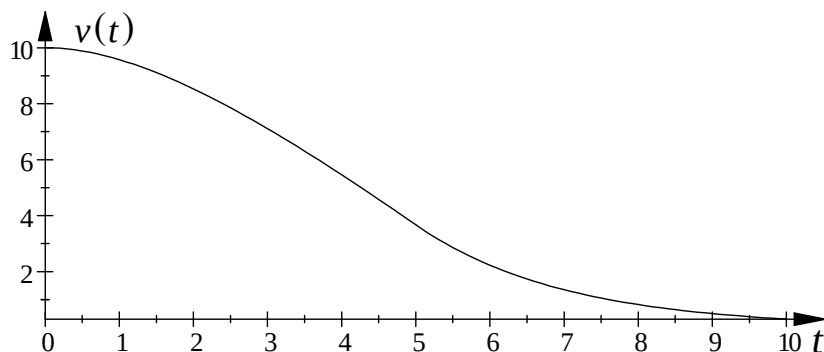
Da er

$$C_2 e^{-\frac{5}{2}} = 4(1 - e^{-\frac{5}{2}}) \Leftrightarrow C_2 = 4(1 - e^{-\frac{5}{2}}) \cdot e^{\frac{5}{2}} = \underline{4(e^{\frac{5}{2}} - 1)}.$$

Altså blir

$$\underline{\underline{v(t) = 4(e^{\frac{5}{2}} - 1)e^{-\frac{1}{2}t} \quad \text{når } t > 5.}}$$

Grafen til farten blir da slik:



Oppgave 8

a) Newtons 2. lov er

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{dv}{dt}$$

Siden F er rettet mot bevegelsesretningen, får vi ved innsetting av de gitte opplysningene (ser bort fra benevning):

$$-10v - v^2 = 100 \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow \underline{\underline{100 \frac{dv}{dt} + 10v + v^2 = 0.}}$$

b) Likningen er separabel:

$$100 \frac{dv}{dt} = -(10v + v^2) \Leftrightarrow \frac{dv}{10v + v^2} = -\frac{1}{100} dt.$$

Integrerer begge sider. Venstre side krever delbrøkkoppspalting:

$$\begin{aligned} \frac{1}{10v + v^2} &= \frac{1}{v(v+10)} = \frac{A}{v} + \frac{B}{v+10} \\ &= \frac{A(v+10) + Bv}{v(v+10)} = \frac{(A+B)v + 10A}{v(v+10)} \end{aligned}$$

Sammenlikninger koeffisienter i tellerne:

$$10A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{10}$$

$$A + B = 0 \Leftrightarrow B = -A = -\frac{1}{10}$$

Da er

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{10v + v^2} dv &= \frac{1}{10} \int \frac{1}{v} dv - \frac{1}{10} \int \frac{1}{v+10} dv \\ &= \frac{1}{10} (\ln v - \ln(v+10)) = \frac{1}{10} \ln \left(\frac{v}{v+10} \right) \end{aligned}$$

Her benytter jeg at $v > 0$. Integrerer også høyre side, og får

$$\frac{1}{10} \ln \left(\frac{v}{v+10} \right) = -\frac{1}{100} t + C_1 \Leftrightarrow \ln \left(\frac{v}{v+10} \right) = -\frac{1}{10} t + C$$

der $C_1 = 10C$.

Siden $v(0) = 10$, blir

$$\ln \left(\frac{10}{10+10} \right) = -\frac{1}{10} \cdot 0 + C_1 \Leftrightarrow C_1 = \ln \left(\frac{1}{2} \right) = -\ln 2.$$

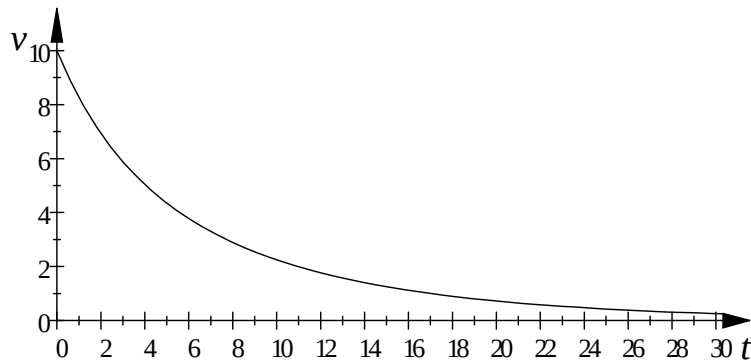
Altså blir

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{v}{v+10} \right) &= -\frac{1}{10} t - \ln 2 \Leftrightarrow \ln \left(\frac{v}{v+10} \right) + \ln 2 = -\frac{1}{10} t \\ \Leftrightarrow \ln \left(\frac{2v}{v+10} \right) &= -\frac{1}{10} t \Leftrightarrow \frac{2v}{v+10} = e^{-\frac{1}{10} t} \end{aligned}$$

Løser ut v :

$$2v = (v+10)e^{-\frac{1}{10} t} \Leftrightarrow (2 - e^{-\frac{1}{10} t})v = 10e^{-\frac{1}{10} t} \Leftrightarrow \underline{\underline{v(t) = \frac{10e^{-\frac{1}{10} t}}{2 - e^{-\frac{1}{10} t}} = \frac{10}{2e^{\frac{1}{10} t} - 1}}}.$$

Grafen blir da slik:



Oppgave 9

a) Differensiallikningen blir

$$\frac{dv}{dt} = 10 - v, \quad v(0) = 0.$$

Terminalfarten finnes av

$$10 - v_t = 0 \Leftrightarrow v_t = 10.$$

Da blir

$$u = 10 - v \Leftrightarrow v = 10 - u \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{du}{dt}.$$

Setter inn i differensiallikningen:

$$-\frac{du}{dt} = u \Leftrightarrow \frac{du}{u} = -dt$$

Integrerer:

$$\int \frac{du}{u} = -\int dt \Leftrightarrow \ln u = -t + C_1 \Leftrightarrow u = e^{-t+C_1} = Ce^{-t}.$$

Da er

$$v = 10 - u = 10 - Ce^{-t}.$$

$$v(0) = 0 \Leftrightarrow 10 - C \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow C = 10.$$

Løsningen blir derfor

$$v(t) = 10 - 10e^{-t} = \underline{\underline{10(1 - e^{-t})}}.$$

b) Differensiallikningen blir

$$\frac{dv}{dt} = 10 - \frac{1}{10}v^2, \quad v(0) = 0.$$

Terminalfarten finnes av

$$10 - \frac{1}{10}v_t^2 = 0 \Leftrightarrow v_t^2 = 100 \Leftrightarrow v_t = 10.$$

Da blir

$$u = 10 - v \Leftrightarrow v = 10 - u \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{du}{dt}.$$

Setter inn i differensiallikningen:

$$-\frac{du}{dt} = 10 - \frac{1}{10}(10 - u)^2 = 10 - \frac{1}{10}(100 - 20u + u^2) = 2u - \frac{1}{10}u^2.$$

Dette er en separabel likning:

$$\frac{du}{2u - \frac{1}{10}u^2} = -dt \Leftrightarrow \frac{du}{u^2 - 20u} = \frac{1}{10}dt$$

Integrerer:

$$\int \frac{du}{u^2 - 20u} = \frac{1}{10} \int dt \Leftrightarrow \int \frac{du}{u(u-20)} = \frac{1}{10}t + C_1.$$

Delbrøkkospalter (hopper over detaljer):

$$\int \frac{du}{u(u-20)} = \int \left(\frac{\frac{1}{20}}{u-20} - \frac{\frac{1}{20}}{u} \right) du = \frac{1}{20} \ln|u-20| - \frac{1}{20} \ln u = \frac{1}{20} \ln \left(\frac{20-u}{u} \right)$$

der jeg har benyttet at $0 < u \leq 10$. Samler trådene:

$$\frac{1}{20} \ln \left(\frac{20-u}{u} \right) = \frac{1}{10}t + C_1 \Leftrightarrow \ln \left(\frac{20-u}{u} \right) = 2t + 20C_1 \Leftrightarrow \frac{20-u}{u} = e^{2t+20C_1} = Ce^{2t}.$$

Finner C ved å benytte at $v(0) = 0 \Leftrightarrow u(0) = 10 - v(0) = 10$, slik at

$$\frac{20-10}{10} = C \cdot 1 \Leftrightarrow C = 1.$$

Da er

$$\frac{20-(10-v)}{10-v} = e^{2t} \Leftrightarrow \frac{10+v}{10-v} = e^{2t} \Leftrightarrow 10+v = 10e^{2t} - e^{2t} \cdot v$$

$$\Leftrightarrow v(1+e^{2t}) = 10(e^{2t}-1) \Leftrightarrow v(t) = \frac{10(e^{2t}-1)}{1+e^{2t}} = \underline{\underline{\frac{10(1-e^{-2t})}{1+e^{-2t}}}}$$

c) Differensiallikningen blir

$$\frac{dv}{dt} = 20 - v - \frac{1}{10}v^2, \quad v(0) = 0.$$

Terminalfarten finnes av

$$20 - v_t - \frac{1}{10}v_t^2 = 0 \Leftrightarrow v_t^2 + 10v_t - 200 = 0$$

$$v_t = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 + 4 \cdot 2 \cdot 200}}{2} = \frac{-10 \pm 30}{2} = \begin{cases} 10 \\ -20 \end{cases}$$

Her er åpenbart $v_t = 10$ den eneste brukbare løsningen. Da blir

$$u = 10 - v \Leftrightarrow v = 10 - u \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{du}{dt}.$$

Setter inn i differensiallikningen:

$$-\frac{du}{dt} = 20 - (10 - u) - \frac{1}{10}(10 - u)^2 = 10 + u - \frac{1}{10}(100 - 20u + u^2) = 3u - \frac{1}{10}u^2.$$

Dette er en separabel likning:

$$\frac{du}{3u - \frac{1}{10}u^2} = -dt \Leftrightarrow \frac{du}{u^2 - 30u} = \frac{1}{10}dt$$

Integrerer:

$$\int \frac{du}{u^2 - 30u} = \frac{1}{10} \int dt \Leftrightarrow \int \frac{du}{u(u-30)} = \frac{1}{10}t + C_1.$$

Delbrøkkospalter (hopper over detaljer):

$$\int \frac{du}{u(u-30)} = \int \left(\frac{\frac{1}{30}}{u-30} - \frac{\frac{1}{30}}{u} \right) du = \frac{1}{30} \ln|u-30| - \frac{1}{30} \ln u = \frac{1}{30} \ln \left(\frac{30-u}{u} \right)$$

der jeg har benyttet at $0 < u \leq 10$. Samler trådene:

$$\frac{1}{30} \ln \left(\frac{30-u}{u} \right) = \frac{1}{10} t + C_1 \Leftrightarrow \ln \left(\frac{30-u}{u} \right) = 3t + 30C_1 \Leftrightarrow \frac{30-u}{u} = e^{3t+30C_1} = Ce^{3t}.$$

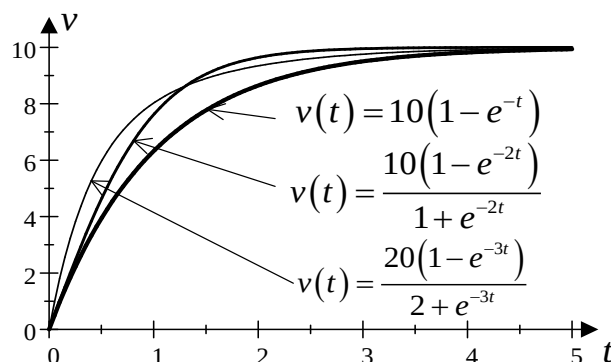
Finner C ved å benytte at $v(0) = 0 \Leftrightarrow u(0) = 10 - v(0) = 10$, slik at

$$\frac{30-10}{10} = C \cdot 1 \Leftrightarrow C = 2.$$

Da er

$$\frac{30-(10-v)}{10-v} = 2e^{3t} \Leftrightarrow \frac{20+v}{10-v} = 2e^{3t} \Leftrightarrow 20+v = 20e^{3t} - 2e^{3t} \cdot v$$

$$\Leftrightarrow v(1+2e^{3t}) = 20(e^{3t}-1) \Leftrightarrow v(t) = \frac{20(e^{3t}-1)}{1+2e^{3t}} = \frac{20(1-e^{-3t})}{2+e^{-3t}}$$



Oppgave 10

b) $x \cdot y'' - y' = 1, \quad y'(1) = 1, \quad y(1) = 1$

Setter $z = y' \Leftrightarrow z' = y''$.

Da blir likningen

$$x \cdot z' - z = 1 \Leftrightarrow z' - \frac{1}{x} z = \frac{1}{x}$$

Dette er en lineær likning som løses med formel:

$$F(x) = \int -\frac{1}{x} dx = -\ln x$$

slik at

$$\begin{aligned} z(x) &= e^{-(-\ln x)} \left(\int \frac{1}{x} \cdot e^{-\ln x} dx + C_1 \right) = x \left(\int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} dx + C_1 \right) = x \left(\int x^{-2} dx + C_1 \right) \\ &= x \left(\frac{1}{-2+1} x^{-2+1} + C_1 \right) = x \left(-\frac{1}{x} + C_1 \right) = \underline{-1 + C_1 x} \end{aligned}$$

Da blir

$$y = \int z dx = \int (-1 + C_1 x) dx = \underline{-x + C_1 \cdot \frac{1}{2} x^2 + C_2}.$$

Finner C_1 og C_2 :

$$y'(1) = 1 \Leftrightarrow z(1) = 1 \Leftrightarrow -1 + C_1 \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow \underline{C_1 = 2}.$$

$$y(1) = 1 \Leftrightarrow -1 + C_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1^2 + C_2 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 2 + C_2 = 2 \Leftrightarrow \underline{C_2 = 1}.$$

Løsningen blir

$$y(x) = \underline{x^2 - x + 1}$$

Oppgave 11a

$$y'' + 6y' + 10y = 0.$$

Dette er en lineær 2.ordens differensiallikning som løses etter standard oppskrift:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0$$

$$\lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-6 \pm 2i}{2} = \underline{-3 \pm i}$$

Løsningen kan skrives å mange former:

$$y(x) = \underline{Ae^{-3x} \sin(x + \varphi)} = \underline{Ae^{-3x} \cos(x + \varphi)} = \underline{e^{-3x} (C_1 \sin x + C_2 \cos x)}.$$

Oppgave 11b

$$4y'' + 4y' + 17 = 0.$$

Den karakteristiske likningen er

$$4\lambda^2 + 4\lambda + 17 = 0$$

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 17}}{2 \cdot 4} = \frac{-4 \pm 4 \cdot \sqrt{-16}}{8} = \frac{-1 \pm 4i}{2} = \underline{-\frac{1}{2} \pm 2i}.$$

Ifølge ”oppskriften” er den generelle løsningen av differensiallikningen

$$x(t) = \underline{e^{-\frac{1}{2}t} (C_1 \sin(2t) + C_2 \cos(2t))} = \underline{Ae^{-\frac{1}{2}t} \sin(2t + \varphi)}.$$

Oppgave 11c

$$y'' + 2y' + 5y = 10x.$$

Løser først den tilhørende homogene likningen. Den karakteristiske likningen blir

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \underline{-1 \pm 2i}.$$

Den homogene likningen har da løsning

$$y_h(x) = \underline{e^{-x} (A \cos(2x) + B \sin(2x))}.$$

Søker en partikulær løsning av samme form som høyresiden, d.v.s. av formen

$$y_p(x) = C_1 x + C_2 \Rightarrow y_p'(x) = C_1 \Rightarrow y_p''(x) = 0.$$

Setter inn i differensiallikningen:

$$2C_1 + 5(C_1 x + C_2) = 10x$$

$$(5C_1 - 10)x + 2C_1 + 5C_2 = 0$$

Dersom dette skal være oppfylt for alle verdier av x , må vi ha:

$$5C_1 = 10 \Leftrightarrow \underline{C_1 = 2}$$

og

$$2C_1 + 5C_2 = 0 \Leftrightarrow C_2 = -\frac{2}{5}C_1 = -\frac{2}{5} \cdot 2 = \underline{-\frac{4}{5}}.$$

Altså er løsningen

$$y(x) = \underline{e^{-x} (A \cos(2x) + B \sin(2x)) + 2x - \frac{4}{5}}.$$

Oppgave 11d

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = -2t - 2.$$

Dette er en inhomogen differensiallikning som har løsning

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

der $x_h(t)$ er løsning av den tilhørende homogene likningen mens $x_p(t)$ er en partikulær løsning. Setter opp den karakteristiske likningen for å finne $x_h(t)$:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\lambda_1 = -1}, \quad \underline{\lambda_2 = -2}$$

Da blir

$$\underline{x_h(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}}.$$

Prøver en partikulær løsning av samme form som høyresiden i differensiallikningen:

$$x_p(t) = A_0 + A_1 t \Rightarrow x_p'(t) = A_1 \Rightarrow x_p''(t) = 0.$$

Setter inn i differensiallikningen:

$$0 + 3A_1 + 2(A_0 + A_1 t) = -2t - 2$$

$$\Leftrightarrow (3A_1 + 2A_0 + 2) + (2A_1 + 2)t = 0$$

For at dette skal være oppfylt for alle verdier av t , må vi ha:

$$3A_1 + 2A_0 + 2 = 0 \quad (1)$$

$$2A_1 + 2 = 0 \Leftrightarrow \underline{A_1 = -1}.$$

Setter dette inn i (1):

$$3(-1) + 2A_0 + 2 = 0 \Leftrightarrow 2A_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow \underline{A_0 = \frac{1}{2}}.$$

Da er

$$\underline{x(t) = x_h(t) + x_p(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + \frac{1}{2} - t}.$$

Oppgave 11e

$$y'' + 4y' + 3y = e^{-x}$$

Den karakteristiske likningen er

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} = \begin{cases} -1 \\ -3 \end{cases}.$$

Løsningen av den tilhørende homogene likningen er derfor

$$y_h(x) = \underline{Ae^{-x} + Be^{-3x}}.$$

Siden e^{-x} allerede inngår i $y_h(x)$, prøver vi en partikulær løsning av formen

$$y_p(x) = Cxe^{-x} \Leftrightarrow y_p'(x) = C(1 \cdot e^{-x} + xe^{-x}(-1)) = C(1-x)e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow y_p''(x) = C(-1e^{-x} + (1-x)e^{-x}(-1)) = C(-2+x)e^{-x}$$

Setter inn i den gitte likningen:

$$(C(-2+x)\cancel{e^{-x}}) + 4(C(1-x)\cancel{e^{-x}}) + 3Cx\cancel{e^{-x}} = \cancel{e^{-x}}$$

$$-2C + Cx + 4C - 4Cx + 3Cx = 1 \Leftrightarrow 0 + 2C = 1 \Leftrightarrow \underline{C = \frac{1}{2}}$$

Den generelle løsningen er derfor

$$y(x) = \underline{\underline{Ae^{-x} + Be^{-3x} + \frac{1}{2}xe^{-x}}}.$$

Oppgave 12a

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = 2e^t, \quad y(0) = 0, \quad \frac{dy}{dt}(0) = 1$$

Løser først den tilhørende homogene likningen. Den karakteristiske likningen er

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \underline{\lambda = 1} \text{ (dobbel rot).}$$

Da er

$$y_h(t) = \underline{(A + Bt)e^t}.$$

Siden både e^t og te^t allerede inngår i løsningen av den homogene likningen, prøver jeg en partikulær løsning av formen

$$\begin{aligned} y_p &= Ct^2e^t \Rightarrow \frac{dy_p}{dt} = C(2te^t + t^2e^t) = C(2t + t^2)e^t \\ \Rightarrow \frac{d^2y_p}{dt^2} &= C((2 + 2t)e^t + (2t + t^2)e^t) = C(2 + 4t + t^2)e^t \end{aligned}$$

Setter inn i differensiallikningen:

$$C(2 + 4t + t^2)e^t - 2C(2t + t^2)e^t + Ct^2e^t = 2e^t.$$

Forkorter bort e^t og ordner, og ender opp med

$$2C = 2 \Rightarrow \underline{C = 1}.$$

Altså er

$$y(t) = \underline{(A + Bt)e^t + t^2e^t} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = (B + 2t)e^t + (A + Bt + t^2)e^t$$

Bruker startbetingelsene til å finne A og B:

$$y(0) = 0 \Rightarrow \underline{A = 0}.$$

$$\frac{dy}{dt}(0) = 1 \Rightarrow B + A = 1 \Rightarrow B = 1 - A = \underline{1}.$$

Altså er

$$y(t) = \underline{\underline{(t + t^2)e^t}}.$$

Oppgave 12b

$$y'' - y = e^x + e^{-x}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 12.$$

Løser den homogene likningen først. Der er den karakteristiske likningen

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \underline{\lambda = \pm 1}$$

som gir løsningen

$$y_h(x) = \underline{Ae^x + Be^{-x}}.$$

Begge leddene på høyre side av differensiallikningen er med i $y_h(x)$, slik at jeg prøver en partikulær løsning

$$y_p(x) = Cxe^x + Dxe^{-x} \Rightarrow y_p'(x) = C(e^x + xe^x) + D(e^{-x} - xe^{-x}),$$

$$y_p''(x) = C(e^x + (e^x + xe^x)) + D(-e^{-x} - (e^{-x} - xe^{-x}))$$

$$= C(2+x)e^x + D(-2+x)e^{-x}$$

Setter inn i differensiallikningen og ordner:

$$C(2+x)e^x + D(-2+x)e^{-x} - (Cxe^x + Dxe^x) = e^x + e^{-x}$$

$$2Ce^x + \cancel{Cxe^x} - 2De^{-x} + \cancel{Dxe^{-x}} - \cancel{Cxe^x} - \cancel{Dxe^x} = e^x + e^{-x}$$

$$(2C-1)e^x + (-2D-1)e^{-x} = 0$$

Dersom dette skal være oppfylt for alle verdier av x , må vi ha at:

$$2C-1=0 \Leftrightarrow C=\frac{1}{2}$$

og

$$-2D-1=0 \Leftrightarrow D=-\frac{1}{2}.$$

Løsningen blir da

$$y(x) = Ae^x + Be^{-x} + \frac{1}{2}x(e^x - e^{-x}).$$

Finner A og B fra startbetingelsene:

$$y'(x) = Ae^x - Be^{-x} + \frac{1}{2}(e^x + xe^x - e^{-x} + xe^{-x}).$$

$$y(0) = A \cdot e^0 + B \cdot e^0 + 0 = 2 \Leftrightarrow A+B=2$$

$$y'(0) = A \cdot e^0 - B \cdot e^0 + \frac{1}{2}(e^0 + 0 - e^0 + 0) = 12$$

$$\Leftrightarrow A-B=12$$

Legger disse likningene sammen, og får

$$2A=14 \Leftrightarrow A=7.$$

Av den første likningen følger nå

$$B=2-A=2-7=-5.$$

Altså er løsningen

$$y(x) = 7e^x - 5e^{-x} + \frac{1}{2}x(e^x - e^{-x}).$$

Oppgave 12c

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = \sin t, \quad x(0)=1, \quad \frac{dx}{dt}(0)=0.$$

Den tilhørende homogene likningen har karakteristisk likning

$$\lambda^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2i.$$

Løsningen av den homogene likningen blir derfor

$$x_h = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)$$

eller

$$x_h = A \sin(2t + \varphi)$$

eller

$$x_h = A \cos(2t + \varphi).$$

Søker en partikulær løsning av formen

$$x_p = A \cos t + B \sin t \Rightarrow \frac{dx_p}{dt} = -A \sin t + B \cos t \Rightarrow \frac{d^2x_p}{dt^2} = -A \cos t - B \sin t$$

Setter inn i den opprinnelige differensiallikningen:

$$(-A \cos t - B \sin t) + 4(A \cos t + B \sin t) = \sin t$$

$$\Leftrightarrow (-A + 4A) \cos t + (-B + 4B - 1) \sin t = 0.$$

$$\Leftrightarrow 3A \cos t + (3B - 1) \sin t = 0$$

For at denne likningen skal være oppfylt for alle verdier av t , må vi ha

$$3A = 0 \Leftrightarrow \underline{A = 0}$$

og

$$3B - 1 = 0 \Leftrightarrow \underline{B = \frac{1}{3}}.$$

Dette gir

$$x(t) = \underline{C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + \frac{1}{3} \sin t}.$$

Finner C_1 og C_2 av startbetingelsene:

$$\frac{dx}{dt} = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t) + \frac{1}{3} \cos t$$

$$x(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 + \frac{1}{3} \cdot \sin 0 = 1 \Leftrightarrow C_1 = \underline{1}$$

$$\frac{dx}{dt}(0) = -2C_1 \cdot \sin 0 + 2C_2 \cdot \cos(0) + \frac{1}{3} \cdot \cos 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow -0 + 2C_1 \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow C_2 = \underline{-\frac{1}{6}}$$

Alt i alt blir da løsningen

$$x(t) = \underline{\underline{\cos(2t) - \frac{1}{6} \sin(2t) + \frac{1}{3} \sin t}}.$$

Oppgave 13

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + b \cdot \frac{dy}{dx} + 5y = 0 \quad \text{der } b \text{ er en positiv konstant.}$$

a) Setter opp den karakteristiske likningen

$$\lambda^2 + b \cdot \lambda + 5 = 0$$

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 20}}{2}$$

For å få en dempet svingning, må vi få et negativt tall under rottegnet:

$$b^2 - 20 < 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{b < \sqrt{20} \quad (= 2\sqrt{5})}} \quad \text{fordi } b \text{ skal være en positiv konstant.}$$

b) Setter $b = 4$, og får

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = \underline{\underline{-2 \pm i}}.$$

Løsningen av differensiallikningen blir da

$$y(x) = \underline{Ae^{-2x} \cos(x + \varphi)}$$

$$\text{eller } y(x) = Ae^{-2x} \sin(x + \varphi) \quad \text{eller } y(x) = e^{-2x} (C \cos x + D \sin x).$$

Velger den første formen. Da blir

$$\frac{dy}{dx} = A(-2e^{-2x} \cos(x + \varphi) + e^{-2x} (-\sin(x + \varphi))) = Ae^{-2x} (-2 \cos(x + \varphi) - \sin(x + \varphi)).$$

Setter inn startbetingelsene $y(0) = 0$, $\frac{dy}{dt}(0) = 1$ og får

$$y(0) = Ae^{-2 \cdot 0} \cos(0 + \varphi) = A \cos \varphi = 0 \Leftrightarrow \cos \varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = \pm \frac{1}{2} \pi.$$

$$\frac{dy}{dx}(0) = Ae^{-2 \cdot 0} (-2 \cos(0 + \varphi) - \sin(0 + \varphi)) = A(-2 \cos \varphi - \sin \varphi) = 1.$$

Vet at $\cos \varphi = 0$ og at $\sin \varphi = \sin(\pm \frac{1}{2} \pi) = \pm 1$, slik at

$$A(-2 \cdot 0 - (\pm 1)) = 1 \Leftrightarrow \mp A = 1.$$

For å få positiv A , må vi bruke $\varphi = -\frac{1}{2} \pi$. Da blir $A = 1$, slik at løsningen blir

$$y(x) = \underline{\underline{e^{-2x} \cos(x - \frac{1}{2} \pi)}}.$$

Oppgave 14

a) $y'' + 4y' + 4y = x + 2$

Finner først løsningen av den homogene likningen ved å løse den karakteristiske likningen

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \underline{\underline{-2}}.$$

Da blir løsningen av den homogene likningen

$$y_h = \underline{\underline{(C_1 + C_2 x)e^{-2x}}}.$$

Må finne en partikulær løsning av formen

$$y_p(x) = Ax + B \Rightarrow y_p'(x) = A \Rightarrow y_p''(x) = 0.$$

Setter inn i differensiallikningen:

$$0 + 4A + 4(Ax + B) = x + 2 \Leftrightarrow 4A + 4Ax + 4B = x + 2$$

$$\Leftrightarrow (4A - 1)x + (4A + 4B - 2) = 0$$

Dette er kun oppfylte for alle x dersom

$$4A - 1 = 0 \Leftrightarrow A = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

og

$$4A + 4B - 2 = 0 \Leftrightarrow B = \frac{1}{2} - A = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}.$$

Løsningen blir da

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \underline{\underline{(C_1 + C_2 x)e^{-2x} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}}}.$$

b) $y'' + k \cdot y' + 4y = 0$

$$\lambda^2 + k \cdot \lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{-k}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{k^2 - 16}.$$

Dersom $k^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{-4 < k < 4}}$ blir denne løsningen av formen $\lambda = -\frac{1}{2}k \pm i\omega$ der

$\omega = \frac{1}{2}\sqrt{k^2 - 16}$. Løsningen av differensiallikningen blir da

$$y(t) = e^{-\frac{1}{2}kt} (C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)).$$

Denne svingningen er dempet dersom $k > 0$. Altså: Dempet svingning dersom

$$k \in \underline{\underline{\langle 0, 4 \rangle}}.$$

Oppgave 15

a) $\frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + 2y = 0$

Den karakteristiske likningen blir

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i.$$

Dette gir

$$y_h(t) = \underline{\underline{e^{-t} (A \sin t + B \cos t)}}.$$

b)
$$\frac{d^3 y}{dt^3} + 2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} = 1 - e^{-t}.$$

Den karakteristiske likningen blir

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 + 2\lambda + 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ eller } \lambda = -1 \pm i.$$

Dette gir

$$y_h(t) = e^{-t} (A \sin t + B \cos t) + C e^{0t} = \underline{\underline{e^{-t} (A \sin t + B \cos t) + C}}.$$

Siden en konstant inngår både i høyresiden av differensiallikningen og i $y_h(t)$, lar vi

$y_p(t)$ inneholde et ledd $C_1 x$. Videre ser vi at e^{-t} inngår som eget ledd i høyresiden, men ikke som eget, frittstående ledd i $y_h(t)$. Vi prøver derfor en partikulær løsning av formen

$$y_p(t) = C_1 t + C_2 e^{-t}.$$

$$\frac{dy_p}{dt} = C_1 - C_2 e^{-t} \Rightarrow \frac{d^2 y_p}{dt^2} = C_2 e^{-t} \Rightarrow \frac{d^3 y_p}{dt^3} = -C_2 e^{-t}.$$

Setter inn i differensiallikningen og ordner:

$$-C_2 e^{-t} + 2C_2 e^{-t} + 2(C_1 - C_2 e^{-t}) = 1 - e^{-t}$$

$$-C_2 e^{-t} + 2C_1 = 1 - e^{-t}$$

$$(-C_2 + 1)e^{-t} + (2C_1 - 1) = 0$$

Dersom dette skal være oppfylt for alle verdier av x , må vi ha

$$-C_2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{C_2 = 1}},$$

$$2C_1 - 1 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{C_1 = \frac{1}{2}}}.$$

Vi samler trådene:

$$y(t) = \underline{\underline{y_h(t) + y_p(t) = e^{-t} (A \sin t + B \cos t) + C + \frac{1}{2}t + e^{-t}}}.$$

Oppgave 16

a)
$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{14}{3} \frac{dy}{dt} + \frac{8}{3} y = 0.$$

Den karakteristiske likningen blir

$$\lambda^2 + \frac{14}{3} \lambda + \frac{8}{3} = 0$$

$$\lambda = \frac{-\frac{14}{3} \pm \sqrt{\frac{196}{9} - \frac{32}{3}}}{2} = \frac{-\frac{14}{3} \pm \sqrt{\frac{196}{9} - \frac{96}{9}}}{2} = \frac{-\frac{14}{3} \pm \sqrt{\frac{100}{9}}}{2} = \frac{-\frac{14}{3} \pm \frac{10}{3}}{2} = \begin{cases} -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Da har differensiallikningen løsningen

$$y(t) = \underline{\underline{C_1 e^{-\frac{4}{3}t} + C_2 e^{-\frac{2}{3}t}}}.$$

b) $\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{14}{3} \frac{dy}{dt} + \frac{8}{3} y = 1 - e^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad \frac{dy(0)}{dt} = 0.$

Venstresiden er den samme som i a), slik at $y_h(t)$ allerede er funnet. Må da finne en partikulær løsning $y_p(t)$. Gjetter på at $y_p(t)$ har samme form som høyresiden, d.v.s.

$$y_p(t) = A + Be^{-t} \Rightarrow \frac{dy_p}{dt} = -Be^{-t} \Rightarrow \frac{d^2 y_p}{dt^2} = Be^{-t}.$$

Setter inn i likningen og ordner:

$$Be^{-t} + \frac{14}{3}(-Be^{-t}) + \frac{8}{3}(A + Be^{-t}) = 1 - e^{-t}$$

$$(B - \frac{14}{3}B + \frac{8}{3}B + 1)e^{-t} + (\frac{8}{3}A - 1) = 0$$

$$(-B + 1)e^{-t} + (\frac{8}{3}A - 1) = 0$$

Dersom dette skal være oppfylt for alle verdier av x , må vi ha:

$$-B + 1 = 0 \Leftrightarrow \underline{B = 1}.$$

$$\frac{8}{3}A - 1 = 0 \Leftrightarrow \underline{A = \frac{3}{8}}.$$

Da blir løsningen

$$y(t) = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-\frac{2}{3}t} + e^{-t} + \frac{3}{8}.$$

Bruker startbetingelsene for å finne C_1 og C_2 :

$$y(0) = C_1 \cdot e^0 + C_2 \cdot e^0 + e^0 + \frac{3}{8} = C_1 + C_2 + \frac{11}{8} = 0. \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = -4C_1 e^{-4t} - \frac{2}{3}C_2 e^{-\frac{2}{3}t} - e^{-t}.$$

$$\frac{dy(0)}{dt} = -4C_1 \cdot e^0 - \frac{2}{3}C_2 \cdot e^0 - e^0 = -4C_1 - \frac{2}{3}C_2 - 1 = 0. \quad (2)$$

Multipliserer (1) med 4 og legger til (2):

$$4C_2 - \frac{2}{3}C_2 + \frac{44}{8} - \frac{8}{8} = 0$$

$$\frac{10}{3}C_2 + \frac{36}{8} = 0 \Leftrightarrow C_2 = -\frac{3}{10} \cdot \frac{9}{2} = -\frac{27}{20}$$

Av (1) får vi nå

$$C_1 = -C_2 - \frac{11}{8} = \frac{27}{20} - \frac{11}{8} = \frac{54}{40} - \frac{55}{40} = -\frac{1}{40}.$$

Altså er

$$y(t) = \underline{\underline{-\frac{1}{40}e^{-4t} - \frac{27}{20}e^{-\frac{2}{3}t} + e^{-t} + \frac{3}{8}}}.$$

cI) For kar 1 er

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d(A \cdot x)}{dt} = A \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt}$$

fordi $A = 1$.

På samme måte får vi for kar 2:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dy}{dt}.$$

For begge karene er

$$\frac{dV}{dt} = \text{væskestrøm inn} - \text{væskestrøm ut}.$$

Da får vi:

Kar 1:

$$\frac{dV}{dt} = q_{\text{inn}} - q$$

$$\frac{dx}{dt} = (1 - e^{-t}) - (x - y) = \underline{\underline{-x + y + 1 - e^{-t}}}$$

Kar 2:

$$\frac{dV}{dt} = q - q_{\text{ut}}$$

$$\frac{dy}{dt} = (x - y) - \frac{8}{3}y = \underline{\underline{x - \frac{11}{3}y}}$$

cII) Siden vi skal komme fram til en andre ordens differensiallikning i y , er det naturlig å starte med å derivere likningen for kar 2:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dx}{dt} - \frac{11}{3} \frac{dy}{dt} = (-x + y + 1 - e^{-t}) - \frac{11}{3} \frac{dy}{dt}.$$

Nå gjenstår det å kvitte seg med x . Det oppnår vi ved å omforme likningen for kar 2:

$$\frac{dy}{dt} = x - \frac{11}{3}y \Leftrightarrow x = \frac{dy}{dt} + \frac{11}{3}y.$$

Setter dette inn, og får:

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2} &= \left(-\frac{dy}{dt} - \frac{11}{3}y \right) + y + 1 - e^{-t} - \frac{11}{3} \frac{dy}{dt} = -\frac{14}{3} \frac{dy}{dt} - \frac{8}{3}y + 1 - e^{-t} \\ \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{14}{3} \frac{dy}{dt} + \frac{8}{3}y}} &= 1 - e^{-t} \end{aligned}$$

cIII) Fra del b) av oppgaven vet vi at

$$y(t) = -\frac{1}{40}e^{-4t} - \frac{27}{20}e^{-\frac{2}{3}t} + e^{-t} + \frac{3}{8}.$$

Nå finner vi $x(t)$ enklest av likningen

$$\frac{dy}{dt} = x - \frac{11}{3}y \Leftrightarrow x(t) = \frac{dy}{dt} + \frac{11}{3}y.$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(-\frac{1}{40}(-4e^{-4t}) - \frac{27}{20}\left(-\frac{2}{3}e^{-\frac{2}{3}t}\right) - e^{-t} \right) + \frac{11}{3}\left(-\frac{1}{40}e^{-4t} - \frac{27}{20}e^{-\frac{2}{3}t} + e^{-t} + \frac{3}{8} \right) \\ &= \frac{1}{10}e^{-4t} + \frac{9}{10}e^{-\frac{2}{3}t} - e^{-t} - \frac{11}{120}e^{-4t} - \frac{99}{20}e^{-\frac{2}{3}t} + \frac{11}{3}e^{-t} + \frac{11}{8} \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{120}e^{-4t} - \frac{81}{10}e^{-\frac{2}{3}t} + \frac{8}{3}e^{-t} + \frac{11}{8}}} \end{aligned}$$

cIV) Ved stasjonær tilstand må det strømme like mye væske inn i som ut av karene.

Innstrømningen til kar 1 er

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 1 - e^{-t} = 1.$$

Da må også utstrømningen av kar 2 være lik 1, slik at

$$\frac{8}{3}y = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{y = \frac{3}{8}}}.$$

Videre må gjennomstrømningen gjennom fra kar 1 til kar 2 være lik 1, slik at

$$x - y = 1 \Leftrightarrow x = 1 + y = 1 + \frac{3}{8} = \underline{\underline{\frac{11}{8}}}.$$

Begge disse grenseverdiene stemmer med løsningene ovenfor når $t \rightarrow \infty$.

Oppgave 17

a) Newtons 2. lov gir

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Siden legemet beveger seg langs x-aksen, er vi kun interessert i krefter langs denne aksen. Da får vi:

$$10 - 10 \frac{dx}{dt} = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

der vi har benyttet at $a = \frac{d^2x}{dt^2}$. Setter videre $m = 5$ og ordner, og får

$$10 - 10 \frac{dx}{dt} = 5 \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \Leftrightarrow \underline{\underline{\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} = 2}}.$$

b) Likningen kan løses på flere måter, for eksempel ved å innføre

$$v = \frac{dx}{dt} \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

og omforme til en lineær 1. ordens differensiallikning. Jeg velger imidlertid å beholde den som en lineær 2. ordens differensiallikning med konstante koeffisienter. Setter opp den karakteristiske likningen:

$$\lambda^2 + 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \underline{\lambda_1 = 0}, \quad \underline{\lambda_2 = -2}.$$

Dette gir at den homogene likningen har løsningen

$$x_h(t) = Ae^{0t} + Be^{-2t} = \underline{A + Be^{-2t}}.$$

Siden en konstant inngår i $x_h(t)$, prøver jeg en partikulær løsning

$$x_p(t) = Ct \Rightarrow \frac{dx_p}{dt} = C \Rightarrow \frac{d^2x_p}{dt^2} = 0.$$

Setter inn i likningen:

$$0 + 2C = 2$$

som gir

$$\underline{C = 1}.$$

Altså er

$$x(t) = \underline{A + Be^{-2t} + t}.$$

Finner A og B ut fra startbetingelsene:

$$x(0) = A + B \cdot e^0 + 0 = 0 \Leftrightarrow A = -B$$

$$\frac{dx}{dt} = -2Be^{-2t} + 1 \Leftrightarrow \frac{dx}{dt}(0) = -2B \cdot e^0 + 1 = 5 \Leftrightarrow B = -2.$$

Altså er

$$A = -B = 2,$$

slik at løsningen blir

$$x(t) = \underline{\underline{2 - 2e^{-2t} + t}}.$$

Oppgave 18

a) Newtons 2. lov gir

$$F - k \cdot x = m \cdot a \Leftrightarrow m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + k \cdot x = F_0 e^{-t}.$$

Her har jeg satt inn at $F = F_0 \cdot e^{-t}$ og at $a = \frac{d^2 x}{dt^2}$.

Innsetting av oppgitte tall gir nå (ser bort fra benevning):

$$1.0 \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + 3.0 \cdot x = 4.0 e^{-t} \Leftrightarrow \underline{\underline{\frac{d^2 x}{dt^2} + 3x = 4e^{-t}}}.$$

b) Dette er en inhomogen likning, der løsningen er av formen

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

der $x_h(t)$ er løsningen av den homogene likningen. Den karakteristiske likningen blir

$$\lambda^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \underline{\lambda = j \cdot \sqrt{3}}.$$

Da kan vi skrive

$$\underline{x_h(t) = A \cos(\sqrt{3}t + \varphi)}.$$

Prøver en partikulær løsning

$$x_p(t) = C e^{-t} \Rightarrow \frac{dx_p}{dt} = -C e^{-t} \Rightarrow \frac{d^2 x_p}{dt^2} = C e^{-t}.$$

Innsetting i likningen:

$$C e^{-t} + 3 \cdot C e^{-t} = 4 e^{-t}.$$

Trekker sammen og multipliserer med e^t , og får:

$$4C = 4 \Leftrightarrow \underline{C = 1}.$$

Altså er den generelle løsningen

$$\underline{x(t) = A \cos(\sqrt{3}t + \varphi) + e^{-t}}.$$

Må finne A og φ :

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{3} A \sin(\sqrt{3}t + \varphi) - e^{-t}.$$

$$x(0) = A \cos \varphi + e^0 = 0 \Leftrightarrow A = -\frac{1}{\cos \varphi}.$$

$$\frac{dx}{dt}(0) = -\sqrt{3} A \sin \varphi - e^0 = 0 \Leftrightarrow A \sin \varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Setter inn

$$A = -\frac{1}{\cos \varphi}$$

og får

$$-\sqrt{3} \left(-\frac{1}{\cos \varphi} \right) \sin \varphi - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \varphi = \frac{1}{6}\pi \quad \vee \quad \varphi = \frac{1}{6}\pi - \pi = -\frac{5}{6}\pi$$

For å få A positiv, må vi velge

$$\varphi = -\frac{5}{6}\pi,$$

som gir

$$A = -\frac{1}{\cos(-\frac{5}{6}\pi)} = -\frac{1}{-\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Altså er løsningen

$$x(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\sqrt{3}t - \frac{5}{6}\pi) + e^{-t}.$$

Alternativt kan vi skrive

$$x_h(t) = A \cos(\sqrt{3}t) + B \sin(\sqrt{3}t)$$

som gir

$$x(t) = A \cos(\sqrt{3}t) + B \sin(\sqrt{3}t) + e^{-t}$$

og

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{3}A \sin(\sqrt{3}t) + \sqrt{3}B \cos(\sqrt{3}t) - e^{-t}.$$

Setter inn startverdiene:

$$x(0) = A \cos 0 + B \sin 0 + e^0 = 0 \Leftrightarrow A + 1 = 0 \Leftrightarrow \underline{A = -1}$$

og

$$\frac{dx}{dt}(0) = -\sqrt{3}A \sin 0 + \sqrt{3}B \cos 0 - e^0 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}B - 1 = 0 \Leftrightarrow \underline{B = \frac{1}{\sqrt{3}}}.$$

Da blir

$$x(t) = -\cos(\sqrt{3}t) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}t) + e^{-t}.$$

Disse løsningene er ekvivalente fordi

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\sqrt{3}t - \frac{5}{6}\pi) &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\cos(\sqrt{3}t) \cos(-\frac{5}{6}\pi) - \sin(\sqrt{3}t) \sin(-\frac{5}{6}\pi) \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\cos(\sqrt{3}t) \cdot (-\frac{1}{2}\sqrt{3}) - \sin(\sqrt{3}t) \cdot (-\frac{1}{2}) \right) \\ &= -\cos(\sqrt{3}t) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}t) \end{aligned}$$

6. Tillegg.

6.1. Løsning av lineære første ordens differensiallikninger.

Vi skal nå utlede formelen for løsning av den lineære første ordens differensiallikningen

$$y' + f(x) \cdot y = g(x) \quad (1)$$

Vi skal da benytte et trick som er ganske vanlig ved løsning av differensiallikninger. Vi skal multiplisere (1) med en *integrerende faktor*, d.v.s. en faktor som gjør likningen lettere å løse. La oss kalle denne faktoren $\mu(x)$, og se om vi kan finne en gunstig form for denne faktoren.

Når du multipliserer likningen (1) med denne faktoren, får du

$$\begin{aligned} (y' + f(x) \cdot y) \cdot \mu(x) &= g(x) \cdot \mu(x) \\ \Downarrow \\ y' \cdot \mu(x) + y \cdot \underbrace{f(x) \cdot \mu(x)}_{\substack{\text{Kan denne faktoren} \\ \text{settes lik } \mu'(x)?}} &= g(x) \cdot \mu(x) \end{aligned}$$

Og nå kommer nøkkel-spørsmålet: Kan vi bestemme $\mu(x)$ slik at

$$f(x) \cdot \mu(x) = \mu'(x) ? \quad (2)$$

Hvis vi greier det, kan likningen skrives

$$\begin{aligned} y' \cdot \mu(x) + y \cdot \mu'(x) &= g(x) \cdot \mu(x) \\ \Leftrightarrow (y \cdot \mu(x))' &= g(x) \cdot \mu(x) \end{aligned}$$

Her har vi brukt formelen for derivasjon av produktet $y \cdot \mu(x)$.

Nå kan vi integrere begge sider, og får:

$$\begin{aligned} y \cdot \mu(x) &= \int g(x) \cdot \mu(x) dx + C \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{\mu(x)} \left(\int g(x) \cdot \mu(x) dx + C \right) \end{aligned} \quad (3)$$

Nå gjenstår "bare" å bestemme $\mu(x)$. Det kan vi gjøre ut fra (2):

$$f(x) \cdot \mu(x) = \mu'(x).$$

Vi setter

$$\mu'(x) = \frac{d\mu(x)}{dx}.$$

Da kan (2) omformes til

$$f(x) \cdot \mu(x) = \frac{d\mu(x)}{dx}.$$

Men dette er jo en separabel differensiallikning. Vi deler på $\mu(x)$ og ganger med dx , og får

$$\frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = f(x) dx$$

Vi integrerer på begge sider, og får

$$\ln \mu(x) = \int f(x) dx \quad (4)$$

som gir

$$\mu(x) = e^{\int f(x) dx} = e^{F(x)}$$

der

$$F(x) = \int f(x) dx.$$

Dette settes inn i (3):

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\mu(x)} \left(\int g(x) \cdot \mu(x) dx + C \right) = \frac{1}{e^{F(x)}} \left(\int g(x) \cdot e^{F(x)} dx + C \right) \\ &= \underline{\underline{e^{-F(x)} \left(\int g(x) \cdot e^{F(x)} dx + C \right)}} \end{aligned}$$

som jo er den formelen vi skulle komme fram til.

Hvorfor kan vi se bort fra integrasjonskonstanten i (4)? La oss se hva som skjer dersom vi skriver (4) på formen

$$\ln \mu(x) = \int f(x) dx + C_\mu$$

som gir

$$\mu(x) = e^{\int f(x) dx + C_\mu} = e^{F(x)} \cdot e^{C_\mu}. \quad (5)$$

Se hva som skjer videre hvis vi setter (5) inn i (3):

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\mu(x)} \left(\int g(x) \cdot \mu(x) dx + C \right) = \frac{1}{e^{F(x)} \cdot e^{C_\mu}} \left(\int g(x) \cdot e^{F(x)} \cdot e^{C_\mu} dx + C \right) \\ &= e^{-F(x)} \cdot \frac{1}{e^{C_\mu}} \left(e^{C_\mu} \int g(x) \cdot e^{F(x)} dx + C \right) = e^{-F(x)} \left(\int g(x) \cdot e^{F(x)} dx + \frac{C}{e^{C_\mu}} \right) \end{aligned}$$

Poenget er at siden C_μ er en konstant, kan e^{C_μ} settes utenfor integraltegnet og forkortes bort.

Videre får vi brøken

$$\frac{C}{e^{C_\mu}},$$

som jo er bygd opp av bare konstanter og trygt kan erstattes av en enkelt konstant C . Og da er vi tilbake til den gode gamle formelen.

6.2. Lineært (u)avhengige funksjoner. Wronski-determinanten.

Vi har tidligere sagt at to funksjoner $y_1(x)$ og $y_2(x)$ er *lineært avhengige* hvis og bare hvis det eksisterer en konstant a slik at $y_1(x) = a \cdot y_2(x)$. Dersom det ikke fins noen slik konstant, er de to funksjonene *lineært uavhengige*.

Definisjonen ovenfor egner seg ikke dersom vi har mer enn to funksjoner. Som en innledning til en mer generell definisjon, omformer vi definisjonen slik:

De to funksjonene $y_1(x)$ og $y_2(x)$ er **lineært avhengige** hvis og bare hvis det eksisterer to tall a_1 og a_2 forskjellig fra null slik at

$$a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x) = 0.$$

Dersom likningen ovenfor kun er oppfylt dersom $a_1 = a_2 = 0$, er $y_1(x)$ og $y_2(x)$ **lineært uavhengige**.

Nå kan vi lett generalisere til mer enn to funksjoner:

Et sett funksjoner $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ er **lineært avhengige** hvis og bare hvis det fins konstanter $a_1, a_2, \dots, a_n$ som ikke alle er lik null, slik at

$$a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x) + \dots + a_n y_n(x) = 0.$$

Dersom likningen ovenfor kun er oppfylt dersom

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0,$$

er $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ **lineært uavhengige**.

Denne definisjonen er imidlertid lite egnet til praktisk bruk. Vi bruker heller kriteriet nedenfor:

Definer **Wronski-determinanten**

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Vi kan da vise at:

- 1) Funksjonene $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ er **lineært uavhengige** i et intervall I hvis og bare hvis $W(x)$ er forskjellig fra null for minst en x i intervallet.
- 2) Funksjonene er **lineært avhengige** hvis og bare hvis $W(x) \equiv 0$ i hele intervallet.

Jeg skal gi et kortfattet og noe ufullstendig bevis for at setningen holder. Jeg skal begrense meg til å se på lineær (u)avhengighet for tre funksjoner, men beviset kan lett generaliseres til n funksjoner.

Vi skal prøve å finne tre tall a_1 , a_2 og a_3 slik at

$$a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x) + a_3 y_3(x) = 0.$$

Deriverer denne likningen to ganger:

$$a_1 y_1'(x) + a_2 y_2'(x) + a_3 y_3'(x) = 0$$

$$a_1 y_1''(x) + a_2 y_2''(x) + a_3 y_3''(x) = 0$$

Nå har jeg tre likninger som jeg kan bruke til å finne de tre ukjente tallene a_1 , a_2 og a_3 . Men dette er et *homogent* likningssett. Fra teorien for slike likningssett vet vi at likningssettet har løsning forskjellig fra $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ hvis og bare hvis determinanten til koeffisientmatrisen er lik null. Men determinanten til koeffisientmatrisen er jo nettopp lit Wronski-determinanten. Dermed framkommer påstandene i setningen ovenfor.

Eksempel 6.2.1: Undersøk om funksjonene

$$y_1(x) = x^2$$

$$y_2(x) = x - 3$$

$$y_3(x) = x^2 - 2x + 3$$

er lineært avhengige.

Løsning: Vi setter opp Wronski-determinanten:

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x-3 & x^2-2x+3 \\ 2x & 1 & 2x-2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Beregner determinanten etter 3. rad, og får:

$$\begin{aligned} W(x) &= 2 \begin{vmatrix} x-3 & x^2-2x+3 \\ 1 & 2x+2 \end{vmatrix} - 0 + 2 \begin{vmatrix} x^2 & x-3 \\ 2x & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2((x-3)(2x+2) - 1(x^2-2x+3)) + 2(x^2 \cdot 1 - 2x(x-3)) \\ &= 2(2x^2 + 2x - 6x - 6 - x^2 + 2x - 3) + 2(x^2 - 2x^2 + 6x) \\ &= 2(-x^2 + 4x - 9) \end{aligned}$$

Siden Wronski-determinanten ikke er identisk lik null, er de tre funksjonene lineært uavhengige.

Eksempel 6.2.2: Undersøk om det er mulig å velge a slik at funksjonene

$$y_1(x) = x^2 - 3x$$

$$y_2(x) = 2x - 1$$

$$y_3(x) = ax^2 - 3$$

blir lineært avhengige.

Løsning: Vi setter opp Wronski-determinanten:

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} x^2 - 3x & 2x - 1 & ax^2 - 3 \\ 2x - 3 & 2 & 2ax \\ 2 & 0 & 2a \end{vmatrix} \\ &= (x^2 - 3x) \begin{vmatrix} 2 & 2ax \\ 0 & 2a \end{vmatrix} - (2x - 3) \begin{vmatrix} 2x - 1 & ax^2 - 3 \\ 0 & 2a \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2x - 1 & ax^2 - 3 \\ 2 & 2ax \end{vmatrix} \\ &= (x^2 - 3x)(4a - 0) - (2x - 3)(4ax - 2a - 0) + 2(4ax^2 - 2ax - 2ax^2 + 6) \\ &= 4ax^2 - 12ax - 8ax^2 + 4ax + 12ax - 6a + 8ax^2 - 4ax - 4ax^2 + 12 \\ &= \underline{-6a + 12} \end{aligned}$$

Dersom funksjonene skal være lineært avhengige, må

$$W(x) = 0 \Leftrightarrow -6a + 12 = 0 \Leftrightarrow \underline{a = 2}.$$

For alle andre verdier av a er funksjonene lineært uavhengige.

Kontroll: Ved innsetting ser du at når $a = 2$, blir

$$y_3(x) = 2x^2 - 3.$$

Vi kan nå finne tre tall a_1 , a_2 og a_3 slik at

$$\begin{aligned} a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x) + a_3 y_3(x) &= 0 \\ a_1(x^2 + 3x) + a_2(2x - 1) + a_3(2x^2 - 3) &= 0 \\ (a_1 + 2a_3)x^2 + (3a_1 + 2a_2)x + (-a_2 - 3a_3) &= 0 \end{aligned}$$

Dersom dette likningssettet skal være oppfylt for alle x , må vi ha at

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_3 &= 0 \\ 3a_1 + 2a_2 &= 0 \\ -a_2 - 3a_3 &= 0 \end{aligned}$$

Av første og tredje likning får vi direkte at

$$a_1 = -2a_3$$

og

$$a_2 = -3a_3.$$

Disse to uttrykkene passer også inn i den midterste likningen. Vi kan nå velge a_3 fritt, og velger for eksempel $a_3 = -1$. Da blir $a_1 = 2$ og $a_2 = 3$, og vi får at

$$\begin{aligned} a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x) + a_3 y_3(x) &= 2y_1(x) + 3y_2(x) - y_3(x) \\ &= 2(x^2 - 3x) + 3(2x - 1) - (2x^2 - 3) \\ &= 2x^2 - 6x + 6x - 3 - 2x^2 + 3 \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

som bekrefter at funksjonene er lineært avhengige for denne verdien av a .

Wronski-determinanten spiller en viktig rolle i teorien for 2.ordens (og høyere ordens) lineære differensiallikninger. Her er en liten smakebit:

Det er rimelig å anta at når vi løser en 2. ordens differensiallikning, får vi en løsning som inneholder to ukjente konstanter C_1 og C_2 , rett og slett fordi vi må integrere to ganger for å komme fra y'' til y . Det er heller ikke urimelig å anta at løsningen kan skrives på formen

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Anta at vi kjenner en start-tilstand $y(x_0)$ og $y'(x_0)$. Da kan vi sette opp likningssystemet

$$y(x_0) = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0)$$

$$y'(x_0) = C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0)$$

Men dette er jo et likningssystem som vi kan finne C_1 og C_2 av, forutsatt at determinanten til koeffisientmatrisen er forskjellig fra null. Men denne determinanten blir nettopp Wronski-determinanten for $y_1(x)$ og $y_2(x)$, innsatt $x = x_0$. Og vi vet at dersom denne Wronski-determinanten er forskjellig fra null for en x -verdi, er $y_1(x)$ og $y_2(x)$ lineært uavhengige. Vi ser altså at når løsningen av differensiallikningen kan skrives som en sum av to lineært uavhengige funksjoner, og $y(x_0)$ og $y'(x_0)$ er kjent, kan C_1 og C_2 bestemmes slik at løsningen er entydig bestemt.

6.3. Homogene lineære differensiallikninger med konstante koeffisienter.

6.3.1. Innledning.

Vi skal nå løse differensiallikningen

$$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0.$$

Vi gjetter på at likningen har løsninger av formen

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

der λ er en konstant. Denne gjetningen er bl.a. begrunnet med at en 1. ordens differensiallikning

$$y' + a \cdot y = 0 \Leftrightarrow y' = -a \cdot y$$

åpenbart har løsningen

$$y(x) = e^{-ax},$$

og da er det rimelig å gjette på at en 2. ordens likning av samme type må ha løsninger av tilsvarende form. Vi skal nå vise at denne "gjetningen" er korrekt, og vi skal også finne λ i samme slengen.

Innsetting av

$$y(x) = e^{\lambda x} \Rightarrow y'(x) = \lambda e^{\lambda x} \Rightarrow y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

i den homogene differensiallikningen gir

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a \cdot \lambda e^{\lambda x} + b \cdot e^{\lambda x} = 0.$$

Vi multipliserer med $e^{-\lambda x}$ og får

$$\lambda^2 + a \cdot \lambda + b = 0.$$

Men dette er jo en vanlig andregradslikning, som kalles *den karakteristiske likningen*. Vi løser den med formel:

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Dersom $a^2 - 4b \neq 0$, har denne likningen to forskjellige røtter λ_1 og λ_2 . Dersom a og b er reelle, er enten begge røttene reelle, eller de er kompleks konjugerte. I begge tilfeller er både $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ og $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ løsninger av differensiallikningen.

Vi bruker [Wronski-determinanten](#) til å kontrollere at $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ og $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ er lineært uavhengige når $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 x} \cdot \lambda_2 e^{\lambda_2 x} - \lambda_1 e^{\lambda_1 x} \cdot e^{\lambda_2 x} \\ &= e^{\lambda_1 x} \cdot e^{\lambda_2 x} (\lambda_2 - \lambda_1) \end{aligned}$$

Og siden vi har forutsatt at $\lambda_1 \neq \lambda_2$, blir $W(x) \neq 0$ slik at $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ og $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ er lineært uavhengige. Dette resultatet gjelder selv om λ_1 og λ_2 er kompleks konjugerte.

Nå vet vi fra den innledende teorien at den generelle løsningen av differensiallikningen skal være en lineær kombinasjon av to lineært uavhengige funksjoner. Siden vi nå har funnet to slike funksjoner dersom $\lambda_1 \neq \lambda_2$, vet vi at den generelle løsningen av differensiallikningen blir

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Dersom λ_1 og λ_2 er reelle, er løsningen over helt grei. Men dersom de er kompleks konjugerte, er det bedre å skrive om løsningen slik det gjøres nedenfor.

6.3.2. Kompleks konjugerte røtter.

Dersom den karakteristiske likningen har to kompleks konjugerte røtter, kan disse skrives

$$\lambda = \alpha \pm i\beta.$$

Løsningen av differensiallikningen blir da

$$y(x) = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

Men denne måten å skrive løsningen på er ikke særlig nyttig. Vi foretar derfor en omforming, der vi benytter at

$$e^{\pm i\beta x} = \cos(\pm\beta x) + i \sin(\pm\beta x) = \cos(\beta x) \pm i \sin(\beta x).$$

Vi får:

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x} \\ &= C_1 e^{\alpha x} e^{i\beta x} + C_2 e^{\alpha x} e^{-i\beta x} \\ &= e^{\alpha x} (C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x}) \\ &= e^{\alpha x} (C_1 (\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)) + C_2 (\cos(\beta x) - i \sin(\beta x))) \\ &= e^{\alpha x} ((C_1 + C_2) \cos(\beta x) + i(C_1 - C_2) \sin(\beta x)) \\ &= e^{\alpha x} (B_1 \cos(\beta x) + B_2 \sin(\beta x)) \end{aligned}$$

I den siste overgangen har vi innført to nye konstanter:

$$B_1 = C_1 + C_2$$

og

$$B_2 = i(C_1 - C_2).$$

Videre kan vi bruke formelen for cosinus til en sum av to vinkler til å vise at

$$\begin{aligned} A \cos(\beta x + \varphi) &= A(\cos(\beta x) \cos \varphi - \sin(\beta x) \sin \varphi) \\ &= (A \cos \varphi) \cos(\beta x) + (-A \sin \varphi) \sin(\beta x) \\ &= B_1 \cos(\beta x) + B_2 \sin(\beta x) \end{aligned}$$

der vi har satt

$$B_1 = A \cos \varphi \text{ og } B_2 = -A \sin \varphi.$$

Dette viser at differensiallikningen har de to likeverdige løsningsformene

$$y(x) = \underline{e^{\alpha x} (B_1 \cos(\beta x) + B_2 \sin(\beta x))}$$

og

$$y(x) = \underline{A e^{\alpha x} (\cos(\beta x + \varphi))}.$$

På samme måte kan vi bruke formelen for sinus til en sum av to vinkler,

$$\sin(\beta x + \varphi) = \sin(\beta x) \cos \varphi + \cos(\beta x) \sin \varphi,$$

til å vise at formen

$$y(x) = A e^{\alpha x} (\sin(\beta x + \varphi))$$

er likeverdig med formen

$$y(x) = e^{\alpha x} (B_1 \cos(\beta x) + B_2 \sin(\beta x)).$$

6.1.3. To like røtter.

Vi har hittil forutsatt at den karakteristiske likningen har to *forskjellige* røtter λ_1 og λ_2 . Hva skal vi gjøre dersom den karakteristiske likningen har to *like* røtter $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$?

Vi vet allerede at differensiallikningen

$$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0$$

har en løsning

$$y_1(x) = e^{\lambda x}.$$

Men ifølge teorien for 2.ordens differensiallikninger skal likningen ha en løsning til. For å finne den, benytter vi en anerkjent og velprøvd metode: Vi *gjetter* på en løsning, og undersøker ved innsetting om vi har gjettet riktig. Nå gjetter vi at

$$y_2(x) = x \cdot e^{\lambda x}$$

også er en løsning.

La oss først finne betingelsene for at den karakteristiske likningen skal få to like røtter. Den karakteristiske likningen er

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

med løsning

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Vi får to like røtter når

$$a^2 - 4b = 0.$$

Da er

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\frac{1}{2}a.$$

Så skal vi undersøke om

$$y(x) = x \cdot e^{\lambda x}$$

også er løsning av differensiallikningen i dette tilfellet. Vi gjør klar for innsetting:

$$\begin{aligned} y(x) = x \cdot e^{\lambda x} &\Rightarrow y'(x) = 1 \cdot e^{\lambda x} + x \cdot \lambda e^{\lambda x} = \underline{e^{\lambda x}(1 + \lambda x)} \\ &\Rightarrow y''(x) = \lambda e^{\lambda x}(1 + \lambda x) + e^{\lambda x} \cdot \lambda = \underline{e^{\lambda x}(2\lambda + \lambda^2 x)} \end{aligned}$$

Så setter vi inn:

$$\begin{aligned} y'' + a \cdot y' + b \cdot y &= 0 \\ e^{\lambda x}(2\lambda + \lambda^2 x) + a \cdot e^{\lambda x}(1 + \lambda x) + b \cdot x e^{\lambda x} &= 0 \end{aligned}$$

Multipliserer med $e^{-\lambda x}$ og ordner:

$$\begin{aligned} (2\lambda + \lambda^2 x) + a(1 + \lambda x) + bx &= 0 \\ (\lambda^2 + a\lambda + b)x + (2\lambda + a) &= 0 \end{aligned}$$

Her er den første parentesen lik null fordi λ er rot i den karakteristiske likningen. Den andre parentesen er også lik null fordi $\lambda = -\frac{1}{2}a$ når vi har to like røtter. Altså ser vi at løsningen

$$y(x) = x \cdot e^{\lambda x}$$

passer inn i differensiallikningen når $\lambda = -\frac{1}{2}a$.

For sikkerhets skyld må vi kontrollere at de to funksjonene $y_1(x) = e^{\lambda x}$ og $y_2(x) = x \cdot e^{\lambda x}$ er lineært uavhengige. Vi setter opp [Wronski-determinanten](#):

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda x} & x e^{\lambda x} \\ \lambda e^{\lambda x} & (1 + \lambda x) e^{\lambda x} \end{vmatrix} \\ &= e^{\lambda x}(1 + \lambda x) e^{\lambda x} - \lambda e^{\lambda x} x e^{\lambda x} \\ &= e^{\lambda x} e^{\lambda x} (1 + \lambda x - \lambda x) = \underline{e^{2\lambda x}} \neq 0 \end{aligned}$$

Siden $W(x) \neq 0$ for alle x , er $y_1(x) = e^{\lambda x}$ og $y_2(x) = x \cdot e^{\lambda x}$ lineært uavhengige. Dermed har vi vist at når den karakteristiske likningen har to like røtter

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\frac{1}{2}a,$$

har differensiallikningen løsningen

$$y(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}.$$

6.2. Løsningen av den inhomogene lineære 2.ordens differensiallikningen.

Vi skal nå bevise at den generelle løsningen av den inhomogene differensiallikningen

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = r(x)$$

kan skrives på formen

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

der $y_h(x)$ er den generelle løsningen av den tilhørende homogene likningen, mens $y_p(x)$ er en partikulær løsning av den inhomogene likningen.

Vi starter med å vise at $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ virkelig er løsning av likningen. Vi lar $y_h(x)$ være løsning av den tilhørende homogene differensiallikningen, mens $y_p(x)$ er en partikulær løsning av den inhomogene likningen. Så definerer vi

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \Rightarrow y'(x) = y_h'(x) + y_p'(x) \Rightarrow y''(x) = y_h''(x) + y_p''(x).$$

Setter dette inn i differensiallikningen

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = r(x)$$

og ordner (og sløyfer (x) for oversiktens skyld). Får da:

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = r(x)$$

$$(y_h'' + y_p'') + p(x)(y_h' + y_p') + q(x)(y_h + y_p) = r(x)$$

$$(y_h'' + p(x) \cdot y_h' + q(x) \cdot y_h) + (y_p'' + p(x) \cdot y_p' + q(x) \cdot y_p) = r(x)$$

Men siden $y_h(x)$ er løsning av den tilhørende homogene likningen, er den første parentes lik null. Da står vi igjen med at

$$y_p'' + p(x) \cdot y_p' + q(x) \cdot y_p = r(x).$$

Vi har imidlertid sagt at $y_p(x)$ skal være løsning av den *inhomogene* likningen. Dermed har vi vist at

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

er løsning av differensiallikningen.

Så skal vi vise at det ikke fins andre løsninger av differensiallikningen. Vi antar da at differensiallikningen har en løsning $y_1(x)$ som er forskjellig fra den løsningen

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

som vi har funnet, og skal vise at dette fører til en selvmotsigelse. Dersom det fins en slik løsning $y_1(x)$, vil det alltid være mulig å definere en funksjon $z(x)$ slik at vi kan skrive

$$y_1(x) = y(x) + z(x).$$

Vi deriverer $y_1(x)$ to ganger, setter inn i differensiallikningen, og ordner. Da får vi:

$$y_1'' + p(x) \cdot y_1' + q(x) \cdot y_1 = r(x)$$

$$(y'' + z'') + p(x)(y' + z') + q(x)(y + z) = r(x)$$

$$(y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y) + (z'' + p(x) \cdot z' + q(x) \cdot z) = r(x)$$

Men siden $y(x)$ er løsning av den inhomogene likningen, er

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = r(x).$$

Da står vi igjen med at

$$z'' + p(x) \cdot z' + q(x) \cdot z = 0$$

som viser at $z(x)$ er løsning av den tilhørende *homogene* likningen. Men den *generelle* løsningen av den tilhørende *homogene* likningen er jo $y_h(x)$. Altså må $z(x)$ allerede være inkludert i $y_h(x)$, slik at $y_1(x) = y(x)$. Dette viser at det ikke fins andre løsninger enn

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

6.3. Teorien bak Lagranges metode (variasjon av parametre).

Vi har en differensiallikning

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = r(x)$$

der den tilhørende *homogene* likningen har to lineært uavhengige løsninger $y_1(x)$ og $y_2(x)$.

Vi antar at den *inhomogene* likningen har en partikulær løsning som kan skrives på formen

$$y_p(x) = u(x) \cdot y_1(x) + v(x) \cdot y_2(x). \quad (1)$$

Vi skal finne $u(x)$ og $v(x)$.

Vi starter med å derivere $y_p(x)$ (og sløyfer (x) for oversiktens skyld):

$$y_p'(x) = u' \cdot y_1 + u \cdot y_1' + v' \cdot y_2 + v \cdot y_2'$$

Nå antar vi at det eksisterer en sammenheng mellom $u(x)$ og $v(x)$ slik at

$$u' \cdot y_1 + v' \cdot y_2 = 0. \quad (2)$$

Da står vi igjen med

$$y_p'(x) = u \cdot y_1' + v \cdot y_2'.$$

Vi deriverer en gang til før vi setter inn i differensiallikningen:

$$y_p''(x) = u' \cdot y_1' + u \cdot y_1'' + v' \cdot y_2' + v \cdot y_2''.$$

Innsetting:

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = r(x)$$

$$(u' \cdot y_1' + u \cdot y_1'' + v' \cdot y_2' + v \cdot y_2'') + p(x) \cdot (u \cdot y_1' + v \cdot y_2') + q(x) \cdot (u \cdot y_1 + v \cdot y_2) = r(x)$$

$$u \cdot (y_1'' + p(x) \cdot y_1' + q(x) \cdot y_1) + v \cdot (y_2'' + p(x) \cdot y_2' + q(x) \cdot y_2) + (u' \cdot y_1' + v' \cdot y_2') = r(x)$$

Men begge de to første parentesene er lik null fordi $y_1(x)$ og $y_2(x)$ begge er løsninger av den *homogene* likningen. Vi står altså igjen med

$$u' \cdot y_1' + v' \cdot y_2' = r(x). \quad (3)$$

Men (2) og (3) er et likningssett som vi kan finne u' og v' av. Vi bruker Cramers regel:

$$u' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2' \\ r(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{-y_2' \cdot r(x)}{W(x)}$$

$$v' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & r(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{y_1 \cdot r(x)}{W(x)}$$

Vi integrerer begge disse uttrykkene og setter inn i (1):

$$\begin{aligned} y_p(x) &= u(x) \cdot y_1(x) + v(x) \cdot y_2(x) \\ &= -y_1(x) \cdot \int \frac{y_2(x) \cdot r(x)}{W(x)} dx + y_2(x) \cdot \int \frac{y_1(x) \cdot r(x)}{W(x)} dx \end{aligned}$$

6.4. Andre mekaniske oscillatorer.

6.4.1. Bakgrunn.

Vi har tidligere vist at differensiallikningen

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

beskriver en udempet svingning. Likningen har løsningen

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

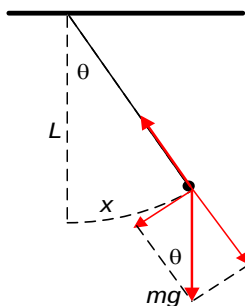
der ω_0 er vinkelfrekvensen for svingningen. Da er svingetiden (perioden)

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Vi skal nå beskrive andre mekaniske systemer som gir opphav til slike svingelikninger.

6.4.2. Matematisk pendel.

Den matematiske pendelen er en idealisert modell av en planpendel der ei pendelkule (som er så liten at vi kan oppfatte den som en partikkel) henger i en masseløs, ustrekkelig snor. Når kula trekkes ut fra likevektsposisjonen (vertikal snor) og slippes, vil den svinge den fram og tilbake uten friksjon slik figuren nedenfor viser.



Vi lar x angi avstanden fra likevektspunktet til pendelkula målt langs banen. Langs banen virker også kraftkomponenten

$$F_{\parallel} = -mg \sin \theta$$

der minustegnet skyldes at kraftkomponenten har motsatt retning av forskyvningen fra likevekt. Hvis vinkelen θ er liten og måles i radianer, er

$$\sin \theta \approx \frac{x}{L}.$$

Da kan vi med god tilnærming å si at

$$F_{\parallel} = -mg \sin \theta \approx -mg \frac{x}{L} = -\frac{mg}{L} x.$$

Newtons 2. lov gir

$$F_{\parallel} = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} \Leftrightarrow -\frac{mg}{L}x = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} \Leftrightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{g}{L}x = 0.$$

Men dette er likningen for en enkel harmonisk svingning. Vi ser at vinkelfrekvensen er

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

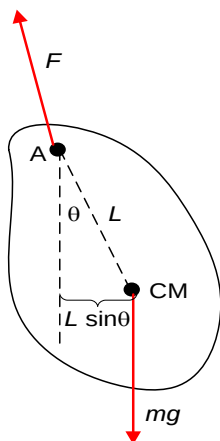
slik at perioden blir

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Her legger vi merke til at perioden ikke avhenger av massen til pendelkula, og heller ikke av hvor stor vinkelen θ er så lenge denne er liten. Derimot avhenger perioden av tyngdens akselerasjon g . Det er mulig å måle g med stor nøyaktighet ved å la en lang pendel svinge mange ganger med små utslag slik at vi kan måle T nøyaktig. Når L er nøyaktig målt, er det lett å regne ut g med stor nøyaktighet.

Merk at utledningen ovenfor kun gjelder når vi har så små vinkler at $\sin \theta \approx \frac{x}{L}$. Dersom denne betingelsen ikke er oppfylt, har vi ikke enkle harmoniske svingninger.

6.4.3. Fysisk pendel.



I utledningen ovenfor forutsatte vi at pendelkula var så liten at den kunne betraktes som en partikkel. Nå skal vi droppe den forutsetningen. Situasjonen er altså som vist på figuren til venstre, der et legeme kan svinge uten friksjon om en akse A. Vi antar at avstanden fra aksens til legemets massesenter er L , og at legemets treghetsmoment om aksens er I_A . Linja mellom aksens og massesenteret danner en vinkel θ med vertikalen.

Vi legger momentakse i A. Da får ikke kraften F i aksens noe moment. Tyngdens kraftmoment blir

$$\tau = mg \cdot L \sin \theta,$$

slik at kraftmomentsetningen gir

$$-mg \cdot L \sin \theta = I_A \alpha.$$

Minustegnet skyldes at kraftmomentet alltid prøver å *redusere* vinkelen θ .

Nå forutsetter vi at svingningene er så små at når θ måles i radianer, er $\sin \theta \approx \theta$.

Dessuten benytter vi at

$$\alpha = \frac{d^2 \theta}{dt^2}.$$

Da blir kraftmomentsetningen

$$-mgL \cdot \theta = I_A \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} \Leftrightarrow I_A \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} + mgL \cdot \theta = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{mgL}{I_A} \theta = 0.$$

Men dette er likningen for en enkel harmonisk svingning, der

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgL}{I_A}}$$

slik at perioden blir

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I_A}{mgL}}.$$

Som kontroll kan vi la legemet være en matematisk pendel med masse m og snorlengde L . Da blir treghetsmomentet

$$I_A = mL^2$$

slik at

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgL}{mL^2}} = \sqrt{\frac{g}{L}}.$$

Og det er det samme som vi fikk tidligere.

Dette uttrykket kan vi bruke til å bestemme treghetsmomentet til et legeme når vi vet hvor legemets massesenter er. Vi lar legemet svinge om en akse i kjent avstand L fra massesenteret, måler perioden som legemet svinger med og løser ut treghetsmomentet I_A av formelen for T . Ved hjelp av parallellakse-setningen (Steiners setning) kan vi da beregne legemets treghetsmoment om en akse gjennom massesenteret.

Eksempel 6.4.1:

Anta at en ikke-uniform tynn pinne med masse $m = 1.0\text{kg}$ har massesenter $L = 0.42\text{m}$ fra den ene enden. Vi lar pinnen henge i denne enden og svinge fram og tilbake uten friksjon. Perioden til disse svingningene måler vi til å være $T = 3.0\text{s}$.

- Bestem pinnens treghetsmoment om den enden som den henger i.
- Bestem også treghetsmomentet til pinnen om en akse som står vinkelrett på pinnen og går gjennom massesenteret.

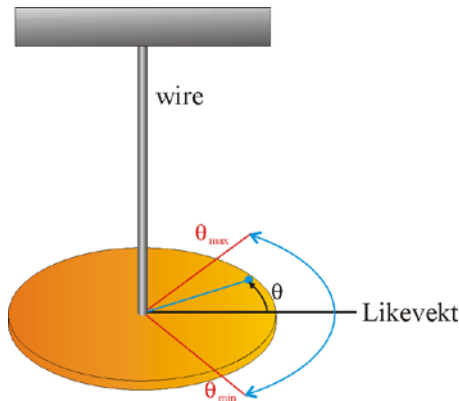
Løsning:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_A}{mgL}} \Leftrightarrow I_A = \frac{T^2 \cdot mgL}{4\pi^2} = \frac{(3.0\text{s})^2 \cdot 1.0\text{kg} \cdot 9.81\text{m/s}^2 \cdot 0.42\text{m}}{4\pi^2} = \underline{\underline{0.94\text{kg m}^2}}.$$

Da gir parallellakse-setningen (Steiners setning) at

$$I_{\text{CM}} + mL^2 = I_A \Leftrightarrow I_{\text{CM}} = I_A - mL^2 = 0.94\text{kg m}^2 - 1.0\text{kg} \cdot (0.42\text{m})^2 = \underline{\underline{0.76\text{kg m}^2}}.$$

6.4.4. Torsjonsspendel.



Figuren til venstre viser en **torsjonsspendel**. Vi tenker oss da ei skive som er hengt opp i en wire. Skiva dreies en vinkel θ fra likevekt, og slippes. Eksperimenter viser at dersom θ er liten, vil kraftmomentet om rotasjonsaksen være

$$\tau_z = -\kappa \cdot \theta$$

der κ er en positiv konstant som avhenger av lengden til wiren og av de elastiske egenskapene til det materialet som wiren er laget av.

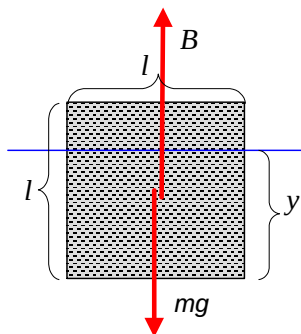
Da blir kraftmomentsetningen

$$\tau_z = I \cdot \alpha \Leftrightarrow -\kappa \cdot \theta = I \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} \Leftrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\kappa}{I} \theta = 0$$

der I er legemets treghetsmoment om rotasjonsaksen. Men dette er likningen for en enkel harmonisk svingning med vinkelfrekvens

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{I}}.$$

6.4.5. Dupp på vann.



Figuren til venstre forestiller en terningformet trekloss med masse m og sidekant l som flyter på vann som har tetthet ρ_v . Klossen påvirkes av to krefter, tyngden $m \cdot g$ og oppdriften B . Vi vet at B er lik tyngden av den fortrenkte vannmengden. Vi lar indeks $_v$ stå for "vann", og får da at

$$B = m_v g = \rho_v V_v g = \rho_v (l^2 y) g.$$

Velger positiv retning nedover. Da blir Newtons 2. lov:

$$mg - B = ma.$$

Setter inn uttrykket for B samt at $a = \frac{d^2 y}{dt^2}$, og får

$$mg - \rho_v (l^2 y) g = m \frac{d^2 y}{dt^2} \Leftrightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\rho_v l^2 g}{m} y = g.$$

Løsningen av denne inhomogene differensiallikningen er

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t).$$

Vi vet allerede at

$$y_h(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

der

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\rho_v l^2 g}{m}}.$$

Det kan være gunstig å innføre klossens massetetthet

$$\rho = \frac{m}{l^3} \Leftrightarrow m = \rho l^3.$$

Da blir

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\rho_V l^2 g}{m}} = \sqrt{\frac{\rho_V l^2 g}{\rho l^3}} = \sqrt{\frac{\rho_V \cdot g}{\rho \cdot l}} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{\rho}{\rho_V} \cdot \frac{l}{g}}.$$

Her ser vi bl.a. at svingetiden T øker proporsjonalt med kvadratrota av sidelengden.

Vi antar at partikulærløsningen $y_p(t)$ er en konstant y_0 siden høyresiden av likningen er en konstant. Innsetting i differensiallikningen gir nå

$$0 + \frac{\rho_V l^2 g}{m} y_0 = g \Leftrightarrow y_0 = \frac{m}{\rho_V l^2} = \frac{\rho l^3}{\rho_V l^2} = \frac{\rho}{\rho_V} l.$$

Den komplette løsningen blir derfor

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{\rho}{\rho_V} l.$$

Her kan vi merke oss at når $y = y_0$ er oppdriften

$$B = \rho_V (l^2 y_0) g = \rho_V l^2 \cdot \frac{\rho}{\rho_V} l \cdot g = \rho l^3 g = mg$$

slik at oppdriften er lik klossens tyngde. Da er klossen i sin likevektsposisjon. Klossen vil altså svinge om denne likevektsposisjonen med den svingetiden T som er funnet ovenfor.

6.5. Mer om underdempede svingninger.

Du husker sikkert at den generelle svingelikningen er

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

der ω_0 er vinkelfrekvensen for den *udempede* svingningen, d.v.s. dersom $\delta = 0$. Dersom

$0 \leq \delta < \omega_0$ får vi *underdempede* svingninger der utslaget er gitt ved

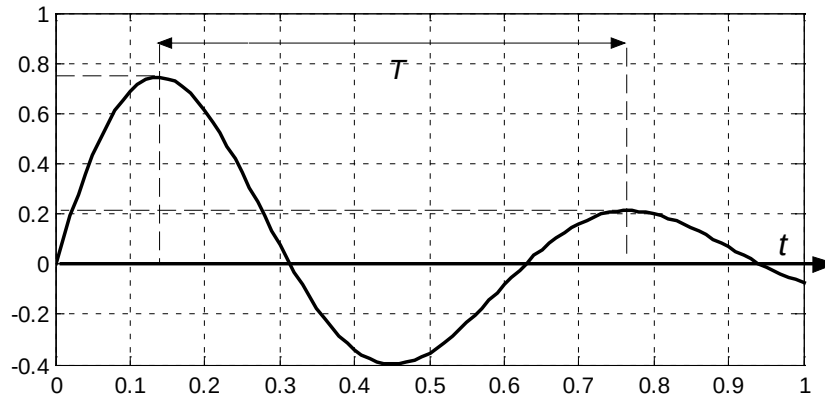
$$x(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi).$$

Vinkelfrekvensen for disse svingningene er

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2},$$

d.v.s. at vinkelfrekvensen er litt mindre enn for den udempede svingningen. Dette medfører at perioden $T = \frac{2\pi}{\omega}$ er litt større for en underdempet svingning enn for en udempet svingning med det samme systemet. Dette er kanskje naturlig, fordi dempingen ”bremser”. Men det viser også at *amplituden* $Ae^{-\delta t}$ ikke spiller noen rolle for perioden. Den blir like stor uansett om det er et stort eller lite utslag.

Nå som vi behersker teorien for underdempede svingninger, kan vi finne ut ”alt” om slike systemer bare ved å studere svingningene. Anta at figuren nedenfor er framkommet ved å plote utslaget som funksjon av tiden for en kloss med masse $m = 4.0$ kg som er festet til ei fjær med ukjent fjærkonstant, og som svinger under påvirkning av en ukjent demping. Kan vi finne fjærkonstanten og dempingen?



På figuren har jeg tegnet inn et par hjelpelinjer. Vi kan direkte lese av avstanden mellom to topper i svingningen. Denne avstanden blir perioden T . På øyemål ser vi at

$$T = 0.77 \text{ s} - 0.13 \text{ s} = \underline{\underline{0.64 \text{ s}}},$$

slik at vinkelfrekvensen blir

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.64 \text{ s}} = \underline{\underline{9.82 \text{ rad/s}}}.$$

Så skal vi finne dempingsfaktoren δ . Det gjør vi slik: Vi tar utgangspunkt i et tilfeldig punkt t_1 på grafen (for eksempel en topp). I vårt eksempel bruker vi den første toppen, og ser at utslaget er

$$x(t_1) = Ae^{-\delta t_1} \approx 0.75.$$

En periode senere er utslaget

$$x(t_1 + T) = Ae^{-\delta(t_1 + T)} \approx 0.21.$$

Forholdet mellom disse utslagene er

$$\begin{aligned} \frac{x(t_1 + T)}{x(t_1)} &= \frac{Ae^{-\delta(t_1 + T)}}{Ae^{-\delta t_1}} = \frac{e^{-\delta t_1} \cdot e^{-\delta T}}{e^{-\delta t_1}} = e^{-\delta T} \approx \frac{0.21}{0.75} \approx 0.28 \\ \Leftrightarrow -\delta T &\approx \ln 0.28 \quad \Leftrightarrow \delta \approx \frac{\ln 0.28}{-T} = \frac{\ln 0.28}{-0.64} \approx \underline{\underline{2.0}} \end{aligned}$$

Siden vi vet at svingningene er skapt av et vanlig kloss-fjær-system der klossen har masse $m = 4.0 \text{ kg}$, får vi at

$$\delta = \frac{b}{2m} \quad \Leftrightarrow \quad b = 2m \cdot \delta = 2 \cdot 4.0 \text{ kg} \cdot 2.0 \text{ s}^{-1} = \underline{\underline{16 \text{ N/(m/s)}}}.$$

For å finne fjærkonstanten k , bruker vi at

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2 \quad \Leftrightarrow \quad k = m \cdot \omega_0^2.$$

Men vi kjenner ikke ω_0 , i alle fall ikke nøyaktig. Men vi vet at

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \\ \Leftrightarrow \omega_0^2 &= \omega^2 + \delta^2 = (9.82 \text{ s}^{-1})^2 + (2.0 \text{ s}^{-1})^2 = 100 \text{ s}^{-1} \\ \Leftrightarrow \underline{\underline{\omega_0}} &= \underline{\underline{10 \text{ s}^{-1}}} \end{aligned}$$

Da blir

$$k = m \cdot \omega_0^2 = 4.0 \text{ kg} \cdot (10 \text{ rad/s})^2 = \underline{\underline{400 \text{ N/m}}}.$$

Og dermed vet vi alt av betydning om systemet, bare ved å benytte våre kunnskaper om dempede svingninger samt kjennskap til massen av det svingende legemet.

Legg forresten merke til at vi ikke hadde gjort noen stor feil ved å benytte ω istedenfor ω_0 ved beregning av k .

6.6. Partikulær løsning av svingelikningen.

Vi skal nå finne en partikulær løsning til differensiallikningen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = Y(t) = Y_0 \cos(\Omega t)$$

Den vanlige framgangsmåten for å finne $x_p(t)$, er å prøve med en løsning av samme form som høyresiden i den inhomogene likningen. En slik løsning kan skrives på flere måter. Vi foretrekker å skrive partikulærløsningen som en cosinus-funksjon siden høyresiden også er en cosinus-funksjon, og prøver derfor

$$x_p(t) = A \cos(\Omega t + \varphi).$$

For å finne A og φ må vi finne uttrykk for $\frac{dx_p}{dt}$ og $\frac{d^2x_p}{dt^2}$ og sette inn i differensiallikningen:

$$\frac{dx_p}{dt} = -A\Omega \sin(\Omega t + \varphi) \Rightarrow \frac{d^2x_p}{dt^2} = -A\Omega^2 \cos(\Omega t + \varphi)$$

Innsetting:

$$\begin{aligned} -A\Omega^2 \cos(\Omega t + \varphi) - 2\delta A\Omega \sin(\Omega t + \varphi) + \omega_0^2 A \cos(\Omega t + \varphi) &= Y_0 \cos(\Omega t) \\ \Leftrightarrow A((\omega_0^2 - \Omega^2) \cos(\Omega t + \varphi) - 2\delta\Omega \sin(\Omega t + \varphi)) &= Y_0 \cos(\Omega t) \end{aligned}$$

Vi skal altså finne verdier av A og φ som gjør at denne likningen er oppfylt for *alle* verdier av t . Vi starter med å benytte at

$$\cos(\Omega t + \varphi) = \cos(\Omega t) \cos \varphi - \sin(\Omega t) \sin \varphi$$

og at

$$\sin(\Omega t + \varphi) = \sin(\Omega t) \cos \varphi + \cos(\Omega t) \sin \varphi,$$

og får etter innsetting:

$$\begin{aligned} A((\omega_0^2 - \Omega^2)(\cos(\Omega t) \cos \varphi - \sin(\Omega t) \sin \varphi) - 2\delta\Omega(\sin(\Omega t) \cos \varphi + \cos(\Omega t) \sin \varphi)) \\ = Y_0 \cos(\Omega t) \end{aligned}$$

Denne sammenhengen skal være gyldig for *alle* verdier av t , altså også slike verdier der $\cos(\Omega t) = 0$ mens $\sin(\Omega t) = 1$. Da sitter vi igjen med

$$\begin{aligned} A((\omega_0^2 - \Omega^2)(0 - \sin \varphi) - 2\delta\Omega(\cos \varphi + 0)) &= 0 \\ \Leftrightarrow A((\omega_0^2 - \Omega^2) \sin \varphi + 2\delta\Omega \cos \varphi) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Men sammenhengen må også gjelde når $\sin(\Omega t) = 0$ mens $\cos(\Omega t) = 1$. Da sitter vi igjen med

$$\begin{aligned} A((\omega_0^2 - \Omega^2)(\cos \varphi - 0) - 2\delta\Omega(0 + \sin \varphi)) &= Y_0 \\ \Leftrightarrow A((\omega_0^2 - \Omega^2)\cos \varphi - 2\delta\Omega\sin \varphi) &= Y_0 \end{aligned} \quad (2)$$

Av (1) ser vi at enten er $A = 0$ (som er en uinteressant løsning fordi vi da ikke har noen svingning) eller vi må ha

$$(\omega_0^2 - \Omega^2)\sin \varphi + 2\delta\Omega\cos \varphi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \tan \varphi = -\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

Det er atskillig mer vrient å finne A . Det enkleste (?) er kanskje å starte med å *kvadrere* både (1) og (2):

$$\begin{aligned} A^2((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 \sin^2 \varphi + 2(\omega_0^2 - \Omega^2)\sin \varphi \cdot 2\delta\Omega\cos \varphi + 4\delta^2\Omega^2 \cos^2 \varphi) &= 0 \\ A^2((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 \cos^2 \varphi - 2(\omega_0^2 - \Omega^2)\cos \varphi \cdot 2\delta\Omega\sin \varphi + 4\delta^2\Omega^2 \sin^2 \varphi) &= Y_0^2 \end{aligned}$$

Vi legger sammen disse to likningene, og får:

$$A^2((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) + 0 + 4\delta^2\Omega^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)) = Y_0^2.$$

Men siden $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, gir dette

$$A = \frac{Y_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}.$$

Dermed har vi funnet de to uttrykkene vi var ute etter.

6.7. Bruk av komplekse funksjoner.

Jeg skal nå vise hvordan vi kan bruke komplekse funksjoner for å finne en partikulær løsning av differensiallikningen for tvungne svingninger. Vi husker at denne svingelikningen ser slik ut:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = Y_0 \cos(\Omega t). \quad (1)$$

Vi starter med å la $z(t) = x(t) + iy(t)$ være en *kompleks* funksjon av t , og ser på likningen

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 2\delta\frac{dz}{dt} + \omega_0^2z = Y_0 e^{i\Omega t} = Y_0 (\cos(\Omega t) + i \cdot \sin \Omega t). \quad (2)$$

Du ser at (1) blir realdelen av (2). Vi kan altså finne en partikulær løsning av (1) ved å finne en partikulær løsning av (2) og deretter finne realdelen av løsningen. Dette høres tungvint ut, men det er faktisk ganske greit når du først behersker regning med komplekse tall.

Vi antar at den partikulære løsningen av (2) er av formen

$$z_p(t) = Ae^{i\Omega t}$$

der A er en kompleks størrelse som vi skal finne. Vi starter med å derivere z_p to ganger:

$$\frac{dz_p}{dt} = i\Omega A e^{i\Omega t} \Rightarrow \frac{d^2 z_p}{dt^2} = i\Omega A \cdot i\Omega e^{i\Omega t} = -\Omega^2 A e^{i\Omega t}.$$

Innsetting i (2) gir:

$$-\Omega^2 A e^{i\Omega t} + 2\delta i\Omega A e^{i\Omega t} + \omega_0^2 A e^{i\Omega t} = Y_0 e^{i\Omega t}.$$

Forkorter bort $e^{i\Omega t}$ og ordner:

$$A(\omega_0^2 - \Omega^2 + 2\delta\Omega i) = Y_0 \Leftrightarrow A = \frac{Y_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2\delta\Omega i}.$$

For å finne realdelen av løsningen, starter jeg med å skrive A på eksponentiell form. Jeg benytter da at nevneren i A kan skrives på formen $R \cdot e^{i\theta}$ der

$$R = \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}$$

og

$$\tan \theta = \frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

Da blir

$$\begin{aligned} z_p &= A e^{i\Omega t} = \frac{Y_0}{R \cdot e^{i\theta}} e^{i\Omega t} = \frac{Y_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}} e^{i(\Omega t - \theta)} \\ &= \frac{Y_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}} (\cos(\Omega t - \theta) + i \sin(\Omega t - \theta)). \end{aligned}$$

Vi er kun interessert i realdelen av z_p . Vi får

$$x_p = \operatorname{Re}(z_p) = \underline{\underline{|A| \cos(\Omega t + \varphi)}}$$

der

$$|A| = \underline{\underline{\frac{Y_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}}}}$$

og

$$\tan \varphi = \tan(-\theta) = \underline{\underline{-\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}}}.$$

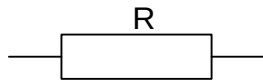
Dette er de samme resultatene som vi har funnet tidligere med mer tradisjonelle metoder. Men denne metoden ga mye enklere regning – i alle fall dersom du behersker regning med komplekse tall.

6.8. Elektriske svingninger.

6.8.1. Svingelikningen.

En vanlig elektrisk krets er bygd opp av tre typer komponenter:

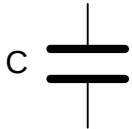
Motstander:



Når det går en strøm $I(t)$ gjennom en motstand med resistans R , er spenningen over motstanden

$$U_R(t) = R \cdot I(t).$$

Kondensatorer:



Når en kondensator med kapasitans C lades med en strøm $I(t)$, er spenningen over kondensatoren

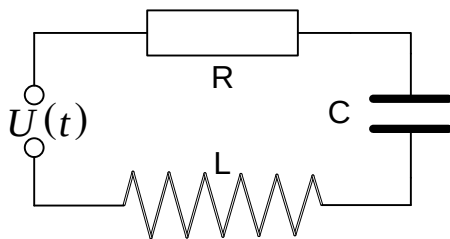
$$U_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t I(\tau) d\tau.$$

Spoler:



Når en strøm $I(t)$ går gjennom en spole med induktans L , er spenningen over spolen

$$U_L(t) = L \cdot \frac{dI(t)}{dt}.$$



Vi skal konsentrere oss om en **seriekrets** der en motstand, en kondensator og en spole koples i serie sammen med en spenningskilde som gir en spenning $U(t)$. Da sier Kirchhoffs 1. lov at summen av spenningsfallene i kretsen (regnet med fortegn) skal være lik null:

$$U(t) - R \cdot I(t) - \frac{1}{C} \int_0^t I(\tau) d\tau - L \cdot \frac{dI(t)}{dt} = 0.$$

For å bli kvitt integralet, deriverer vi hele denne likningen og får:

$$\frac{dU(t)}{dt} = R \cdot \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} \cdot I(t) + L \cdot \frac{d^2I(t)}{dt^2}.$$

Divisjon med L og ordning gir

$$\frac{d^2I(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot I(t) = \frac{1}{L} \frac{dU(t)}{dt}.$$

Dette er **svingelikningen** for vår elektriske krets.

Det er lite aktuelt med frie svingninger i en slik krets. I praksis vil det alltid være resistans i kretsen, og denne resistansen vil raskt dempe svingningene. Vi går derfor rett løs på den mest interessante situasjonen: Tvungne svingninger.

6.8.2. Tvungne svingninger.

Vi skal nå anta at kretsen påvirkes av en ytre spenning $U(t)$. Vi skal også forutsette at den ytre spenningen er gitt ved

$$U(t) = U_0 \sin(\Omega t).$$

Da blir

$$\frac{dU(t)}{dt} = U_0 \Omega \cos(\Omega t)$$

slik at svingelikningen blir

$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot I(t) = \frac{1}{L} U_0 \Omega \cos(\Omega t).$$

Siden løsningen av den homogene likningen raskt dempes mot null, er det kun den partikulære løsningen som er av interesse. Vi har tidligere funnet disse resultatene:

Differensiallikningen

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = Y_0 \cos(\Omega t)$$

har en partikulær løsning

$$x(t) = A \cos(\Omega t + \varphi)$$

der amplituden er

$$A = \frac{Y_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}}$$

og

$$\tan \varphi = -\frac{2\delta \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

Sammenlikner vi likningen for vår elektriske seriekrets med standardformen i ramma ovenfor, ser vi at

$$\delta = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad Y_0 = \frac{1}{L} U_0 \Omega,$$

slik at vi får en partikulær løsning

$$I_p(t) = I_0 \cos(\Omega t + \varphi)$$

der

$$I_0 = \frac{Y_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}} = \frac{\frac{U_0 \Omega}{L}}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \Omega^2\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{R}{2L}\right)^2 \Omega^2}} = \frac{U_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2 + R^2}}$$

$$\text{og } \tan \varphi = -\frac{2\delta \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} = -\frac{\frac{R}{L} \Omega}{\frac{1}{LC} - \Omega^2} = -\frac{R}{\frac{1}{\Omega C} - \Omega L}.$$

Her merker vi oss at den *udempede* vinkelfrekvensen for en slik krets er

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

Vi får **resonans** når I_0 har sin største verdi. Av uttrykket

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2 + R^2}}$$

ser du direkte at I_0 er størst når nevneren er minst, d.v.s. når Ω er slik at

$$\frac{1}{\Omega C} - \Omega L = 0 \Leftrightarrow \Omega^2 LC = 1 \Leftrightarrow \Omega_{\text{res}} = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \underline{\underline{\omega_0}}.$$

Resonansfrekvensen er altså alltid lik vinkelfrekvensen ω_0 til den *udempede* kretsen. Da er

$$I_{0,\text{max}} = \frac{U_0}{\sqrt{0 + R^2}} = \frac{U_0}{R}.$$

Av Ohms lov ser vi at dette er lik strømmen i en likestrømskrets med konstant spenning U_0 over en motstand med resistans R .

6.8.3. Bruk av komplekse størrelser.

Når elektroingeniører analyserer vekselstrømskretser, benytter de *komplekse* størrelser. Vi skal nå bruke komplekse størrelser til å finne den partikulære løsningen av svingelikningen for vår seriekrets uten å ty til gjenbruk av tidligere resultater, og samtidig vise hvordan elektroingeniørenes komplekse størrelser framkommer.

Svingelikningen er altså

$$U(t) - R \cdot I(t) - \frac{1}{C} \int_0^t I(\tau) d\tau - L \cdot \frac{dI(t)}{dt} = 0.$$

Som før setter vi inn

$$U(t) = U_0 \sin(\Omega t),$$

og likningen blir

$$L \cdot \frac{dI(t)}{dt} + R \cdot I(t) + \frac{1}{C} \int_0^t I(\tau) d\tau = U_0 \sin(\Omega t).$$

Nå definerer vi en *kompleks* funksjon

$$z(t) = x(t) + j \cdot I(t)$$

der vi bruker j istedenfor i som symbol for den imaginære enheten. Så setter vi opp differensiallikningen

$$L \cdot \frac{dz(t)}{dt} + R \cdot z(t) + \frac{1}{C} \int_0^t z(\tau) d\tau = U_0 e^{j\Omega t} = U_0 (\cos(\Omega t) + j \cdot \sin(\Omega t)).$$

Da blir svingelikningen for vår elektriske krets *imaginærdelen* av den komplekse differensiallikningen ovenfor. Strategien vår blir nå å løse den komplekse differensiallikningen, og deretter finne imaginærdelen av denne løsningen.

For å bli kvitt integralet, deriverer vi likningen og får

$$L \cdot \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + R \cdot \frac{dz(t)}{dt} + \frac{1}{C} \cdot z(t) = j\Omega U_0 e^{j\Omega t}.$$

Vi prøver nå å finne en partikulær løsning av formen

$$z_p(t) = Ae^{j\Omega t}$$

der A er en kompleks konstant. Vi deriverer to ganger:

$$\frac{z_p(t)}{dt} = j\Omega Ae^{j\Omega t} \Rightarrow \frac{z_p^2(t)}{dt^2} = j\Omega \cdot j\Omega Ae^{j\Omega t} = -\Omega^2 Ae^{j\Omega t}.$$

Dette setter vi inn i differensiallikningen og får:

$$L \cdot (-\Omega^2 Ae^{j\Omega t}) + R \cdot (j\Omega Ae^{j\Omega t}) + \frac{1}{C} \cdot Ae^{j\Omega t} = j\Omega U_0 e^{j\Omega t}.$$

Så deler vi på $e^{j\Omega t}$ og ordner:

$$A \left(-L\Omega^2 + \frac{1}{C} + j \cdot R\Omega \right) = j\Omega U_0$$

$$A = \frac{j\Omega U_0}{-L\Omega^2 + \frac{1}{C} + j \cdot R\Omega} \cdot \frac{\frac{-j}{\Omega}}{\frac{-j}{\Omega}} = \frac{U_0}{R + j \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C} \right)}$$

Så skriver vi nevneren på eksponentiell form:

$$R + j \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C} \right) = r \cdot e^{j\varphi}$$

der

$$r = \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C} \right)^2}$$

og

$$\tan \varphi = \frac{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}}{R}.$$

Da blir

$$\begin{aligned} z_p &= Ae^{j\Omega t} = \frac{U_0}{r \cdot e^{j\varphi}} \cdot e^{j\Omega t} = \frac{U_0}{r} e^{-j\varphi} e^{j\Omega t} = \frac{U_0}{r} e^{j(\Omega t - \varphi)} \\ &= \frac{U_0}{r} (\cos(\Omega t - \varphi) + j \cdot \sin(\Omega t - \varphi)) \end{aligned}$$

Strømmen i kretsen er nå imaginærdelen av z_p :

$$I(t) = \text{Im}(z_p) = \frac{U_0}{r} \sin(\Omega t - \varphi) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C} \right)^2}} \cdot \sin(\Omega t - \varphi).$$

Dette er samme uttrykk som vi fant tidligere. Men nå har vi funnet løsningen helt fra grunnen av, uten å benytte resultater som vi har funnet tidligere.

La oss vende tilbake til uttrykket

$$A = \frac{U_0}{R + j\left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)}.$$

Dette er et uttrykk som elektroingeniørene kjenner godt. Nevneren kaller de *kretsens impedans*, og bruker gjerne symbolet Z for den. Vi har altså

$$Z = R + j\left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right) = R + j\Omega L + j\left(-\frac{1}{\Omega C}\right).$$

Nå har man innført

$$X_L = j\Omega L$$

som en slags ”resistans” som skyldes at spolen prøver å hindre at det går vekselstrøm gjennom den. Man har også innført

$$X_C = \frac{-1}{\Omega C} j = \frac{1}{j\Omega C}$$

som en slags ”resistans” som skyldes at kondensatoren slipper gjennom vekselstrøm, men prøver å hindre at *likestrøm* slipper gjennom.

Når elektroingeniørene benytter disse størrelsene, tegner de et komplekst plan der de avmerker R langs den reelle aksen, og X_L og X_C langs henholdsvis positiv og negativ imaginær akse. Deretter legges disse størrelsene sammen. Nå kan $|Z|$ og fasevinkelen φ leses direkte ut fra figuren.

I dette lille notatet har jeg begrenset meg til regning med en seriekrets med motstand, spole og kondensator. I praksis vil du komme bort i mange andre kretser. I prinsippet kan alle slike kretser behandles med differensiallikninger på samme måte som ovenfor, men regningene kan fort bli temmelig kompliserte. Heldigvis er det utarbeidet en del regler for regning med resistanser og impedanser som gjør det til en overkommelig jobb å analysere slike kretser. Når du bruker disse reglene slavisk, er det lett å glemme at bak disse reglene ligger det kunnskaper om komplekse tall og om løsning av andre ordens differensiallikninger.

7. Småoppgaver i teksten.

7.1. Oppgaver

Du finner løsningsforslag til disse oppgavene ved å klikke på oppgavenummeret.

[Oppgave 1.1.1](#)

Løs disse differensiallikningene ved å "gjette" på en funksjon $y = f(x)$ som passer i den gitte differensiallikningen. Tilpass deretter en konstant slik at startverdien stemmer.

- a) $y' = x^2$, $y(0) = \frac{1}{3}$.
- b) $y' = \cos x$, $y(0) = 1$.
- c) $y' = -y$, $y(0) = 5$.

[Oppgave 1.2.1](#)

Løs disse separable differensiallikningene:

- a) $y' = x$
- b) $y' = y$
- c) $xy' = 2$
- d) $xy \cdot y' = 1$

[Oppgave 1.2.2](#)

Løs disse differensiallikningene:

- a) $y \cdot y' = \sin x$
- b) $\frac{y'}{y^2} = e^{-x}$
- c) $\frac{y'}{x} = e^x \cos^2 y$

[Oppgave 1.2.3](#)

Løs disse differensiallikningene:

- a) $x \cdot y' = \tan y$, $y(1) = \frac{1}{2}\pi$
- b) $(x-1)y' = x \cdot y$, $y(0) = 2$
- c) $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 1$

[Oppgave 1.3.1](#)

Løs disse differensiallikningene:

- a) $y' + y = 1$, $y(0) = 0$
- b) $y' - 2xy = e^{x^2}$, $y(0) = 1$

Oppgave 1.3.2

Løs de lineære differensiallikningene nedenfor. Husk at du først må skrive likningene på formen

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

og deretter løse med formel.

- a) $y' = x - y$, $y(0) = 2$
- b) $xy' = 2x - y$, $y(1) = 2$
- c) $xy' + 2y = 2e^{x^2}$, $y(1) = 0$
- d) $y' + y \tan x = 2x \cos x$, $y(0) = 1$

Oppgave 1.4.1

- a) Løs differensiallikningen

$$(x + y)y' = 2x - y$$

ved å innføre substitusjonen

$$z = x + y.$$

- b) Løs differensiallikningen

$$y \frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

ved å innføre substitusjonen

$$z = x^2 + y^2.$$

Oppgave 1.4.2

Vis at differensiallikningene nedenfor er av formen

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

og løs likningene ved å innføre substitusjonen

$$z = \frac{y}{x}.$$

- a) $xy' = y - 4\sqrt{xy}$
- b) $(x^2 - y^2)y' = 2xy$

Oppgave 1.4.3

Løs disse differensiallikningene:

- a) $y' - xy = \frac{e^{x^2}}{y}$
- b) $(\sin x)y' - (\cos x)y = xy^2$

Oppgave 3.1.1

Gjør disse differensiallikningene om til 1.ordens, og løs dem:

- a) $xy'' - y' = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 2$

b) $y'' + y' = x + 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

Oppgave 3.2.1

Vi har gitt differensiallikningen

$$y'' - 4y = 0.$$

a) Vis ved innsetting at både

$$y_1(x) = e^{2x}$$

og

$$y_2(x) = e^{-2x}$$

er løsninger av denne likningen.

b) Skriv ned den generelle løsningen av likningen.

c) Finn den løsningen som har starttilstand $y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$.

Oppgave 3.2.2

Finn den generelle løsningen av disse differensiallikningene:

a) $y'' + y' - 2y = 0$

b) $y'' - 4y' + 3y = 0$

c) $y'' - 6y' + 9y = 0$

d) $y'' + 2y' + 5y = 0$

Oppgave 3.2.3

Løs disse initialverdiproblemene:

a) $y'' - 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = 0$

b) $y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

c) $y'' + 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 0$

Oppgave 3.3.1

Vi har gitt differensiallikningen

$$y'' - 4y = 4x.$$

Vis at $y_p(x) = -x$ er en partikulær løsning av denne likningen.

Sett opp den generelle løsningen av differensiallikningen.

Finn deretter den løsningen som har starttilstand

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$$

Oppgave 3.3.2

Finn den generelle løsningen av disse differensiallikningene:

a) $y'' + 3y' + 2y = 4x + 2$

b) $y'' + 2y' + y = e^{-2x}$

c) $y'' + 4y = \sin x$

d) $y'' - 4y = e^{-2x}$

Oppgave 3.3.3

Løs disse initialverdiproblemene:

- a) $y'' + 2y' - 3y = 8e^{-x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
b) $y'' + 9y = 18x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$

Oppgave 3.4.1

Finn den generelle løsningen av differensiallikningen:

- a) $y''' - 4y'' + 3y' = 6x$
b) $y''' + y'' + 3y' - 5y = e^{-2x}$

Oppgave 3.5.1

Omform disse likningssystemene til en 2.ordens differensiallikning, og bruk denne til å løse likningssystemet:

- a) $y_1' = 2y_1 + 3y_2$
 $y_2' = 2y_1 + y_2$
b) $y_1' = 4y_1 + y_2$, $y_1(0) = 11$
 $y_2' = -2y_1 + y_2$, $y_2(0) = -7$
c) $y_1' = -2y_1 + y_2$, $y_1(0) = 1$
 $y_2' = 4y_1 + y_2 - e^x$, $y_2(0) = 5$
d) $y_1' = 4y_1 + y_2 + e^x$, $y_1(0) = 1$
 $y_2' = 6y_1 - y_2 - e^x$, $y_2(0) = 1$

7.2. Løsninger på småoppgaver

Oppgave 1.1.1

- a) $y' = x^2$, $y(0) = \frac{1}{3}$.

Vi finner først $y = f(x)$ ved å integrere:

$$y = \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C.$$

Finner C av startbetingelsen:

$$y(0) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot 0 + C = \frac{1}{3} \Leftrightarrow C = \frac{1}{3}.$$

Altså er løsningen

$$y(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}(x^3 + 1)}}.$$

- b) $y' = \cos x$, $y(0) = 1$.

Vi finner først $y = f(x)$ ved å integrere:

$$y = \int \cos x \, dx = \underline{\sin x + C}.$$

Finner C av startbetingelsen:

$$y(0) = 1 \Leftrightarrow \sin(0) + C = 1 \Leftrightarrow 0 + C = 1 \Leftrightarrow \underline{C = 1}.$$

Altså er løsningen

$$y(x) = \underline{\underline{\sin x + 1}}.$$

c) $y' = -y, \quad y(0) = 5.$

Vi må nå finne en funksjon $y = f(x)$ som er slik at $y' = -y$. Inspirert av Eksempel 1.1.2 prøver vi en løsning av formen $y = Ce^{-x}$, og ser at $y' = -Ce^{-x}$ slik at denne løsningen tilfredsstiller likningen $y' = -y$. Finner konstanten C :

$$y(0) = 5 \Leftrightarrow Ce^0 = 5 \Leftrightarrow \underline{C = 5}.$$

Altså er løsningen $y(x) = \underline{\underline{5e^{-x}}}$.

Oppgave 1.2.1

a) $y' = x$

Setter $y' = \frac{dy}{dx}$ slik at differensiallikningen blir

$$\frac{dy}{dx} = x.$$

Multipliserer med dx og integrerer:

$$\int dy = \int dx \Leftrightarrow y(x) = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2 + C}}.$$

b) $y' = y$

Setter $y' = \frac{dy}{dx}$ slik at differensiallikningen blir

$$\frac{dy}{dx} = y.$$

Multipliserer med dx , og dividerer med y :

$$\frac{dy}{y} = dx$$

Integrerer begge sider:

$$\int \frac{1}{y} dy = \int dx \Leftrightarrow \ln y = x + C_1 \Leftrightarrow y = e^{x+C_1} = e^x \cdot e^{C_1} = \underline{\underline{C \cdot e^x}}.$$

Her er $C = e^{C_1}$.

c) $xy' = 2$

Setter $y' = \frac{dy}{dx}$ slik at differensiallikningen blir

$$x \frac{dy}{dx} = 2.$$

Multipliserer med dx og deler på x på begge sider:

$$dy = 2 \frac{dx}{x}.$$

Integrerer på begge sider:

$$\int dy = \int \frac{2}{x} dx \Leftrightarrow y = \underline{\underline{2 \ln|x| + C}}.$$

d) $xy \cdot y' = 1$

Setter $y' = \frac{dy}{dx}$ slik at differensiallikningen blir

$$xy \cdot \frac{dy}{dx} = 1.$$

Multipliserer med dx og deler på x på begge sider:

$$y dy = \frac{dx}{x}$$

Integrerer på begge sider:

$$\int y dy = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{2} y^2 = \ln|x| + C_1 \Leftrightarrow y^2 = 2 \ln|x| + 2C_1 \Leftrightarrow y = \underline{\underline{\pm \sqrt{\ln x^2 + C}}}.$$

Her har jeg benyttet at

$$2 \ln|x| = \ln(|x|)^2 = \ln x^2.$$

Videre har jeg innført en ny konstant $C = 2C_1$.

Oppgave 1.2.2

a) $y \cdot y' = \sin x$

Setter $y' = \frac{dy}{dx}$ og multipliserer med dx . Deretter integreres begge sidene av likhetstegnet:

$$y \cdot y' = \sin x \Leftrightarrow y \cdot \frac{dy}{dx} = \sin x \Leftrightarrow \int y dy = \int \sin x dx$$

$$\frac{1}{2} y^2 = -\cos x + C \Leftrightarrow y^2 = 2C_1 - 2 \cos x \Leftrightarrow y(x) = \underline{\underline{\sqrt{C - 2 \cos x}}}$$

Her har jeg innført en ny konstant $C = 2C_1$.

b) $\frac{y'}{y^2} = e^{-x}$

Setter $y' = \frac{dy}{dx}$, multipliserer med dx og integrerer begge sider av likhetstegnet:

$$\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} = e^{-x} \Leftrightarrow \frac{1}{y^2} dy = e^{-x} dx$$

$$\int y^{-2} dy = \int e^{-x} dx \Leftrightarrow -y^{-1} = -e^{-x} - C \Leftrightarrow \frac{1}{y} = e^{-x} + C.$$

Da blir

$$y = \frac{1}{e^{-x} + C}.$$

c) $\frac{y'}{x} = e^x \cos^2 y$

Setter $y' = \frac{dy}{dx}$, og separerer likningen ved å multiplisere likningen med $x \, dx$ og dividere med $\cos^2 y$. Deretter integreres på begge sider av likhetstegnet:

$$\frac{y'}{x} = e^x \cos^2 y \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 y} \cdot y' = x \cdot e^x \Leftrightarrow \int \frac{1}{\cos^2 y} dy = \int x \cdot e^x dx$$

$$\tan y = x \cdot e^x - e^x + C \Leftrightarrow \underline{\underline{y = \arctan(x \cdot e^x - e^x + C)}}$$

Integralet av $x e^x$ løses med delvis integrasjon.

Oppgave 1.2.3

a) $x \cdot y' = \tan y$

Deler likningen på x og på $\tan y$ for å separere likningen, og setter $y' = \frac{dy}{dx}$. Multipliserer med dx og integrerer:

$$x \cdot y' = \tan y \Leftrightarrow \frac{1}{\tan y} \cdot y' = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \int \frac{1}{\tan y} dy = \int \frac{1}{x} dx$$

Integralet på venstre side løses ved å benytte at $\tan y = \frac{\sin y}{\cos y}$. Da blir

$$\int \frac{1}{\tan y} dy = \int \frac{1}{\frac{\sin y}{\cos y}} dy = \int \frac{\cos y}{\sin y} dy.$$

Så innfører jeg substitusjonen

$$u = \sin y \Leftrightarrow \frac{du}{dy} = \cos y \Leftrightarrow du = \cos y \, dy$$

slik at

$$\int \frac{1}{\tan y} dy = \int \frac{\cos y}{\sin y} dy = \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln|\sin y|.$$

Nå samler jeg trådene:

$$\int \frac{1}{\tan y} dy = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln|\sin y| = \ln|x| + \ln C \equiv \ln(C \cdot x) \Leftrightarrow \underline{\underline{\sin y = C \cdot x}}$$

Det er hensiktsmessig å erstatte konstanten C med $\ln C$.

Finner C :

$$y(1) = \frac{1}{2}\pi \Leftrightarrow C \cdot 1 = \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 1 \Leftrightarrow C = 1.$$

Løsningen blir da

$$\sin y = x \Leftrightarrow y(x) = \underline{\underline{\arcsin x}}.$$

b) $(x-1)y' = x \cdot y$

Her må jeg dele likningen på $(x-1)$ og på y for å separere likningen. Så setter jeg

$y' = \frac{dy}{dx}$, multipliserer med dx og integrerer:

$$(x-1)y' = x \cdot y \Leftrightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{x}{x-1} \Leftrightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{x}{x-1} dx.$$

Integraler på høyre side av likhetstegnet løses enkelt ved hjelp av et lite trick: Trekk fra 1 og legg til 1 i telleren. Da får du:

$$\frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}.$$

Nå integreres begge sider:

$$\begin{aligned} \ln|y| &= x + \ln|x-1| + \ln C = \ln(e^x) + \ln|x-1| + \ln C = \ln(e^x(x-1)C) \\ &\Leftrightarrow \underline{\underline{y = C(x-1)e^x}} \end{aligned}$$

Finner C:

$$y(0) = 2 \Leftrightarrow C(0-1)e^0 = 2 \Leftrightarrow -C = 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{C = -2}}.$$

Løsningen blir da

$$y = -2(x-1)e^x = \underline{\underline{(2-2x)e^x}}.$$

c) $y' = 1 + y^2$

Her må jeg dele likningen på $1 + y^2$ for å separere. Så setter jeg $y' = \frac{dy}{dx}$, multipliserer med dx og integrerer:

$$\begin{aligned} y' = 1 + y^2 &\Leftrightarrow \frac{1}{1+y^2} \cdot y' = 1 \Leftrightarrow \int \frac{1}{1+y^2} dy = \int dx \\ \arctan y &= x + C \Leftrightarrow \underline{\underline{y = \tan(x + C)}} \end{aligned}$$

Finner C:

$$y(0) = 1 \Leftrightarrow \tan(0 + C) = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{C = \arctan 1 = \frac{1}{4}\pi}}.$$

Løsningen blir da

$$\underline{\underline{y = \tan\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)}}.$$

Oppgave 1.3.1

a) $y' + y = 1, \quad y(0) = 0$

Likningen er allerede på standard form. Vi ser at $f(x) = 1$ og at $g(x) = 1$. Finner først hjelpefunksjonen $F(x)$:

$$F(x) = \int f(x) dx = \int 1 dx = \underline{x}.$$

Setter dette inn i løsningsformelen:

$$\begin{aligned}y(x) &= e^{-F(x)} \left(\int g(x) \cdot e^{F(x)} dx + C \right) = e^{-x} \left(\int 1 \cdot e^x dx + C \right) = e^{-x} (e^x + C) \\&= e^{-x} \cdot e^x + Ce^{-x} = \underline{1 + Ce^{-x}}\end{aligned}$$

Finner C:

$$y(0) = 0 \Leftrightarrow 1 + Ce^0 = 0 \Leftrightarrow 1 + C \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow \underline{C = -1}.$$

Løsningen blir da

$$y(x) = 1 + (-1)e^{-x} = \underline{1 - e^{-x}}.$$

b) $y' - 2xy = e^{x^2}, y(0) = 1$

Likningen står allerede på standardformen $y' + f(x) \cdot y = g(x)$. Vi ser at $f(x) = -2x$ og at $g(x) = e^{x^2}$. Finner først hjelpefunksjonen $F(x)$:

$$F(x) = \int f(x) dx = \int (-2x) dx = \underline{-x^2}.$$

Setter dette inn i løsningsformelen:

$$\begin{aligned}y(x) &= e^{-F(x)} \left(\int g(x) e^{F(x)} dx + C \right) = e^{-(-x^2)} \left(\int e^{x^2} \cdot e^{-x^2} dx + C \right) \\&= e^{x^2} \left(\int 1 dx + C \right) = \underline{e^{x^2} (x + C)}\end{aligned}$$

Finner C:

$$y(0) = 1 \Leftrightarrow e^{0^2} (0 + C) = 1 \Leftrightarrow 1 \cdot C = 1 \Leftrightarrow \underline{C = 1}.$$

Løsningen blir derfor

$$y(x) = \underline{e^{x^2} (x + 1)}.$$

Oppgave 1.3.2

a) $y' = x - y \quad y(0) = 2$

Omformer først til

$$y' + y = x.$$

Finner hjelpefunksjonen:

$$F(x) = \int dx = x$$

Setter inn i formelen:

$$\begin{aligned}y(x) &= e^{-F(x)} \left(\int e^{F(x)} \cdot x dx + C \right) = e^{-x} \left(\int e^x \cdot x dx + C \right) = e^{-x} ((x-1)e^x + C) \\&= (x-1)e^x \cdot e^{-x} + Ce^{-x} = (x-1)e^{x-x} + Ce^{-x} = \underline{x-1 + Ce^{-x}}\end{aligned}$$

Integralet er løst med delvis integrasjon. Finner C:

$$y(0) = 2 \Leftrightarrow 0 - 1 + Ce^{-0} = 2 \Leftrightarrow C = 2 + 1 = 3.$$

Løsningen blir da

$$\underline{y = x - 1 + 3e^{-x}}.$$

b) $xy' = 2x - y \quad y(1) = 2$

Flytter y over på venstre side og deler på x for å få likningen på standardform:

$$y' + \frac{1}{x}y = 2.$$

Finner hjelpefunksjonen:

$$F(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln x$$

Setter inn i formelen:

$$y(x) = e^{-\ln x} \left(\int 2e^{\ln x} dx + C \right) = (e^{\ln x})^{-1} \left(\int 2x dx + C \right) = x^{-1} (x^2 + C) = x + \frac{C}{x}.$$

Finner C:

$$y(1) = 2 \Leftrightarrow 1 + \frac{C}{1} = 2 \Leftrightarrow \underline{C=1}$$

Løsningen blir da

$$\underline{\underline{y = x + \frac{1}{x}}}.$$

c) $xy' + 2y = 2e^{x^2}, \quad y(1) = 0$

Deler på x for å få likningen på standardform:

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{2}{x}e^{x^2}$$

Finner hjelpefunksjonen:

$$F(x) = \int \frac{2}{x} dx = \underline{2 \ln x}$$

Setter inn i formelen:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-2 \ln x} \left(\int \frac{2}{x} e^{x^2} \cdot e^{2 \ln x} dx + C \right) = (e^{\ln x})^{-2} \left(\int \frac{2}{x} e^{x^2} \cdot (e^{\ln x})^2 dx + C \right) \\ &= x^{-2} \left(\int \frac{2}{x} e^{x^2} \cdot x^2 dx + C \right) = x^{-2} \left(\int 2x e^{x^2} dx + C \right) = \underline{x^{-2} (e^{x^2} + C)} \end{aligned}$$

Integralet løses ved hjelp av substitusjonen

$$u = x^2 \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow du = 2x dx$$

slik at

$$\int 2x e^{x^2} dx = \int e^u du = e^u = \underline{e^{x^2}}.$$

Finner C:

$$y(1) = 0 \Leftrightarrow 1^{-2} (e^{1^2} + C) = 0 \Leftrightarrow e + C = 0 \Leftrightarrow \underline{C = -e}.$$

Løsningen blir da

$$\underline{\underline{y = \frac{e^{x^2} - e}{x^2}}}.$$

d) $y' + y \tan x = 2x \cos x \quad y(0) = 1$

Likningen står allerede på standard form. Finner hjelpefunksjonen:

$$F(x) = \int \tan x dx = \underline{-\ln(\cos x)}$$

Setter inn i formelen:

$$y(x) = e^{-(-\ln(\cos x))} \left(\int 2x \cos x \cdot e^{-\ln(\cos x)} dx + C \right) = e^{\ln(\cos x)} \left(\int 2x \cos x \cdot (e^{\ln(\cos x)})^{-1} dx + C \right) \\ = \cos x \left(\int 2x \cos x \cdot (\cos x)^{-1} dx + C \right) = \cos x \left(\int 2x dx + C \right) = \cos x (x^2 + C)$$

Finner C:

$$y(0) = 1 \Leftrightarrow \cos 0 (0^2 + C) = 1 \Leftrightarrow 1 \cdot C = 1 \Leftrightarrow \underline{C=1}.$$

Løsningen blir da

$$\underline{\underline{y = (x^2 + 1) \cdot \cos x.}}$$

Oppgave 1.4.1

a) $z = x + y \Leftrightarrow y = z - x \Rightarrow y' = z' - 1.$

Når dette settes inn i differensiallikningen

$$(x + y)y' = 2x - y$$

får vi

$$z(z' - 1) = 2x - (z - x) \Leftrightarrow z \cdot z' - z = 3x - z$$

$$\Leftrightarrow z \cdot \frac{dz}{dx} = 3x \Leftrightarrow z dz = 3x dx$$

Integrerer begge sider:

$$\frac{1}{2} z^2 = \frac{3}{2} x^2 + C_1 \Rightarrow z = \pm \sqrt{3x^2 + C}$$

der $C = 2C_1$. Dermed får vi løsningen

$$y(x) = z - x = \underline{\underline{\pm \sqrt{3x^2 + C} - x.}}$$

b) $z = x^2 + y^2 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} \Leftrightarrow y \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \frac{dz}{dx} - x.$

Når dette settes inn i differensiallikningen

$$y \frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

får vi

$$\frac{1}{2} \frac{dz}{dx} - x = z \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} - 2z = 2x.$$

Dette er en lineær differensiallikning, som løses med formel:

$$F(x) = \int -2 dx = -2x,$$

$$z(x) = e^{-(-2x)} \left(\int 2x \cdot e^{-2x} dx + C \right) = e^{2x} \left(\left(-x - \frac{1}{2} \right) e^{-2x} + C \right) = \underline{\underline{-x - \frac{1}{2} + Ce^{2x}}}.$$

Integralet er løst med delvis integrasjon. Da får vi

$$z = x^2 + y^2 \Leftrightarrow y^2 = z - x^2 = -x - \frac{1}{2} + Ce^{2x} - x^2$$

som gir

$$\underline{\underline{y(x) = \pm \sqrt{Ce^{2x} - x^2 - x - \frac{1}{2}}.}}$$

Oppgave 1.4.2

$$z = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = x \cdot z \Rightarrow y' = z + x \cdot z'.$$

$$a) \quad xy' = y - 4\sqrt{xy} \Leftrightarrow y' = \frac{y}{x} - 4\sqrt{\frac{y}{x}}$$

Innfører z som vist ovenfor:

$$z + xz' = z - 4\sqrt{z} \Leftrightarrow xz' = -4\sqrt{z} \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = -\frac{4\sqrt{z}}{x} \Leftrightarrow \frac{dz}{\sqrt{z}} = -4\frac{dx}{x}.$$

Integrerer begge sider, og får

$$2\sqrt{z} = -4\ln x + C_1 \Leftrightarrow \sqrt{z} = -2\ln x + \ln C = \ln\left(\frac{C}{x^2}\right)$$

der $\frac{1}{2}C_1 = \ln C$. Kvadrerer, og får

$$z = \frac{y}{x} = \left(\ln\left(\frac{C}{x^2}\right)\right)^2 \Leftrightarrow \underline{\underline{y(x) = x \cdot \left(\ln\left(\frac{C}{x^2}\right)\right)^2}}.$$

$$b) \quad (x^2 - y^2)y' = 2xy \Leftrightarrow \left(1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)y' = 2\frac{y}{x}$$

Innfører z som vist ovenfor:

$$(1 - z^2)(z + x \cdot z') = 2z \Leftrightarrow z - z^3 + x(1 - z^2)z' = 2z$$

$$\Leftrightarrow x(1 - z^2)z' = z^3 + z \Leftrightarrow \frac{1 - z^2}{z^3 + z} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$$

Delbrøkkopspalter:

$$\frac{1 - z^2}{z(z^2 + 1)} = \frac{A}{z} + \frac{Bz + C}{z^2 + 1} = \frac{A(z^2 + 1) + (Bz + C)z}{z(z^2 + 1)} = \frac{(A + B)z^2 + Cz + A}{z(z^2 + 1)}.$$

Dette er en identitet som er oppfylt kun dersom

$$A = 1, C = 0, A + B = -1 \Leftrightarrow B = -1 - A = -1 - 1 = -2.$$

Nå kan vi integrere:

$$\int \frac{1 - z^2}{z^3 + z} dz = \int \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{z} dz + \int \frac{-2z}{z^2 + 1} dz = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln|z| - \ln(z^2 + 1) = \ln x + \ln C \Leftrightarrow \ln \frac{|z|}{z^2 + 1} = \ln(Cx) \Leftrightarrow \frac{z}{z^2 + 1} = Cx$$

Så husker vi at $z = \frac{y}{x}$:

$$\frac{\frac{y}{x}}{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1} = Cx \Leftrightarrow \frac{xy}{y^2 + x^2} = Cx \Leftrightarrow \underline{\underline{y = C(y^2 + x^2)}}.$$

Vi bryr oss ikke om å finne y som funksjon av x selv om det er mulig ved å løse en andreggradslikning.

Oppgave 1.4.3

$$a) \quad y' - xy = \frac{e^{x^2}}{y} = e^{x^2} y^{-1}.$$

Dette er en Bernoulli-likning med $n = -1$. Vi substituerer derfor

$$z = y^{1-(-1)} = y^2 \Rightarrow z' = 2y \cdot y' \Leftrightarrow y' = \frac{z'}{2y}.$$

Da blir likningen

$$\frac{z'}{2y} - xy = \frac{e^{x^2}}{y} \Leftrightarrow z' - 2xy^2 = 2e^{x^2} \Leftrightarrow z' - 2xz = 2e^{x^2}.$$

Dette er en lineær differensiallikning som løses med formel:

$$F(x) = \int -2x dx = -x^2,$$

$$z(x) = e^{-(-x^2)} \left(\int 2e^{x^2} \cdot e^{-x^2} dx + C \right) = e^{x^2} \left(\int 2 dx + C \right) = \underline{e^{x^2} (2x + C)}.$$

Da blir

$$y = \pm \sqrt{z} = \pm \sqrt{e^{x^2} (2x + C)} = \underline{\underline{\pm e^{\frac{1}{2}x^2} \sqrt{2x + C}}}.$$

b) $(\sin x) y' - (\cos x) y = xy^2 \Leftrightarrow y' - \frac{\cos x}{\sin x} y = \frac{x}{\sin x} y^2.$

Dette er en Bernoulli-likning med $n = 2$. Vi substituerer derfor

$$z = y^{1-2} = y^{-1} = \frac{1}{y} \Rightarrow z' = -y^{-2} \cdot y' = -\frac{y'}{y^2} \Leftrightarrow y' = -y^2 \cdot z'.$$

Da blir likningen

$$-y^2 z' - \frac{\cos x}{\sin x} y = \frac{x}{\sin x} y^2 \Leftrightarrow z' + \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{y} = -\frac{x}{\sin x} \Leftrightarrow z' + \frac{\cos x}{\sin x} z = -\frac{x}{\sin x}.$$

Dette er en lineær differensiallikning som løses med formel:

$$F(x) = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x|$$

der jeg har brukt substitusjonen

$$u = \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Leftrightarrow du = (\cos x) dx.$$

Da blir

$$z(x) = e^{-\ln|\sin x|} \left(\int \left(-\frac{x}{\sin x} \right) \cdot e^{\ln|\sin x|} dx + C \right) = |\sin x| \left(-\int \frac{x}{\sin x} \cdot |\sin x| + C \right).$$

Dersom $\sin x > 0$, kan vi fjerne absoluttverditegnene. Dersom $\sin x < 0$, blir produktet av de to sinus-faktorene positivt mens konstanten C kan absorbere ett minustegn. Vi får da

$$z(x) = \sin x \left(-\int x dx + C \right) = \underline{\sin x \left(-\frac{1}{2} x^2 + C \right)}.$$

Da blir

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} = \underline{\underline{\frac{1}{\left(C - \frac{1}{2} x^2 \right) \sin x}}}.$$

Oppgave 3.1.1

a) $xy'' - y' = 0 \quad y(1) = 0 \quad y'(1) = 2$

Innfører

$$z = y' \Leftrightarrow z' = y''$$

og får

$$xz' - z = 0.$$

Denne likningen er både lineær og separabel. Den løses (kanskje) lettest ved å oppfatte den som separabel. Flytter over z på andre siden av likhetstegnet og deler på xz for å separere. Deretter settes

$$z' = \frac{dz}{dx}$$

og vi får:

$$xz' = z \Leftrightarrow \frac{1}{z}z' = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \int \frac{1}{z}dz = \int \frac{1}{x}dx$$

$$\ln z = \ln x + \ln C = \ln(C \cdot x) \Leftrightarrow \underline{z = Cx}.$$

Så må vi finne y :

$$y' = z \Leftrightarrow y = \int z dx = \int Cx dx = C \cdot \frac{1}{2}x^2 + C_2 = \underline{C_1x^2 + C_2}.$$

Finner konstantene:

$$y(1) = 0 \Leftrightarrow C_1 \cdot 1^2 + C_2 = 0 \Leftrightarrow C_2 = -C_1.$$

$$y = C_1x^2 + C_2 \Leftrightarrow y' = 2C_1x,$$

slik at

$$y'(1) = 2 \Leftrightarrow 2C_1 \cdot 1 = 2 \Leftrightarrow \underline{C_1 = 1}.$$

Da blir

$$C_2 = -C_1 = \underline{-1}.$$

Løsningen blir altså

$$\underline{\underline{y = x^2 - 1.}}$$

b) $y'' + y' = x + 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

Innfører

$$z = y' \Leftrightarrow z' = y''$$

og får

$$z' + z = x + 1.$$

Denne likningen er lineær. Finner først hjelpefunksjonen

$$F(x) = \int 1 dx = x$$

slik at z blir

$$z(x) = e^{-x} \left(\int (x+1)e^x dx + C_1 \right) = e^{-x} (xe^x + C_1) = \underline{x + C_1e^{-x}}.$$

Her er $\int xe^x dx$ løst med delvis integrasjon. Men nå må vi finne y :

$$y(x) = \int z(x) dx = \int (x + C_1e^{-x}) dx = \underline{\frac{1}{2}x^2 - C_1e^{-x} + C_2}.$$

Finner til slutt konstantene:

$$y'(0) = 1 \Leftrightarrow z(0) = 1 \Leftrightarrow 0 + C_1e^0 = 1 \Leftrightarrow C_1 = 1$$

$$y(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 0^2 - C_1 \cdot e^0 + C_2 = 0 \Leftrightarrow C_2 = C_1 = 1.$$

Da har vi løsningen

$$\underline{\underline{y(x) = \frac{1}{2}x^2 - e^{-x} + 1.}}$$

Oppgave 3.2.1

a) $y'' - 4y = 0 \Rightarrow y'' = 4y.$

Ved hjelp av kjerneregelen finner vi at

$$y_1(x) = e^{2x} \Rightarrow y_1'(x) = 2e^{2x} \Rightarrow y_1''(x) = 4e^{2x} = 4y_1(x)$$

og

$$y_2(x) = e^{-2x} \Rightarrow y_2'(x) = -2e^{-2x} \Rightarrow y_2''(x) = 4e^{-2x} = 4y_2(x).$$

Både $y_1(x) = e^{2x}$ og $y_2(x) = e^{-2x}$ er altså løsninger av likningen.

b) Den generelle løsningen av likningen er da

$$y(x) = \underline{\underline{C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}}}.$$

c) For å finne den løsningen som har starttilstand

$$y(0) = 2, y'(0) = 0,$$

må vi finne $y'(x)$:

$$y'(x) = C_1 \cdot 2e^{2x} + C_2 (-2e^{-2x}) = 2C_1 e^{2x} - 2C_2 e^{-2x}.$$

Setter inn:

$$y(0) = 2 \Leftrightarrow C_1 e^0 + C_2 e^0 = 2 \Leftrightarrow C_1 + C_2 = 2.$$

$$y'(0) = 0 \Leftrightarrow 2C_1 e^0 - 2C_2 e^0 = 0 \Leftrightarrow C_1 - C_2 = 0.$$

Legger sammen disse likningene, og får

$$2C_1 = 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{C_1 = 1}}.$$

$$C_1 - C_2 = 0 \Leftrightarrow C_2 = C_1 = 1.$$

Den spesielle løsningen som passer i den gitte starttilstanden er da

$$y(x) = \underline{\underline{e^{2x} + e^{-2x}}}.$$

Oppgave 3.2.2

a) $y'' + y' - 2y = 0$

Den karakteristiske likningen blir

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

Den generelle løsningen av differensiallikningen blir derfor

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} = \underline{\underline{C_1 e^x + C_2 e^{-2x}}}.$$

b) $y'' - 4y' + 3y = 0$

Den karakteristiske likningen blir

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

Den generelle løsningen av differensiallikningen blir derfor

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} = \underline{\underline{C_1 e^{3x} + C_2 e^x}}.$$

c) $y'' - 6y' + 9y = 0.$

Den karakteristiske likningen blir

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

$$\lambda = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 0}{2} = 3$$

Siden den karakteristiske likningen har to like røtter, blir den generelle løsningen av differensiallikningen

$$y(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} = \underline{\underline{C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} = (C_1 + C_2 x) e^{3x}}}.$$

d) $y'' + 2y' + 5y = 0.$

Den karakteristiske likningen blir

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$$

Vi får altså to kompleks konjugerte røtter på formen

$$\lambda = \alpha \pm i\beta.$$

Den generelle løsningen av differensiallikningen blir derfor

$$y(x) = e^{-\alpha x} (C_1 \sin(\beta x) + C_2 \cos(\beta x)) = \underline{\underline{e^{-x} (C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x))}}.$$

Løsningen kan også skrives på formen

$$y(x) = A e^{-\alpha x} \cos(\beta x + \varphi) = \underline{\underline{A e^{-x} \cos(2x + \varphi)}}.$$

Oppgave 3.2.3

a) $y'' - 3y' + 2y = 0,$ $y(0) = 6,$ $y'(0) = 0.$

Den karakteristiske likningen blir

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

Den generelle løsningen av likningen er da

$$y(x) = \underline{\underline{C_1 e^{2x} + C_2 e^x}}.$$

Må beregne $y'(x)$ for å kunne bruke startbetingelsene:

$$y'(x) = 2C_1 e^{2x} + C_2 e^x.$$

Setter inn startbetingelsene:

$$y(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0 = C_1 + C_2 = 6.$$

$$y'(0) = 2C_1 e^0 + C_2 e^0 = 2C_1 + C_2 = 0.$$

Trekker første likning fra den andre, og får

$$C_1 = -6.$$

Da blir

$$2C_1 + C_2 = 0 \Leftrightarrow C_2 = -2C_1 = -2(-6) = 12.$$

Løsningen er da

$$y(x) = \underline{\underline{-6e^{2x} + 12e^x}}.$$

b) $y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

Den karakteristiske likningen blir

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1}}{2} = \frac{-2 \pm 0}{2} = -1.$$

Siden det er to sammenfallende røtter, blir løsningen av differensiallikningen

$$y(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x}.$$

Må finne $y'(x)$ for å kunne bruke startbetingelsene:

$$\begin{aligned} y'(x) &= A(-e^{-x}) + B(1 \cdot e^{-x} + x \cdot e^{-x}(-1)) \\ &= -Ae^{-x} + Be^{-x} - Bxe^{-x} \end{aligned}$$

Benytter startbetingelsene:

$$y(0) = Ae^0 + B \cdot 0 \cdot e^0 = 1 \Leftrightarrow A = 1.$$

$$y'(0) = 2 \Leftrightarrow -Ae^0 + Be^0 - B \cdot 0 \cdot e^0 = 2 \Leftrightarrow -A + B = 2$$

Da er

$$B = 2 + A = 2 + 1 = 3.$$

Løsningen blir da

$$y(x) = \underline{\underline{e^{-x} + 3xe^{-x}}}.$$

c) $y'' + 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 0.$

Den karakteristiske likningen blir

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i$$

Den generelle løsningen av differensiallikningen kan derfor skrives på formen

$$y(x) = \underline{\underline{e^{-2x} (C_1 \sin x + C_2 \cos x)}}$$

eller på formen

$$y(x) = \underline{\underline{Ae^{-2x} \cos(x + \varphi)}}.$$

Ser først på formen

$$y(x) = e^{-2x} (C_1 \sin x + C_2 \cos x).$$

Da er

$$y'(x) = -2e^{-2x} (C_1 \sin x + C_2 \cos x) + e^{-2x} (C_1 \cos x - C_2 \sin x).$$

Benytter startbetingelsene:

$$y(0) = e^0 (C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0) = C_2 = 4.$$

$$\begin{aligned} y'(0) &= -2e^0 (C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0) + e^0 (C_1 \cos 0 - C_2 \sin 0) \\ &= -2C_2 + C_1 = 0 \end{aligned}$$

Av den siste likningen får vi

$$C_1 = 2C_2 = 2 \cdot 4 = 8.$$

Løsningen blir

$$y(x) = \underline{\underline{e^{-2x}(8\sin x + 4\cos x)}}.$$

Så var det formen

$$y(x) = Ae^{-2x} \cos(x + \varphi).$$

Finner $y'(x)$:

$$y'(x) = A(-2e^{-2x} \cos(x + \varphi) + e^{-2x}(-\sin(x + \varphi))).$$

Benytter startbetingelsene:

$$y(0) = Ae^0 \cos(0 + \varphi) = A \cos \varphi = 4$$

$$\begin{aligned} y'(0) &= A(-2e^0 \cos(0 + \varphi) + e^0(-\sin(0 + \varphi))) \\ &= A(-2\cos \varphi - \sin \varphi) = 0 \end{aligned}$$

Nå har jeg to likninger med A og φ som ukjente. For å løse likningssettet, starter jeg med å dele likningene på hverandre:

$$\begin{aligned} \frac{\cancel{A}(-2\cos \varphi - \sin \varphi)}{\cancel{A} \cos \varphi} &= \frac{0}{4} \\ \Leftrightarrow -\frac{2\cos \varphi}{\cos \varphi} - \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} &= 0 \\ \Leftrightarrow -2 - \tan \varphi &= 0 \\ \Leftrightarrow \underline{\tan \varphi = -2} \end{aligned}$$

Det er to mulige vinkler:

$$\varphi = -63.4^\circ$$

eller

$$\varphi = -63.4^\circ + 180^\circ = 116.6^\circ.$$

Av likningen

$$A \cos \varphi = 4 \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{4}{\cos \varphi}$$

ser vi at dersom $\varphi = 116.6^\circ$ blir A negativ. Det er derfor kun $\varphi = \underline{-63.4^\circ}$ som kan brukes. Da får vi

$$A \cos \varphi = 4 \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{4}{\cos \varphi} = \frac{4}{\cos(-63.4^\circ)} \approx \underline{8.93}.$$

Da har vi løsningen

$$y(x) = \underline{\underline{8.93e^{-2x} \cos(x - 63.4^\circ)}}.$$

Til slutt kan vi kontrollere at de to formene er ekvivalente. Dette gjøres slik:

$$\begin{aligned} 8.93e^{-2x} \cos(x - 63.4^\circ) &= e^{-2x} \cdot 8.93(\cos x \cdot \cos(-63.4^\circ) - \sin x \cdot \sin(-63.4^\circ)) \\ &= e^{-2x} \cdot 8.93(0.448 \cos x + 0.894 \sin x) \\ &= \underline{e^{-2x}(4.00 \cos x + 7.98 \sin x)} \end{aligned}$$

Når vi tar hensyn til avrundingsunøyaktigheter, ser vi at de to formene er ekvivalente.

Oppgave 3.3.1

$$y'' - 4y = 4x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$$

Setter

$$y_p(x) = -x \Leftrightarrow y_p'(x) = -1 \Leftrightarrow y_p''(x) = 0$$

inn i likningen

$$y'' - 4y = 4x$$

og får:

$$0 - 4(-x) = 4x$$

som åpenbart stemmer. Løsningen av den tilhørende homogene likningen finnes slik:

$$\lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2$$

slik at

$$y_h(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}.$$

Da er den generelle løsningen av likningen

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \underline{\underline{C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - x}}.$$

For å finne den løsningen som har starttilstand

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 0,$$

må vi finne $y'(x)$:

$$y'(x) = 2C_1 e^{2x} - 2C_2 e^{-2x} + 1.$$

Setter inn:

$$y(0) = 2 \Leftrightarrow C_1 e^0 + C_2 e^0 + 0 = 2 \Leftrightarrow C_1 + C_2 = 2.$$

$$y'(0) = 0 \Leftrightarrow 2C_1 e^0 - 2C_2 e^0 - 1 = 0 \Leftrightarrow 2C_1 - 2C_2 = 1.$$

Multipliserer første likning med 2 og legger sammen likningene, og får

$$4C_1 = 5 \Leftrightarrow \underline{\underline{C_1 = \frac{5}{4}}}.$$

$$C_1 + C_2 = 2 \Leftrightarrow C_2 = 2 - C_1 = 2 - \frac{5}{4} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}.$$

Den spesielle løsningen som passer i den gitte starttilstanden er da

$$y(x) = \underline{\underline{\frac{5}{4} e^{2x} + \frac{3}{4} e^{-2x} - x}}.$$

Oppgave 3.3.2

a) $y'' + 3y' + 2y = 4x + 2$

Løser først den tilhørende homogene differensiallikningen. Den karakteriske likningen er

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$$

Løsningen av den tilhørende homogene likningen er derfor

$$y_h(x) = \underline{\underline{C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}}}.$$

I denne oppgaven er

$$r(x) = 4x + 2.$$

Ingen av leddene i $r(x)$ inngår i $y_h(x)$. Prøver derfor en partikulær løsning av formen

$$y_p(x) = Ax + B \Leftrightarrow y_p'(x) = A \Leftrightarrow y_p''(x) = 0.$$

Setter inn i den gitte differensiallikningen:

$$y'' + 3y' + 2y = 4x + 2$$

$$0 + 3 \cdot A + 2(Ax + B) = 4x + 2$$

$$3A + 2Ax + 2B = 4x + 2$$

$$(2A - 4)x + (3A + 2B - 2) = 0$$

Dersom dette skal være oppfylt for alle x , må vi ha at

$$2A - 4 = 0 \Leftrightarrow 2A = 4 \Leftrightarrow A = 2$$

$$3A + 2B - 2 = 0 \Leftrightarrow 2B = 2 - 3A = 2 - 3 \cdot 2 = -4 \Leftrightarrow B = -2.$$

Den generelle løsningen av differensiallikningen er derfor

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \underline{\underline{C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + 2x - 2.}}$$

b) $y'' + 2y' + y = e^{-2x}.$

Løser først den tilhørende homogene differensiallikningen. Den karakteriske likningen er

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1}}{2} = \frac{-2 \pm 0}{2} = -1.$$

Løsningen av den tilhørende homogene likningen er derfor

$$y_h(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}.$$

I denne oppgaven er

$$r(x) = e^{-2x},$$

som ikke inngår i $y_h(x)$. Prøver derfor en partikulær løsning av formen

$$y_p(x) = A e^{-2x} \Leftrightarrow y_p'(x) = -2A e^{-2x} \Leftrightarrow y_p''(x) = 4A e^{-2x}.$$

Setter inn i den gitte differensiallikningen:

$$y'' + 2y' + y = e^{-2x}$$

$$4A e^{-2x} + 2 \cdot (-2A e^{-2x}) + A e^{-2x} = e^{-2x}$$

$$A e^{-2x} = e^{-2x} \Leftrightarrow \underline{A = 1}$$

Den generelle løsningen av differensiallikningen er derfor

$$y_h(x) = y_h(x) + y_p(x) = \underline{\underline{C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + e^{-2x} .}}$$

c) $y'' + 4y = \sin x$

Løser først den tilhørende homogene differensiallikningen. Den karakteriske likningen er

$$\lambda^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = -4 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2i.$$

Løsningen av den tilhørende homogene likningen er derfor

$$y_h(x) = C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x).$$

I denne oppgaven er

$$r(x) = \sin x,$$

som ikke inngår i $y_h(x)$. Prøver derfor en partikulær løsning av formen

$$y_p(x) = A \sin x + B \cos x$$

$$\Leftrightarrow y_p'(x) = A \cos x - B \sin x$$

$$\Leftrightarrow y_p''(x) = -A \sin x - B \cos x$$

Setter inn i den gitte differensiallikningen:

$$y'' + 4y = \sin x$$

$$(-A \sin x - B \cos x) + 4(A \sin x + B \cos x) = \sin x$$

$$(3A - 1) \sin x + 3B \cos x = 0$$

Dersom dette skal være oppfylt for alle x , må vi ha:

$$3A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{3}.$$

$$3B = 0 \Leftrightarrow B = 0.$$

Den generelle løsningen av differensiallikningen blir derfor

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \underline{\underline{C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x) + \frac{1}{3} \sin x}}.$$

d) $y'' - 4y = e^{-2x}.$

Løser først den tilhørende homogene differensiallikningen. Den karakteriske likningen er

$$\lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2.$$

Løsningen av den tilhørende homogene likningen er derfor

$$y_h(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}.$$

I denne oppgaven er

$$r(x) = e^{-2x},$$

som allerede inngår i $y_h(x)$. En partikulær løsning av formen

$$y_p(x) = A e^{-2x}$$

vil da ikke føre fram. Multipliserer da med x , og prøver en partikulær løsning av formen

$$y_p(x) = A x e^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow y_p'(x) = A(1 \cdot e^{-2x} + x(-2)e^{-2x}) = A(1 - 2x)e^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow y_p''(x) = A(-2e^{-2x} + (1 - 2x)(-2)e^{-2x}) = A(-4 + 4x)e^{-2x}$$

Setter inn i den gitte differensiallikningen:

$$y'' - 4y = e^{-2x}$$

$$A(-4 + 4x)e^{-2x} - 4(Ax e^{-2x}) = e^{-2x}$$

$$-4A + 4Ax - 4Ax = 1$$

$$-4A = 1 \Leftrightarrow A = -\frac{1}{4}$$

Den generelle løsningen av differensiallikningen blir derfor

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \underline{\underline{C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} - \frac{1}{4} x e^{-2x}}} = \underline{\underline{(C_1 - \frac{1}{4} x) e^{-2x} + C_2 e^{2x}}}.$$

Oppgave 3.3.3

a) $y'' + 2y' - 3y = 8e^{-x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

Løser først den tilhørende homogene differensiallikningen. Den karakteriske likningen er

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-3)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$$

Løsningen av den tilhørende homogene likningen er derfor

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}.$$

I denne oppgaven er

$$r(x) = 8e^{-x},$$

som ikke inngår i $y_h(x)$. Prøver derfor en partikulær løsning av formen

$$y_p(x) = Ae^{-x} \Leftrightarrow y_p'(x) = -Ae^{-x} \Leftrightarrow y_p''(x) = Ae^{-x}.$$

Setter inn i den gitte differensiallikningen:

$$y'' + 2y' - 3 = 8e^{-x}$$

$$Ae^{-x} + 2(-Ae^{-x}) - 3Ae^{-x} = 8e^{-x}$$

$$-4Ae^{-x} = 8e^{-x} \Leftrightarrow A = -2$$

Den generelle løsningen av differensiallikningen blir derfor

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \underline{C_1 e^x + C_2 e^{-3x} - 2e^{-x}}.$$

Må finne $y'(x)$ for å kunne benytte startbetingelsene:

$$y'(x) = C_1 e^x - 3C_2 e^{-3x} + 2e^{-x}.$$

Setter inn startbetingelsene:

$$y(0) = 1 \Leftrightarrow C_1 e^0 + C_2 e^0 - 2e^0 = 1 \Leftrightarrow C_1 + C_2 = 3$$

$$y'(0) = 1 \Leftrightarrow C_1 e^0 - 3C_2 e^0 + 2e^0 = 1 \Leftrightarrow C_1 - 3C_2 = -1$$

Trekker likningene fra hverandre, og får

$$4C_2 = 4 \Leftrightarrow C_2 = 1.$$

Da blir

$$C_1 + C_2 = 3 \Leftrightarrow C_1 = 3 - C_2 = 3 - 1 = 2.$$

Løsningen av initialverdiproblemet blir derfor

$$y(x) = \underline{2e^x + e^{-3x} - 2e^{-x}}.$$

b) $y'' + 9y = 18x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$

Løser først den tilhørende homogene differensiallikningen. Den karakteriske likningen er

$$\lambda^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = -9 \Leftrightarrow \lambda = \pm 3i.$$

Løsningen av den tilhørende homogene likningen er derfor

$$y_h(x) = C_1 \sin(3x) + C_2 \cos(3x).$$

I denne oppgaven er

$$r(x) = 18x,$$

som ikke inngår i $y_h(x)$. Prøver derfor en partikulær løsning av formen

$$y_p(x) = Ax + B \Leftrightarrow y_p'(x) = A \Leftrightarrow y_p''(x) = 0.$$

Setter inn i den gitte differensiallikningen:

$$y'' + 9y = 18x$$

$$0 + 9(Ax + B) = 18x$$

$$(9A - 18)x + 9B = 0$$

Dersom dette skal være oppfylt for alle x , må vi ha at

$$9A - 18 = 0 \Leftrightarrow A = 2$$

$$9B = 0 \Leftrightarrow B = 0.$$

Den generelle løsningen av differensiallikningen blir derfor

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \underline{C_1 \sin(3x) + C_2 \cos(3x) + 2x}.$$

Må finne $y'(x)$ for å kunne benytte startbetingelsene:

$$y'(x) = 3C_1 \cos(3x) - 3C_2 \sin(3x) + 2.$$

Setter inn startbetingelsene:

$$y(0) = 1 \Leftrightarrow C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 + 2 \cdot 0 = 1 \Leftrightarrow C_2 = 1$$

$$y'(0) = -1 \Leftrightarrow 3C_1 \cos 0 - 3C_2 \sin 0 + 2 = -1 \Leftrightarrow 3C_1 = -3 \Leftrightarrow C_1 = -1.$$

Løsningen av initialverdiproblemet blir derfor

$$y(x) = \underline{\underline{-\sin(3x) + \cos(3x) + 2x.}}$$

Oppgave 3.4.1

a) $y''' - 4y'' + 3y' = 6x$

Oppgave kan løses ved å innføre en ny variabel $z = y'$. Jeg skal imidlertid følge vanlig prosedyre. Den karakteristiske likningen blir

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = 0.$$

Her er enten $\lambda_1 = 0$ eller

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 3 \\ \lambda_3 = 1 \end{cases}$$

Løsningen av den homogene likningen blir derfor

$$y_h(x) = C_1 e^{0x} + C_2 e^{3x} + C_3 e^x = \underline{\underline{C_1 + C_2 e^{3x} + C_3 e^x.}}$$

Går på jakt etter en partikulær løsning av formen

$$y_p(x) = Ax + B \Rightarrow y_p'(x) = A \Rightarrow y_p''(x) = y_p'''(x) = 0.$$

Setter inn i likningen:

$$0 - 4 \cdot 0 + 3A = 6x$$

som umulig kan være oppfylt. Prøver da

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx \Rightarrow y_p'(x) = 2Ax + B \Rightarrow y_p''(x) = 2A \Rightarrow y_p'''(x) = 0.$$

Setter inn i likningen:

$$0 - 4 \cdot 2A + 3(2Ax + B) = 6x \Leftrightarrow -8A + 6Ax + 3B = 6x$$

$$\Leftrightarrow (6A - 6)x + (-8A + 3B) = 0$$

Dette er oppfylt for alle verdier av x kun dersom

$$6A - 6 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{A = 1}}$$

og

$$-8A + 3B = 0 \Leftrightarrow B = \frac{8}{3}A = \frac{8}{3}.$$

Den generelle løsningen av differensiallikningen blir da

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \underline{\underline{C_1 + C_2 e^{3x} + C_3 e^x + x^2 + \frac{8}{3}x.}}$$

b) $y''' + y'' + 3y' - 5y = e^{-2x}$

Den karakteristiske likningen blir

$$\lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda - 5 = 0.$$

Ser direkte at likningen har løsningen $\lambda_1 = 1$. Kan da ved å utføre en polynomdivisjon (detaljer er utelatt) vise at

$$\lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda - 5 = (\lambda^2 + 2\lambda + 5)(\lambda - 1).$$

Dette gir to nye løsninger:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = \underline{-1 \pm 2i}.$$

Disse to løsningene fører til at løsningen av den homogene likningen må inneholde leddene

$$e^{-x} (B_1 \cos(2x) + B_2 \sin(2x)).$$

Løsningen av den homogene likningen blir derfor

$$y_h(x) = C_1 e^x + e^{-x} (B_1 \cos(2x) + B_2 \sin(2x)).$$

Siden e^{-2x} ikke inngår i $y_h(x)$, er det godt håp om å finne en partikulær løsning av formen

$$\begin{aligned} y_p(x) &= Ae^{-2x} \Rightarrow y_p'(x) = -2Ae^{-2x} \Rightarrow y_p''(x) = 4Ae^{-2x} \\ &\Rightarrow y_p'''(x) = -8Ae^{-2x} \end{aligned}$$

Setter inn i likningen:

$$-8Ae^{-2x} + 4Ae^{-2x} + 3(-2Ae^{-2x}) - 5Ae^{-2x} = e^{-2x}.$$

Multipliserer med e^{2x} og ordner:

$$-8A + 4A - 6A - 5A = 1 \Leftrightarrow -15A = 1 \Leftrightarrow A = -\frac{1}{15}.$$

Den generelle løsningen av differensiallikningen blir da

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \underline{\underline{C_1 e^x + e^{-x} (B_1 \cos(2x) + B_2 \sin(2x)) - \frac{1}{15} e^{-2x}}}.$$

Oppgave 3.5.1

a)
$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + 3y_2 \\ y_2' &= 2y_1 + y_2 \end{aligned}$$

Jeg planlegger å løse ut y_1 fra den nederste likningen, som ikke inneholder y_1' . (Jeg kunne også løst ut y_2 fra den øverste likningen.) Da får jeg:

$$y_2' = 2y_1 + y_2 \Leftrightarrow y_1 = \frac{1}{2}y_2' - \frac{1}{2}y_2 \Leftrightarrow y_1' = \frac{1}{2}y_2'' - \frac{1}{2}y_2'.$$

Setter disse uttrykkene inn i den øverste likningen. Da får jeg:

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + 3y_2 \\ \frac{1}{2}y_2'' - \frac{1}{2}y_2' &= 2\left(\frac{1}{2}y_2' - \frac{1}{2}y_2\right) + 3y_2 = y_2' - y_2 + 3y_2 \\ \frac{1}{2}y_2'' - \frac{3}{2}y_2' - 2y_2 &= 0 \\ y_2'' - 3y_2' - 4y_2 &= 0 \end{aligned}$$

Den karakteristiske likningen blir

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-4)}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

Da blir

$$y_2(x) = \underline{\underline{C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x}}}.$$

Vi finner y_1 enklest ved å benytte at

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \frac{1}{2} y_2' - \frac{1}{2} y_2 \\ &= \frac{1}{2} (4C_1 e^{4x} - C_2 e^{-x}) - \frac{1}{2} (C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x}) \\ &= \underline{\underline{\frac{3}{2} C_1 e^{4x} - C_2 e^{-x}}} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 + y_2 & y_1(0) &= 11 \\ y_2' &= -2y_1 + y_2 & y_2(0) &= -7 \end{aligned}$$

Jeg planlegger å løse ut y_2 fra den øverste likningen, som ikke inneholder y_2' . Da får jeg:

$$y_1' = 4y_1 + y_2 \Leftrightarrow y_2 = y_1' - 4y_1 \Leftrightarrow y_2' = y_1'' - 4y_1'.$$

Setter disse uttrykkene inn i den nederste likningen. Da får jeg:

$$\begin{aligned} y_2' &= -2y_1 + y_2 \\ y_1'' - 4y_1' &= -2y_1 + (y_1' - 4y_1) \\ y_1'' - 5y_1' + 6y_1 &= 0 \end{aligned}$$

Den karakteristiske likningen blir

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

Da blir

$$y_1(x) = \underline{C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}}.$$

Vi finner y_2 enklest ved å benytte at

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1' - 4y_1 \\ &= (3C_1 e^{3x} + 2C_2 e^{2x}) - 4(C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}) \\ &= \underline{\underline{-C_1 e^{3x} - 2C_2 e^{2x}}} \end{aligned}$$

Finner til slutt C_1 og C_2 av startbetingelsene:

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 11 \Leftrightarrow C_1 e^0 + C_2 e^0 = 11 \Leftrightarrow C_1 + C_2 = 11 \\ y_2(0) &= -7 \Leftrightarrow -C_1 e^0 - 2C_2 e^0 = -7 \Leftrightarrow -C_1 - 2C_2 = -7 \end{aligned}$$

Legger sammen likningene, og får:

$$-C_2 = 4 \Leftrightarrow C_2 = \underline{\underline{-4}}.$$

Da blir

$$C_1 + C_2 = 11 \Leftrightarrow C_1 = 11 - C_2 = 11 - (-4) = \underline{\underline{15}}.$$

Løsningen blir derfor

$$\begin{aligned} y_1(x) &= C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} = \underline{\underline{15e^{3x} - 4e^{2x}}} \\ y_2(x) &= -C_1 e^{3x} - 2C_2 e^{2x} = \underline{\underline{-15e^{3x} + 8e^{2x}}} \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} y_1' &= -2y_1 + y_2 & y_1(0) &= 1 \\ y_2' &= 4y_1 + y_2 - e^x & y_2(0) &= 5 \end{aligned}$$

Starter med å løse ut y_2 av den øverste likningen, og derivere uttrykket for y_2 :

$$y_1' = -2y_1 + y_2 \Leftrightarrow y_2 = y_1' + 2y_1 \Rightarrow y_2' = y_1'' + 2y_1'.$$

Setter dette inn i den nederste likningen:

$$y_1'' + 2y_1' = 4y_1 + (y_1' + 2y_1) - e^x$$

$$y_1'' + y_1' - 6y_1 = -e^x$$

Den karakteristiske likningen blir

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-6)}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -3 \end{cases}$$

Løsningen av den homogene likningen blir da

$$y_{1,h} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}.$$

Søker en partikulær løsning av formen

$$y_{1,p} = Ae^x \Rightarrow y_{1,p}' = y_{1,p}'' = Ae^x.$$

Setter inn i differensiallikningen for y_1 :

$$Ae^x + Ae^x - 6Ae^x = -e^x.$$

Multipliserer med e^{-x} og ordner:

$$A + A - 6A = -1 \Leftrightarrow -4A = -1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{4}.$$

Dermed er

$$y_1(x) = y_{1,h}(x) + y_{1,p}(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{4} e^x.$$

Nå gjenstår det å finne $y_2(x)$. Benytter da enklest at

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1'(x) + 2y_1(x) = \left(2C_1 e^{2x} - 3C_2 e^{-3x} + \frac{1}{4} e^x\right) + 2\left(C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{4} e^x\right) \\ &= 4C_1 e^{2x} - C_2 e^{-3x} + \frac{3}{4} e^x \end{aligned}$$

Setter inn startbetingelsen:

$$y_1(0) = C_1 e^{2 \cdot 0} + C_2 e^{-3 \cdot 0} + \frac{1}{4} e^0 = C_1 + C_2 + \frac{1}{4} = 1.$$

$$y_2(0) = 4C_1 e^{2 \cdot 0} - C_2 e^{-3 \cdot 0} + \frac{3}{4} e^0 = 4C_1 - C_2 + \frac{3}{4} = 5.$$

Legger sammen disse likningene, og får

$$5C_1 + 1 = 6 \Leftrightarrow C_1 = \frac{1}{5}.$$

Fra den øverste likningen får vi nå

$$C_2 = 1 - C_1 - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}.$$

Da blir den spesielle løsningen

$$y_1(x) = 1 \cdot e^{2x} + \left(-\frac{1}{4}\right) e^{-3x} + \frac{1}{4} e^x = e^{2x} + \frac{1}{4} (e^x - e^{-3x}).$$

$$y_2(x) = 4 \cdot 1 e^{2x} - \left(-\frac{1}{4}\right) e^{-3x} + \frac{3}{4} e^x = 4e^{2x} + \frac{1}{4} (e^{-3x} + 3e^x).$$

$$\text{d) } \begin{aligned} y_1' &= 4y_1 + y_2 + e^x & y_1(0) &= 1 \\ y_2' &= 6y_1 - y_2 - e^x & y_2(0) &= 1 \end{aligned}$$

Jeg planlegger å løse ut y_2 fra den øverste likningen, som ikke inneholder y_2' . Da får jeg:

$$y_1' = 4y_1 + y_2 + e^x \Leftrightarrow y_2 = y_1' - 4y_1 - e^x \Leftrightarrow y_2' = y_1'' - 4y_1' - e^x.$$

Setter disse uttrykkene inn i den nederste likningen. Da får jeg:

$$y_2' = 6y_1 - y_2 - e^x$$

$$y_1'' - 4y_1' - e^x = 6y_1 - (y_1' - 4y_1 - e^x) - e^x$$

$$y_1'' - 3y_1' - 10y_1 = e^x$$

Den karakteristiske likningen blir

$$\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-10)}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2} = \begin{cases} 5 \\ -2 \end{cases}$$

Da blir løsningen av den tilhørende homogene likningen

$$y_{1h}(x) = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-2x}.$$

Må finne en partikulær løsning, og prøver

$$y_{1p}(x) = Ae^x \Leftrightarrow y_{1p}'(x) = Ae^x \Leftrightarrow y_{1p}''(x) = Ae^x.$$

Setter inn i andregradslikningen for y_1 :

$$Ae^x - 3Ae^x - 10Ae^x = e^x \Leftrightarrow A - 3A - 10A = 1 \Leftrightarrow -12A = 1 \Leftrightarrow A = -\frac{1}{12}.$$

Da blir

$$y_1(x) = y_{1h}(x) + y_{1p}(x) = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{12} e^x.$$

Vi finner y_2 enklest ved å benytte at

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1' - 4y_1 - e^x \\ &= (5C_1 e^{5x} - 2C_2 e^{-2x} - \frac{1}{12} e^x) - 4(C_1 e^{5x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{12} e^x) - e^x \\ &= C_1 e^{5x} - 6C_2 e^{-2x} - \frac{3}{4} e^x \end{aligned}$$

Finner til slutt C_1 og C_2 av startbetingelsene:

$$\begin{aligned} y_1(0) = 1 &\Leftrightarrow C_1 e^0 + C_2 e^0 - \frac{1}{12} e^0 = 1 \Leftrightarrow C_1 + C_2 = \frac{13}{12} \\ y_2(0) = 1 &\Leftrightarrow C_1 e^0 - 6C_2 e^0 - \frac{3}{4} e^0 = 1 \Leftrightarrow C_1 - 6C_2 = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

Trekker likningene fra hverandre, og får:

$$7C_2 = \frac{13}{12} - \frac{7}{4} = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow C_2 = -\frac{2}{21}.$$

Da blir

$$C_1 + C_2 = \frac{13}{12} \Leftrightarrow C_1 = \frac{13}{12} - C_2 = \frac{13}{12} - \left(-\frac{2}{21}\right) = \frac{33}{28}.$$

Løsningen blir derfor

$$\begin{aligned} y_1(x) &= C_1 e^{5x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{12} e^x = \frac{33}{28} e^{5x} - \frac{2}{21} e^{-2x} - \frac{1}{12} e^x. \\ y_2(x) &= C_1 e^{5x} - 6C_2 e^{-2x} - \frac{3}{4} e^x = \frac{33}{28} e^{5x} + \frac{12}{21} e^{-2x} - \frac{3}{4} e^x. \end{aligned}$$