

Bjørn Davidsen

MATEMATIKK
FOR
INGENIØRER
Forkunnskaper

Innhold

FORORD	3
1. GRUNNLEGGENDE ALGEBRA.	4
1.1. GRUNNREGLENE	4
1.2. PRIORITERINGS-REKKEFØLGEN	6
1.3. KVADRATSETNINGENE	6
1.4. FAKTORISERING	7
2. BRØKREGNING.	9
2.1. FORKORTING AV BRØKER	9
2.2. SAMMENTREKKING AV BRØKER	10
2.3. BRUDNE BRØKER	11
3. LIKNINGER OG ULIKHETER.	14
3.1. ENKLE FØRSTEGRADSLIKNINGER	14
3.2. ANDREGRADSLIKNINGER	16
3.3. MER FAKTORISERING	17
3.4. SYSTEM AV TO FØRSTEGRADSLIKNINGER	19
3.5. SYSTEM AV HØYERE ORDENS LIKNINGER	20
3.6. ULIKHETER	22
4. LITT MATEMATISK LOGIKK OG MENGDELÆRE.	25
4.1. MATEMATISK LOGIKK	25
4.1.1. Utsagn	25
4.1.2. Negasjon, konjunksjon og disjunksjon	26
4.1.3. Implikasjon og ekvivalens	28
4.1.4. deMorgans lover	29
4.1.5. Mer om matematisk logikk	29
4.2. MENGDELÆRE	30
4.2.1. Grunnleggende definisjoner	30
4.2.2. Sammensatte mengder	32
4.2.3. Venn-diagram	34
4.2.4. Antall elementer i mengder	36
4.3. INDUKSJONSBEVIS	37
5. POLYNOMDIVISJON.	43
5.1. DIVISJONSTEKNIKKEN	43
5.2. MER FAKTORISERING	45
6. DELBRØKKOPPSPALTING.	48
6.1. FAKTORISERING AV NEVNEREN	48
6.2. FORSKJELLIGE FØRSTEGRADSFAKTORER I NEVNEREN	49
6.3. FLERE LIKE FØRSTEGRADSFAKTORER I NEVNEREN	51
6.4. "TILDEKKINGSMETODEN"	51
6.5. ANDREGRADSFAKTORER I NEVNEREN	53
6.6. FLERE LIKE ANDREGRADSFAKTORER I NEVNEREN	54

7. POTENS- OG ROTREGNING.	56
7.1. GRUNNLEGGENDE DEFINISJONER OG REGNEREGLER FOR POTENSREGNING.	56
7.2. NEGATIVE EKSPONENTER.	58
7.3. ROTREGNING.	59
7.4. FRA ROTREGNING TIL POTENSREGNING.	61
7.5. MER OM KVADRATRØTTER.	62
8. LOGARITMER.	66
8.1. GRUNNLEGGENDE DEFINISJONER.	66
8.2. REGNEREGLER FOR LOGARITMER.	67
8.3. OMREGNING MELLOM LOGARITMESYSTEM.	69
9. GRUNNLEGGENDE TRIGONOMETRI.	70
9.1. TRIGONOMETRISKE DEFINISJONER FOR EN RETTVINKLET TREKANT.	70
9.2. SAMMENHENGER MELLOM SINUS, COSINUS OG TANGENS.	72
9.3. NOEN SPESIELLE VINKLER.	74
9.4. GENERELLE DEFINISJONER AV DE TRIGONOMETRISKE FUNKSJONENE.	75
9.5. INVERSE TRIGONOMETRISKE FUNKSJONER.	76
9.6. TREKANTBEREGNING.	77
10. VEKTORER.	81
10.1. DEFINISJONER.	81
10.2. MULTIPLIKASJON AV VEKTOR MED SKALAR.	81
10.3. ADDISJON OG SUBTRAKSJON AV VEKTORER.	81
10.4. DEKOMPONERING AV VEKTORER.	83
10.5. ENHETSVEKTORER.	83
10.6. SKALARPRODUKTET.	85
10.7. VEKTORPRODUKTET.	87
11. TILLEGG.	90
4.4. MER OM MATEMATISK LOGIKK.	90
4.4.1. Logiske strukturer og sannhetsverditabeller.	90
4.4.2. Mer om implikasjon og ekvivalens.	91
4.4.3. Logisk algebra.	94
4.5. BEVISTEKNIKK.	95
4.5.1. Direkte bevis.	95
4.5.2. Bevis ved moteksempel.	97
4.5.3. Kontrapositivt bevis.	98
4.5.4. Bevis ved selvmotsigelse.	99
4.6. DIGITAL ELEKTRONIKK.	100
4.7. EDB-PROGRAMMERING.	101
4.8. MENGDEALGEBRA.	102
4.9. MER OM LØSING AV LIKNINGER.	104
8.1. TALLENE.	108
9.6. SETNINGER FOR TREKANTBEREGNINGER.	109
12. OPPGAVER.	111
12.1. SMÅOPPGAVER FRA TEKSTEN.	111
12.2. LØSNINGER PÅ SMÅOPPGAVER.	127

Forord

Kjære student!

I en idell verden ville alle ingeniørstudenter hatt et solid grunnlag i matematikk før de begynte på sitt ingeniørstudium. En del lærebøker og studieopplegg forutsetter en slik ideell verden. Men i virkelighetens verden er det ikke slik. Mange av de håpefulle studentene som begynner på sitt ingeniørstudium, er svært usikre i matematikk.

Dette heftet tar sikte på å hjelpe deg når du vil forsikre seg om at du har de nødvendige forkunnskaper i matematikk. Det er ikke nødvendig å jobbe seg gjennom heftet fra første til siste side i ett strekk. Det kan være bedre å gå gjennom de kapitlene som er mest aktuelle til enhver tid.

De tre første kapitlene omhandler grunnleggende regneteknikk (algebra, brøkgregning, løsning av likninger og ulikheter). Dette er stoff som alle bør beherske rimelig bra. Selv om du synes at dette er greit stoff, vil jeg anbefale at du skummer gjennom det og forsikrer deg om at du behersker stoffet ved å løse noen av oppgavene.

Deretter følger en liten innføring i matematisk logikk og mengdelære. I hovedkapitlet har jeg stort sett begrenset meg til å definere terminologi og symbolbruk, siden dette brukes i all videre matematikk. Dessuten har jeg sett på *induksjonsbeviset*, som mange studenter synes er temmelig ullent. Jeg har også laget et lite tillegg der jeg går litt dypere inn i logikk og mengdelære.

De to neste kapitlene om polynomdivisjon og delbrøkoppspalting kan du trygt vente med til du får bruk for disse teknikkene.

Deretter følger to kapitler om potens- og rotregning og om logaritmer. Jeg vil anbefale at du leser gjennom disse kapitlene, blant annet fordi dette stoffet også benyttes i andre fag.

Trigonometri og vektorregning benyttes også i andre fag, ikke minst i fysikk. Du trenger også et grunnlag i trigonometri før du går løs på trigonometriske funksjoner.

Jeg håper at dette heftet vil hjelpe deg til å få en god start på ditt ingeniørstudium.

Bjørn Davidsen

1. Grunnleggende algebra.

1.1. Grunnreglene.

Algebraen danner grunnlaget for all matematikk. Det er derfor meget viktig at du behersker disse grunnleggende reglene.

Først et par (litt upresise) definisjoner:

- Et **ledd** atskilles fra andre ledd med pluss eller minus.
- En **faktor** atskilles fra andre faktorer med et gangetegn.

Eksempel 1.1.1: Hvilke ledd og faktorer finner du i uttrykket $xy - (x - y)(x^2 + 6y)$?

Løsning: Uttrykket består av to **ledd**, xy og $(x - y)(x^2 + 6y)$.

- Leddet xy består av to **faktorer**, x og y .
- Leddet $(x - y)(x^2 + 6y)$ består av to **faktorer**, $(x - y)$ og $(x^2 + 6y)$.

Faktoren $(x - y)$ er bygd opp av to **ledd**, x og y .

Faktoren $(x^2 + 6y)$ er bygd opp av to **ledd** som igjen er bygd opp av **faktorer** slik:

- x^2 består av faktorene x og x .
- $6y$ består av faktorene 2, 3 og y .

De viktigste regnereglene er:

$$\begin{aligned}a + b &= b + a \\(a + b) + c &= a + (b + c) \\a \cdot b &= b \cdot a \\(a \cdot b) \cdot c &= a \cdot (b \cdot c) \\a(b + c) &= a \cdot b + a \cdot c\end{aligned}$$

Dessuten kan du trekke sammen like ledd: $a + a = 2a$.

Til slutt tar vi med grunnreglene for regning med negative tall:

$$\begin{aligned}(-1) \cdot (-1) &= +1 \\-(a + b) &= -a - b\end{aligned}$$

Legg merke til den siste regelen: Når du oppløser en parentes med minus foran, må du skifte fortegn på *alle* leddene inni parentesen.

Det er vanlig å sløyfe multiplikasjonstegnet når dette kan gjøres uten at det oppstår misforståelser.

Et par eksempler på bruken av disse reglene:

Eksempel 1.1.2: Multipliser sammen uttrykkene nedenfor, og skriv svaret så enkelt som mulig:

a) $(2x - y)(x - 3y)$

b) $(2a - b)(a + b - 3)$

Løsning:

$$\begin{aligned} \text{a) } (2x - y)(x - 3y) &= 2x(x - 3y) - y(x - 3y) \\ &= 2x^2 - 6xy - xy + 3y^2 \\ &= \underline{\underline{2x^2 - 7xy + 3y^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (2a - b)(a + b - 3) &= 2a(a + b - 3) - b(a + b - 3) \\ &= 2a^2 + 2ab - 6a - ab - b^2 + 3b \\ &= \underline{\underline{2a^2 - 6a + ab - b^2 + 3b}} \end{aligned}$$

Jeg vil anbefale at du setter et lite merke ved leddene etter hvert som du trekker sammen. Da kan du til slutt kontrollere at du har fått med deg alle leddene.

Når du har flere parenteser inni hverandre, lønner det seg vanligvis å oppløse parentesene innenfra, og trekke sammen etter hvert. Dette illustreres i eksemplet nedenfor:

Eksempel 1.1.3: Skriv uttrykket nedenfor enklere:

$$2a - (b - (a - (2b - a))).$$

Løsning:

$$\begin{aligned} 2a - (b - (a - (2b - a))) &= 2a - (b - (a - 2b + a)) \\ &= 2a - (b - (2a - 2b)) \\ &= 2a - (b - 2a + 2b) \\ &= 2a - b + 2a - 2b \\ &= \underline{\underline{4a - 3b}} \end{aligned}$$

Oppgave 1.1.1.

1.2. Prioriterings-rekkefølgen.

La oss se nærmere på uttrykket

$$3 \cdot 5^2 + 4.$$

Når du regner ut dette uttrykket, starter du med å regne ut potensuttrykket 5^2 og får 25. Dette tallet multipliserer du med 3 og får 75. Til slutt legger du til 4 og får 79.

Vi har altså en fast *prioriteringsrekkefølge* for slike operasjoner:

1. Først beregnes alle potensuttrykk.
2. Deretter beregnes multiplikasjoner og divisjoner.
3. Til slutt utføres alle addisjoner og subtraksjoner.

Når flere operasjoner med lik prioritet skal utføres, regner vi fra venstre mot høyre. Dersom vi ønsker å endre denne rekkefølgen, må vi bruke parenteser.

Her er noen eksempler på situasjoner der det er lett å gjøre feil:

- Når du skriver -3^2 , betyr det at du først opphøyer 3^2 og får 9. Deretter skifter du fortegn og får -9 . Dersom du mener at -3 skal opphøyes i andre (d.v.s. ganges med seg selv), må du skrive $(-3)^2$ og får 9.

- Når du ganger ut uttrykket $3(x-1)(x+2)$, må du være klar over at 3-tallet kun kan ganges inn i den ene parentesen, for eksempel slik:

$$3(x-1)(x+2) = (3x-3)(x+2) = 3x^2 + 6x - 3x - 6 = 3x^2 + 3x - 6.$$

Eller slik:

$$3(x-1)(x+2) = (x-1)(3x+6) = 3x^2 + 6x - 3x - 6 = 3x^2 + 3x - 6.$$

- Det er fort gjort å gjøre feil når du skal forenkle uttrykk av formen $2(x - \frac{1}{2})^2$. Du kan **ikke** gange inn 2-tallet og få $(2x-1)^2$. Grunnen er at $2(x - \frac{1}{2})^2 = 2(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})$, og 2-tallet kan kun ganges med den ene av parentesene. Riktig svar skal være

$$2(x - \frac{1}{2})^2 = 2(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2) = 2(x^2 - x + \frac{1}{4}) = \underline{\underline{2x^2 - 2x + \frac{1}{2}}}.$$

Oppgave 1.2.1.

1.3. Kvadratsetningene.

På grunnlag av reglene ovenfor kan vi utlede flere setninger. De viktigste er *kvadratsetningene*:

$$\begin{aligned}(a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2 && (1. \text{ og } 2. \text{ kvadratsetning}) \\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 && (3. \text{ kvadratsetning})\end{aligned}$$

Disse reglene viser seg å være viktige når vi kommer til *faktorisering*.

Eksempel 1.3.1: Regn ut uttrykkene nedenfor ved hjelp av kvadratsetningene:

a) $(3x - y^2)^2$.

b) $(2x - y)^2 - (x - 2y)^2$

Løsning:

a) $(3x - y^2)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot y^2 + (y^2)^2 = \underline{9x^2 - 6xy^2 + y^4}$.

b) $(2x - y)^2 - (x - 2y)^2 = ((2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot y + y^2) - (x^2 - 2 \cdot x \cdot 2y + (2y)^2)$
 $= 4x^2 - 4xy + y^2 - x^2 + 4xy - 4y^2 = \underline{3x^2 - 3y^2}$

Alternativ: Vi kan også benytte 3. kvadratsetning:

$$(2x - y)^2 - (x - 2y)^2 = ((2x - y) + (x - 2y))((2x - y) - (x - 2y))$$
$$= (3x - 3y)(x + y) = 3(x - y)(x + y) = \underline{3(x^2 - y^2)}$$

Oppgave 1.3.1.

1.4. Faktorisering.

Å **faktorisere** et uttrykk er nærmest det motsatte av å trekke sammen ledd i et uttrykk. Du kan faktorisere bl.a. ved å:

- 1) Sette felles faktor utenfor parentes.
- 2) Bruke en kvadratsetning.

Vi skal senere se på flere verktøy for faktorisering.

Som regel lønner det seg å starte med å se etter felles faktorer som kan settes utenfor parentes. Når du ikke finner flere slike felles faktorer, undersøker du om en av kvadratsetningene kan brukes. Eksempelene nedenfor viser framgangsmåten.

Eksempel 1.4.1: Faktoriser uttrykkene nedenfor:

a) $6a^2b - 12ab^2 + 6b^3$.

b) $4x^3y - 9xy^3$.

Løsning:

a) $6a^2b - 12ab^2 + 6b^3 = 6b(a^2 - 2ab + b^2) = \underline{6b(a - b)^2}$.

b) $4x^3y - 9xy^3 = xy(4x^2 - 9y^2) = xy((2x)^2 - (3y)^2) = \underline{xy(2x - 3y)(2x + 3y)}$.

Det kan være vanskelig å avgjøre om et tre-leddet uttrykk kan faktorerises med 1. (eller 2.) kvadratsetning. Dersom et tre-leddet uttrykk kan faktorerises, må disse kravene være oppfylt:

1. To av leddene må være kvadrater. Skriv ned kvadratrota av disse to leddene.
2. Det tredje leddet må være 2 ganger produktet av disse kvadratrøttene.

Dette kan virke komplisert, så la oss se på et eksempel:

Eksempel 1.4.2: Faktoriser (om mulig)

$$9x^2 + 30xy + 25y^2.$$

Løsning: Det er ingen felles faktorer som kan settes utenfor parentes. Men første og siste ledd er kvadratledd:

$$9x^2 = (3x)^2$$

og

$$25y^2 = (5y)^2.$$

Det midterste leddet kan skrives

$$30xy = 2 \cdot 3x \cdot 5y,$$

slik at du kan bruke 1. kvadratsetning:

$$9x^2 + 30xy + 25y^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 5y + (5y)^2 = \underline{\underline{(3x + 5y)^2}}.$$

Oppgave 1.4.1.

En gang i blant må du bruke mer fantasi for å få til faktoriseringen:

Eksempel 1.4.3: Faktoriser (om mulig)

$$2ax - 6ay + bx - 3by.$$

Løsning: Det er ingen faktorer som er felles for alle leddene. Men vi merker oss at de to første leddene har $2a$ som felles faktor, mens de to siste leddene har b som felles faktor. Da kan du omforme slik:

$$2ax - 6ay + bx - 3by = 2a(x - 3y) + b(x - 3y)$$

Men nå har du fått et to-leddet uttrykk med $(x - 3y)$ som felles faktor. Denne kan settes utenfor parentes, slik at du får:

$$2ax - 6ay + bx - 3by = 2a(x - 3y) + b(x - 3y) = \underline{\underline{(x - 3y)(2a + b)}}.$$

Du får samme resultat dersom du slår sammen 1. og 3. ledd til

$$2ax + bx = x(2a + b),$$

og 2. og 4. ledd til

$$-6ay - 3by = -3y(2a + b).$$

Da blir $(2a + b)$ felles faktor. Gjennomfør regningene selv!

Oppgave 1.4.2.

2. Brøkgregning.

2.1. Forkorting av brøker.

Det er svært få ting du kan gjøre med en brøk. Det er imidlertid et viktig unntak:

Du kan **multiplisere eller dividere både teller og nevner i en brøk med samme tall**.

Merk at du ikke kan multiplisere eller dividere med null.

Disse enkle operasjonene er utgangspunktet for **forkorting av brøker**. Prinsippet er at dersom både teller og nevner har en felles faktor, kan teller og nevner divideres med denne faktoren. Vi sier at faktoren **forkortes bort**. Før du kan forkorte, må du derfor faktorisere både teller og nevner, og se om det er noen faktorer som fins i både teller og nevner. Slike faktorer kan da forkortes bort.

Merk at det kun er felles **faktorer** i teller og nevner som kan forkortes bort. I brøker av typen

$$\frac{3x-1}{3(x+2)}$$

kan du således *ikke* forkorte bort 3-tallet, fordi 3-tallet er *ikke* felles faktor for alle leddene i teller.

Eksempelene nedenfor viser framgangsmåten:

Eksempel 2.1.1: Forkort (om mulig) brøkene nedenfor:

a) $\frac{2ab^2}{4ab-2a}$.

b) $\frac{xy-3x^2}{y^2-9x^2}$.

c) $\frac{3x^2-12xy+12y^2}{x^3-4xy^2}$

Løsning:

a) $\frac{2ab^2}{4ab-2a} = \frac{\cancel{2a}b^2}{\cancel{2a}(2b-1)} = \frac{b^2}{2b-1}$.

b) $\frac{xy-3x^2}{y^2-9x^2} = \frac{x(\cancel{y-3x})}{(y+3x)(\cancel{y-3x})} = \frac{x}{y+3x}$.

c) $\frac{3x^2-12xy+12y^2}{x^3-4xy^2} = \frac{3(x^2-4xy+4y^2)}{x(x^2-4y^2)} = \frac{3(\cancel{x-2y})(x-2y)}{x(\cancel{x-2y})(x+2y)} = \frac{3(x-2y)}{x(x+2y)}$.

Oppgave 2.1.1.

2.2. Sammentrekking av brøker.

Når du skal **trekke sammen** brøker, må du først skaffe deg en **fellesnevner**, som er produktet av alle faktorer som inngår i en eller flere av nevnerne. Du må derfor starte med å faktorisere alle nevnerne. For hver brøk multipliseres deretter teller og nevner med de faktorene fra fellesnevneren som *ikke* inngår i brøkens nevner. Deretter settes alt opp på en brøkstrek (husk at minus foran en brøk behandles som minus foran en parentes), og telleren trekkes sammen. Om mulig forkortes den brøken som vi kommer fram til. Se eksemplene nedenfor.

Eksempel 2.2.1: Trekk sammen brøkene nedenfor:

a) $\frac{x}{x^2 - 4} - \frac{1}{2x + 4}$

b) $\frac{x-2}{x+1} - 2 + \frac{3}{x}$

c) $\frac{3}{2x-6} - \frac{x-2}{x^2-3x} - \frac{6}{x^3-9x}$

Løsning:

a) Faktoriserer:

$$x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$$

$$2x + 4 = 2(x+2)$$

Fellesnevner:

$$2(x+2)(x-2).$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2-4} - \frac{1}{2x+4} &= \frac{x}{(x+2)(x-2)} \cdot \frac{2}{2} - \frac{1}{2(x+2)} \cdot \frac{x-2}{x-2} = \frac{x \cdot 2 - 1 \cdot (x-2)}{2(x+2)(x-2)} \\ &= \frac{2x - x + 2}{2(x+2)(x-2)} = \frac{\cancel{x+2}}{2(\cancel{x+2})(x-2)} = \frac{1}{2(x-2)} \end{aligned}$$

b) Her oppfatter vi 2-tallet som $\frac{2}{1}$, slik at vi har nevnerfaktorene $x+1$, 1, og x . Da blir fellesnevneren

$$(x+1)x,$$

slik at vi får:

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{x+1} - 2 + \frac{3}{x} &= \frac{x-2}{x+1} \cdot \frac{x}{x} - \frac{2}{1} \cdot \frac{(x+1)x}{(x+1)x} + \frac{3}{x} \cdot \frac{(x+1)}{(x+1)} \\ &= \frac{(x^2 - 2x) - 2(x^2 + x) + (3x + 3)}{(x+1)x} \\ &= \frac{x^2 - 2x - 2x^2 - 2x + 3x + 3}{x(x+1)} = \frac{-x^2 - x + 3}{x(x+1)} \end{aligned}$$

c) Faktoriserer:

$$2x - 6 = 2(x-3)$$

$$x^2 - 3x = x(x-3)$$

$$x^3 - 9x = x(x^2 - 3^2) = x(x+3)(x-3)$$

Fellesnevner:

$$\begin{aligned}
 & 2x(x+3)(x-3) \cdot \\
 & \frac{3}{2x-6} - \frac{x-2}{x^2-3x} - \frac{6}{x^3-9x} = \frac{3}{2(x-3)} \cdot \frac{x(x+3)}{x(x+3)} - \frac{x-2}{x(x-3)} \cdot \frac{2(x+3)}{2(x+3)} - \frac{6}{x(x+3)(x-3)} \cdot \frac{2}{2} \\
 & = \frac{(3x^2+9x) - 2(x-2)(x+3) - 12}{2x(x+3)(x-3)} \\
 & = \frac{3x^2+9x-2x^2-6x+4x+12-12}{2x(x+3)(x-3)} \\
 & = \frac{x^2+7x}{2x(x+3)(x-3)} = \frac{\cancel{x}(x+7)}{2\cancel{x}(x+3)(x-3)} \\
 & = \frac{x+7}{2(x+3)(x-3)}
 \end{aligned}$$

Oppgave 2.2.1.

Noen ganger har vi bruk for å gå den motsatte veien: splitte opp en brøk der nevneren er et produkt av faktorer til en sum av brøker der nevnerne er enklest mulig. Denne prosessen kalles delbrøkoppspalting, og blir behandlet i et senere kapittel.

2.3. Brudne brøker.

En *brudden brøk* er en brøk der teller og/eller nevner selv er brøker. Nevnerne i disse "småbrøkene" kalles gjerne "smånevnerne". Slike brøker forenkles ved å multiplisere teller og nevner i hovedbrøken med "smånevnerne" (eller med fellesnevneren for "småbrøkene").

Noen ganger kan det lønne seg å sette teller og/eller nevner som inneholder "smånevnerne" opp på en brøkstrekk før du multipliserer med fellesnevneren. I eksemplene nedenfor er begge metodene benyttet.

Eksempel 2.3.1: Skriv de brudne brøkene nedenfor som en vanlig brøk:

- a) $\frac{2 + \frac{1}{x-1}}{x+1}$.
- b) $\frac{2 - \frac{1}{x}}{\frac{x}{x-1}}$.
- c) $\frac{\frac{3}{x+1} - 1}{2 - \frac{1}{x-1}}$.

Løsning:

a) Fellesnevner for "smånevnerne" er bare $x-1$. Vi kan da regne direkte slik:

$$\frac{2 + \frac{1}{x-1}}{x+1} = \frac{(2 + \frac{1}{x-1})(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{2(x-1) + \frac{1}{\cancel{x-1}}(\cancel{x-1})}{x^2-1} = \frac{2x-2+1}{x^2-1} = \frac{2x-1}{x^2-1}.$$

Eller vi kan gjøre om den opprinnelige telleren til en brudden brøk først:

$$\frac{2 + \frac{1}{x-1}}{x+1} = \frac{2 \cdot \frac{x-1}{x-1} + \frac{1}{x-1}}{x+1} = \frac{\frac{2x-2+1}{x-1} \cdot \cancel{(x-1)}}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x-1}{x^2-1}.$$

b) Fellesnevner for "smånevnerne" er $x(x-1)$. Vi kan da regne direkte slik:

$$\begin{aligned} \frac{2 - \frac{1}{x}}{\frac{x}{x-1}} &= \frac{(2 - \frac{1}{x}) \cdot x(x-1)}{\frac{x}{x-1} \cdot x \cancel{(x-1)}} = \frac{2 \cdot x(x-1) - \frac{1}{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{(x-1)}}{x^2} \\ &= \frac{2x^2 - 2x - x + 1}{x^2} = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2} \end{aligned}$$

Eller vi kan gjøre om den opprinnelige telleren til en brudde brøk først:

$$\begin{aligned} \frac{2 - \frac{1}{x}}{\frac{x}{x-1}} &= \frac{2 \cdot \frac{x}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{x}{x-1}} = \frac{(\frac{2x-1}{x}) \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{(x-1)}}{\frac{x}{x-1} \cdot x \cancel{(x-1)}} = \frac{(2x-1)(x-1)}{x^2} \\ &= \frac{2x^2 - 2x - x + 1}{x^2} = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2} \end{aligned}$$

c) Fellesnevner for "smånevnerne" er $(x+1)(x-1)$. Dersom vi regner direkte, får vi:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{3}{x+1} - 1}{2 - \frac{1}{x-1}} &= \frac{(\frac{3}{x+1} - 1)(x+1)(x-1)}{(2 - \frac{1}{x-1})(x+1)(x-1)} = \frac{\frac{3}{x+1} \cancel{(x+1)} (x-1) - 1 \cdot (x^2 - 1)}{2(x^2 - 1) - \frac{1}{x-1} (x+1) \cancel{(x-1)}} = \frac{3(x-1) - x^2 + 1}{2x^2 - 2 - (x+1)} \\ &= \frac{3x - 3 - x^2 + 1}{2x^2 - 2 - x - 1} = \frac{-x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x - 3} \end{aligned}$$

Dersom vi først skriver både teller og nevner som rene brudne brøker, får vi:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{3}{x+1} - 1}{2 - \frac{1}{x-1}} &= \frac{\frac{3}{x+1} - \frac{x+1}{x+1}}{2 \cdot \frac{x-1}{x-1} - \frac{1}{x-1}} = \frac{\frac{2-x}{x+1} \cdot \cancel{(x+1)} (x-1)}{\frac{2x-2-1}{x-1} \cdot (x+1) \cancel{(x-1)}} = \frac{(2-x)(x-1)}{(2x-3)(x+1)} \\ &= \frac{2x - 2 - x^2 + x}{2x^2 + 2x - 3x - 3} = \frac{-x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x - 3} \end{aligned}$$

Vær nøye med hva som er hovedbrøkstrek, og hva som er "småbrøk-strek"! Eksemplet nedenfor viser hva som skjer dersom du roter med hva som er hovedbrøkstrek:

Eksempel 2.3.2: Vis at den brudne brøken

$$\frac{\frac{x+2}{x+1}}{x-1}$$

kan oppfattes på to forskjellige måter, og vis at de to tolkingene fører til ulike uttrykk når brøken omformes til en vanlig brøk.

Løsning: Dersom uttrykket oppfattes som

$$\frac{\frac{x+2}{x+1}}{x-1},$$

skal teller og nevner multipliseres med $x+1$. Da får du:

$$\frac{\frac{x+2}{x+1}}{x-1} = \frac{\frac{x+2}{\cancel{x+1}}}{x-1} \cdot \frac{\cancel{(x+1)}}{(x+1)} = \frac{x+2}{\underline{\underline{x^2-1}}}.$$

Men dersom uttrykket oppfattes som

$$\frac{x+2}{\frac{x+1}{x-1}},$$

må teller og nevner multipliseres med $x-1$. Da får du:

$$\frac{x+2}{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{x+2}{\frac{x+1}{\cancel{x-1}}} \cdot \frac{\cancel{(x-1)}}{(x-1)} = \frac{x^2-x+2x-2}{x+1} = \frac{\underline{\underline{x^2+x-2}}}{x+1}.$$

Eksemplet nedenfor viser en situasjon der det er lett å gjøre feil:

Eksempel 2.3.3: Skriv den brudne brøken nedenfor som en vanlig brøk:

$$\frac{2 - \frac{x}{2}}{(1 + \frac{x}{2})(1 - \frac{x}{2})}.$$

Løsning: Her er det fristende å bli kvitt smånevnerne ved å multiplisere teller og nevner med 2. Men da vil du kun bli kvitt "smånevneren" i den ene nevnerfaktoren. For å bli kvitt alle smånevnerne, må du multiplisere teller og nevner i hovedbrøken med 4:

$$\frac{2 - \frac{x}{2}}{(1 + \frac{x}{2})(1 - \frac{x}{2})} = \frac{(2 - \frac{x}{2}) \cdot 4}{((1 + \frac{x}{2}) \cdot 2) \cdot ((1 - \frac{x}{2}) \cdot 2)} = \frac{8 - 2x}{(2+x)(2-x)} = \frac{8-2x}{\underline{\underline{4-x^2}}}.$$

Dette ser du kanskje lettere hvis du først multipliserer ut nevneren (med 3. kvadratsetning):

$$\frac{2 - \frac{x}{2}}{(1 + \frac{x}{2})(1 - \frac{x}{2})} = \frac{2 - \frac{x}{2}}{1 - \frac{x^2}{4}} = \frac{(2 - \frac{x}{2}) \cdot 4}{(1 - \frac{x^2}{4}) \cdot 4} = \frac{8 - 2x}{\underline{\underline{4 - x^2}}}.$$

Oppgave 2.3.1.

Oppgave 2.3.2. (Denne oppgaven er forholdsvis krevende).

3. Likninger og ulikheter.

3.1. Enkle førstegradslikninger.

Å løse en likning består i å omforme den opprinnelige likningen til en ny ekvivalent likning som er så enkel at du direkte ser hvilke verdier av den ukjente som passer i likningen. Som hjelpemiddel har du da alle de operasjonene som er behandlet i notatene om *algebra* og *brøkrekning*. Dessuten kan du:

- Multiplisere eller dividere hele likningen med et tall (unntatt null).
- Legge til eller trekke fra like mye på begge sider av likhetstegnet.

Det fins ingen generell strategi for hvordan du skal benytte disse teknikkene. Men dersom du legger til eller trekker fra ledd på begge sider av likhetstegnet på en fornuftig måte, er dette ekvivalent med å flytte ledd over på andre siden av likhetstegnet med motsatt fortegn. Du vil da samle alle ledd som inneholder den ukjente på den ene siden av likhetstegnet, og alle andre ledd på den andre siden.

Eksempel 3.1.1: Finn x uttrykt ved a når

$$2(a - x) + 3x = a(x + 3).$$

Løsning: Ganger ut parentesene, og samler alle ledd med x på venstre side av likhetstegnet:

$$2(a - x) + 3x = a(x + 3)$$

$$\Leftrightarrow 2a - 2x + 3x = ax + 3a$$

$$\Leftrightarrow -2x + 3x - ax = -2a + 3a$$

$$\Leftrightarrow x - ax = a$$

$$\Leftrightarrow x(1 - a) = a$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{a}{1 - a}$$

Oppgave 3.1.1.

Når likningen inneholder en eller flere brøker, og den ukjente forekommer i nevner, er det ofte lurt å gange hele likningen med fellesnevneren for alle brøkene:

Eksempel 3.1.2: Finn x uttrykt ved a når

$$\frac{2a}{1 - x} = \frac{a + 1}{x + 2}.$$

Løsning: Begge sider av likningen multipliseres med fellesnevneren $(1 - x)(x + 2)$, og vi får:

$$\frac{2a}{\cancel{1 - x}} (\cancel{1 - x})(x + 2) = \frac{a + 1}{\cancel{x + 2}} (1 - x) (\cancel{x + 2})$$

$$\Leftrightarrow 2a(x + 2) = (a + 1)(1 - x)$$

$$\Leftrightarrow 2ax + 4a = a - ax + 1 - x$$

Så samles alle x -leddene på høyre side av likhetstegnet:

$$2ax + ax + x = -4a + a + 1$$

$$\Leftrightarrow (3a+1)x = -3a+1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3a+1}{3a+1}$$

Her må vi forutsette at $a \neq -\frac{1}{3}$ for å unngå null i nevneren.

(Vanlig slurvefeil: Minustegnet i leddet $-3a$ synker ned foran brøkstreken, slik at svaret ser ut som $x = -\frac{3a+1}{3a+1}$ som da kan forkortes til $x = -1$).

Oppgave 3.1.2.

Merk: Det er kun når du har en *likning* at du kan multiplisere begge sider av likhetstegnet med fellesnevneren (eller med et hvilket som helst tall for den saks skyld). Når du skal forenkle uttrykk som inneholder brøker, kan du *ikke* multiplisere uttrykkene med fellesnevneren. Hvis du for eksempel skal forenkle uttrykket

$$\frac{2a}{1-x} - \frac{a+1}{x+2},$$

kan du *ikke* multiplisere med $(1-x)(x+2)$. Du må gjøre slik:

$$\begin{aligned} \frac{2a}{1-x} - \frac{a+1}{x+2} &= \frac{2a(x+2) - (a+1)(1-x)}{(1-x)(x+2)} = \frac{2ax + 4a - a + ax - 1 + x}{(1-x)(x+2)} \\ &= \frac{3ax + x - 3a - 1}{(1-x)(x+2)} \end{aligned}$$

Du får ofte bruk for å omforme uttrykk. Da bruker du de samme teknikkene som når du løser likninger. Her er et par eksempler:

Eksempel 3.1.3: Når en partikkel har startfart v_0 og akselerasjon a , vil den i løpet av en tid t bevege seg en strekning x gitt ved

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2.$$

Omform dette uttrykket slik at du finner

- v_0 uttrykt ved de andre størrelsene.
- a uttrykt ved de andre størrelsene.

Løsning:

$$a) \quad x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \Leftrightarrow v_0 t = x - \frac{1}{2} a t^2 \Leftrightarrow v_0 = \frac{x - \frac{1}{2} a t^2}{t} = \frac{x}{t} - \frac{\frac{1}{2} a t^2}{t} = \frac{x}{t} - \frac{1}{2} a t.$$

$$b) \quad x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} a t^2 = x - v_0 t.$$

Multipliserer begge sider av likhetstegnet med 2, og deler på t^2 :

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2} a t^2 \cdot 2}{t^2} = \frac{(x - v_0 t) \cdot 2}{t^2} \Leftrightarrow a = \frac{2(x - v_0 t)}{t^2} = \frac{2x}{t^2} - \frac{2v_0}{t}.$$

Eksempel 3.1.4: Når to motstander med resistanser R_1 og R_2 koples i parallell, får vi en resultantresistans R gitt ved

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Finn R_1 uttrykt ved R og R_2 .

Løsning: Starter med å multiplisere hele brøken med R , R_1 og R_2 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cancel{R}} \cdot \cancel{R} \cdot R_1 \cdot R_2 &= \frac{1}{\cancel{R_1}} \cdot R \cdot \cancel{R_1} \cdot R_2 + \frac{1}{\cancel{R_2}} \cdot R \cdot R_1 \cdot \cancel{R_2} \\ \Leftrightarrow R_1 \cdot R_2 &= R \cdot R_2 + R \cdot R_1 \\ \Leftrightarrow R_1 \cdot R_2 - R \cdot R_1 &= R \cdot R_2 \\ \Leftrightarrow R_1(R_2 - R) &= R \cdot R_2 \\ \Leftrightarrow R_1 &= \underline{\underline{\frac{R \cdot R_2}{R_2 - R}}} \end{aligned}$$

Oppgave 3.1.3.

3.2. Andregradslikninger.

Disse likningene løses vanligvis med formel. De må da først ordnes slik at de får standardformen

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Deretter benytter vi at:

Dersom $a \neq 0$, har likningen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

løsningen

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

En detaljert utledning av formelen finner du [her](#).

Eksempel 3.2.1: Løs likningene

a) $3x^2 + 2x - 4 = 0.$

b) $5x = 4 + x^2$

Løsning:

a) Benytter formelen direkte:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4)}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm \sqrt{52}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 \cdot 13}}{6} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{13}}{6}$$

$$= \frac{2(-1 \pm \sqrt{13})}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{3} \approx \frac{-1 \pm 3.6}{3} = \begin{cases} \frac{2.6}{3} \approx \underline{\underline{0.87}} \\ \frac{-4.6}{3} \approx \underline{\underline{1.53}} \end{cases}$$

b) Starter med å ordne likningen til standardformen:

$$x^2 - 5x + 4 = 0.$$

Nå kan vi bruke formel:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} \underline{\underline{4}} \\ \underline{\underline{1}} \end{cases}$$

Noen ganger er det enklere å benytte at:

Når et produkt er lik null, må minst en av faktorene være lik null.

Eksempel 3.2.2: Løs disse likningene uten å bruke formel:

a) $x^2 - 4 = 0.$

b) $x^2 - 3x = 0.$

Løsning:

a) Benytter 3. kvadratsetning:

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 2}} \\ x + 2 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = -2}} \end{cases}$$

b) Setter x utenfor parentes:

$$x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\underline{x = 0}} \\ x - 3 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 3}} \end{cases}$$

Advarsel: Når du løser likninger, må du **ikke** forkorte bort en faktor som inneholder den ukjente. Da mister du en løsning.

[Oppgave 3.2.1.](#)

3.3. Mer faktorisering.

I de siste eksemplene ovenfor brukte du faktorisering til å løse en andregradslikning. Men du kan også gå motsatt vei slik:

Dersom likningen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

har løsningene

$$x = x_1 \text{ og } x = x_2,$$

så er

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Dette kan vi bruke til å faktorisere andregradsuttrykk slik eksemplene nedenfor viser:

Eksempel 3.3.1: Faktoriser uttrykket

a) $2x^2 - 6x + 4$.

b) $a^2 + ab - 2b^2$

Løsning:

a) Likningen

$$2x^2 - 6x + 4 = 0$$

har løsningene

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{2 \cdot 2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{4} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{4} = \frac{6 \pm 2}{4} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}.$$

Da er

$$2x^2 - 6x + 4 = \underline{\underline{2(x - 2)(x - 1)}}.$$

b) Denne er litt finurlig. Men hvis vi betrakter a som en ukjent i andregradslikningen

$$a^2 + ab - 2b^2 = 0,$$

kan vi finne a uttrykt ved b :

$$a = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2b^2)}}{2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 8b^2}}{2} = \frac{-b \pm 3b}{2} = \begin{cases} \frac{-b+3b}{2} = \frac{2b}{2} = b \\ \frac{-b-3b}{2} = \frac{-4b}{2} = -2b \end{cases}$$

Altså er

$$a^2 + ab - 2b^2 = (a - b)(a - (-2b)) = \underline{\underline{(a - b)(a + 2b)}}.$$

Dette kan være nyttig ved forkorting, slik neste eksempel viser:

Eksempel 3.3.2: Forkort brøken

$$\frac{2x^2 + 2x - 12}{3x^2 - 12}.$$

Løsning: For å kunne faktorisere telleren, benytter jeg at likningen

$$2x^2 + 2x - 12 = 0$$

har løsningene

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12)}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 96}}{4} = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{4} = \frac{-2 \pm 10}{4} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

slik at

$$2x^2 + 2x - 12 = 2(x - 2)(x - (-3)) = 2(x - 2)(x + 3).$$

Nevneren faktoriseres ved å sette 3 utenfor parentes, etterfulgt av 3. kvadratsetning, slik at

$$3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x + 2)(x - 2).$$

Da blir

$$\frac{2x^2 + 2x - 12}{3x^2 - 12} = \frac{2(\cancel{x-2})(x+3)}{3(x+2)(\cancel{x-2})} = \frac{2(x+3)}{3(x+2)} = \frac{2x+6}{\underline{\underline{3x+6}}}.$$

Oppgave 3.3.1.

3.4. System av to førstegradslikninger.

Dette er likningssystem som består av to førstegradslikninger med to ukjente. Det er flere metoder for å løse slike likningssett. De to vanligste er:

Innsettingsmetoden: Løs ut den ene ukjente av en av likningene, og sett inn i den andre likningen. Da får du en vanlig førstegradslikning med en ukjent. Når denne er funnet, er det lett å finne den andre ukjente.

Addisjonsmetoden: Denne metoden går ut på kvitte seg med den ene ukjent ved å legge sammen de to likningene, eventuelt etter å ha multiplisert en eller begge likningene med et hensiktsmessig tall. Da står vi igjen med *en* likning med *en* ukjent. Vi løser denne likningen. Deretter finner vi den andre ukjente ved å sette inn i en av likningene.

Vi ser på et par eksempler:

Eksempel 3.4.1: Løs disse likningssystemene både ved innsettings- og addisjonsmetoden:

- a) $2x - y = 3$
 $x + y = 9$
b) $2x - 3y = 7$
 $3x + 2y = 4$

Løsning:

- a) Når vi bruker innsettingsmetoden, kan vi for eksempel starte med å løse ut y av den siste likningen:

$$x + y = 9 \Leftrightarrow y = 9 - x.$$

Så settes dette inn i den første likningen, og vi får:

$$2x - (9 - x) = 3 \Leftrightarrow 2x - 9 + x = 3 \Leftrightarrow 3x = 12 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 4}}.$$

Vi nøster oss tilbake, og får at

$$y = 9 - x = 9 - 4 = \underline{\underline{5}}.$$

Løsningen blir da tallparet $(x, y) = (\underline{\underline{4}}, \underline{\underline{5}})$.

Når vi benytter addisjonsmetoden, kan vi bare legge sammen likningene direkte. Da faller y -leddene bort, og vi får:

$$(2x - y) + (x + y) = 3 + 9 \Leftrightarrow 3x = 12 \Leftrightarrow \underline{x = 4}.$$

Denne verdien setter vi inn i den siste likningen, og får

$$4 + y = 9 \Leftrightarrow y = 9 - 4 = \underline{5}.$$

- b) Når jeg bruker innsetningsmetoden, er det kanskje enklest å løse ut x av den første likningen, og deretter sette inn i den andre:

$$2x - 3y = 7 \Leftrightarrow 2x = 3y + 7 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}y + \frac{7}{2}.$$

$$3x + 2y = 4 \Leftrightarrow 3\left(\frac{3}{2}y + \frac{7}{2}\right) + 2y = 4 \Leftrightarrow \frac{9}{2}y + \frac{21}{2} + 2y = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{2}y + 2y = 4 - \frac{21}{2} \Leftrightarrow \frac{13}{2}y = \frac{-13}{2} \Leftrightarrow \underline{y = -1}$$

Til slutt blir

$$x = \frac{3}{2}y + \frac{7}{2} = \frac{3}{2} \cdot (-1) + \frac{7}{2} = \frac{4}{2} = \underline{2}.$$

Løsningen blir da tallparet $(x, y) = \underline{(2, -1)}$.

Når vi bruker addisjonsmetoden, ser det ut til å være enklest å bli kvitt y -leddene. Da må vi multiplisere den øverste likningen med 2 og den nederste med 3 før vi legger sammen likningene:

$$(2x - 3y) \cdot 2 = 7 \cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad 4x - 6y = 14$$

$$(3x + 2y) \cdot 3 = 4 \cdot 3 \quad \Leftrightarrow \quad 9x + 6y = 12$$

Når likningene legges sammen, får vi

$$13x = 26 \Leftrightarrow x = 2.$$

Så finner vi y av for eksempel den øverste likningen:

$$2x - 3y = 7 \Leftrightarrow -3y = 7 - 2x = 7 - 2 \cdot 2 = 3 \Leftrightarrow \underline{y = -1}.$$

Oppgave 3.4.1.

Du kommer ofte bort i slike likningssystem med mer enn to ukjente. Selv om du kan benytte de samme metodene som ovenfor, er det utviklet mer generelle metoder til å løse slike likningssystem. Vi skal ikke komme inn på slike metoder nå.

3.5. System av høyere ordens likninger.

Nå går vi kanskje litt ut over det som kan kalles "forkunnskaper". Men det er nyttig å kjenne til det, og det inneholder egentlig ingenting nytt. Vi skal bare benytte kunnskaper som vi allerede har fra før. Dessuten må vi jobbe systematisk. Vi må også huske på at løsningen av et slikt likningssystem er et tallsett som skal inneholde en verdi for hver av de ukjente, slik at alle likningene i likningssystemet er oppfylt.

Vi skal begrense oss til to likninger med to ukjente.

Eksempel 3.5.1: Finn x og y av likningssystemene nedenfor:

a) $x^2 - 2xy = 0$

$$2x + y = 5$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & x^2 = 4y^2 \\ & xy - 4y + 6x = 0 \end{aligned}$$

Løsning:

a) Her er det flere mulige strategier. Det enkleste er kanskje å starte med å faktorisere den øverste likningen:

$$x^2 - 2xy = 0 \Leftrightarrow x(x - 2y) = 0.$$

Så benytter vi at når et produkt er lik null, må en av faktorene være lik null. Det gir disse to mulighetene:

$$x = \underline{0} \text{ eller } x - 2y = 0 \Leftrightarrow x = \underline{2y}.$$

Hittil har vi bare sørget for at den første likningen er oppfylt. Men den andre likningen må også være oppfylt *samtidig*. Vi må derfor se på to muligheter:

Dersom $x = 0$, blir den andre likningen

$$2 \cdot 0 + y = 5 \Leftrightarrow y = \underline{5}.$$

Dette gir løsningen

$$(x, y) = (\underline{0}, \underline{5}).$$

Den andre muligheten er at $x = 2y$. Settes dette inn i den siste likningen, får vi

$$2 \cdot 2y + y = 5 \Leftrightarrow 4y + y = 5 \Leftrightarrow 5y = 5 \Leftrightarrow y = \underline{1}.$$

Da blir

$$x = 2y = 2 \cdot 1 = \underline{2}.$$

Dette gir løsningen

$$(x, y) = (\underline{2}, \underline{1}).$$

Likningssystemet har altså to løsninger, tallparene $(\underline{0}, \underline{5})$ og $(\underline{2}, \underline{1})$.

En annen strategi er å løse ut y av den siste likningen, og deretter sette inn i den første. Da får vi:

$$2x + y = 5 \Leftrightarrow y = 5 - 2x.$$

Innsetting i den første likningen gir

$$\begin{aligned} x^2 - 2x(5 - 2x) &= 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 4x^2 = 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 10x = 0 \\ &\Leftrightarrow 5x(x - 2) = 0 \end{aligned}$$

Merk at vi kan ikke forkorte bort x . Gjør vi det, mister vi en løsning.

Nå har vi to muligheter: $x = 0$ eller $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Dersom $x = \underline{0}$, blir

$$y = 5 - 2 \cdot 0 = \underline{5},$$

som gir løsningen

$$(x, y) = (\underline{0}, \underline{5}).$$

Dersom $x = \underline{2}$, blir

$$y = 5 - 2 \cdot 2 = \underline{1},$$

som gir løsningen

$$(x, y) = (\underline{2}, \underline{1}).$$

b) Her lønner det seg å starte med den øverste likningen:

$$x^2 = 4y^2 \Leftrightarrow x = \pm 2y.$$

Så setter vi inn i den nederste likningen:

Dersom $x = 2y$, får vi

$$(2y)y - 4y + 6 \cdot 2y = 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 4y + 12y = 0 \Leftrightarrow 2y^2 + 8y = 0 \\ \Leftrightarrow 2y(y + 4) = 0$$

Her er enten $y = 0$ eller $y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = -4$.

Da blir

$$x = 2y = \begin{cases} 2 \cdot 0 = 0 \\ 2 \cdot (-4) = -8 \end{cases}$$

Vi har altså funnet to løsninger:

$$(x, y) = (0, 0) \text{ eller } (x, y) = (-8, -4).$$

Men vi kan også ha at $x = -2y$. Da får vi

$$(-2y)y - 4y + 6 \cdot (-2y) = 0 \Leftrightarrow -2y^2 - 4y - 12y = 0 \Leftrightarrow -2y^2 - 16y = 0 \\ \Leftrightarrow -2y(y + 8) = 0$$

Her er enten $y = 0$ eller $y + 8 = 0 \Leftrightarrow y = -8$.

Da blir

$$x = 2y = \begin{cases} 2 \cdot 0 = 0 \\ 2 \cdot (-8) = -16 \end{cases}$$

Løsningen $(x, y) = (0, 0)$ har vi fra før. Men vi har funnet en ny løsning:

$$(x, y) = (-16, -8).$$

Likningssystemet har altså tre løsninger, tallparene $(0, 0)$, $(-8, -4)$ og $(-16, -8)$.

Oppgave 3.5.1.

3.6. Ulikheter.

Førstegrads-ulikheter løses med stort sett de samme regneteknikker som førstegradslikninger. Det er imidlertid ett viktig unntak:

Når du multipliserer begge sider av en ulikhet med et negativt tall, må du snu ulikhetstegnet.

En konsekvens av dette er at:

Du kan ikke multiplisere begge sider av en ulikhet med en faktor som du ikke vet fortegnet til.

Et lite eksempel:

Eksempel 3.6.1: Løs ulikheten

$$2(x-1) - x < 1 - 3(3-x).$$

Løsning: Bruker samme teknikker som når jeg løser en likning:

$$2(x-1) - x < 1 - 3(3-x)$$

$$\Leftrightarrow 2x - 2 - x < 1 - 9 + 3x$$

$$\Leftrightarrow 2x - x - 3x < 2 + 1 - 9$$

$$\Leftrightarrow -2x < -6$$

$$\Leftrightarrow \underline{x > 3}$$

Merk at jeg må snu ulikhetstegnet når jeg deler på -2 i siste linje.

Oppgave 3.6.1.

Ikke fall for fristelsen til å forkorte bort eller multiplisere med faktorer som inneholder x ! Dette går sjelden bra, fordi vi kjenner (vanligvis) ikke fortegnet til slike faktorer, og da vet vi heller ikke hvilken vei ulikhetstegnet skal stå. Dette fører til at ulikheter som inneholder potenser av x , og ulikheter der en eller flere nevnerfaktorer inneholder x , må behandles med forsiktighet. Prosedyren i ramma nedenfor anbefales:

Ulikheter med brøkfunksjoner som har x i nevner, eller ulikheter som inneholder potenser av x , løses slik:

1. Alle ledd samles på venstre side av ulikhetstegnet.
2. Venstre side faktorerises.
3. Sett opp et **fortegnsskjema** der hver faktor får sin fortegnslinje. Bruk hel strek når faktoren er positiv, stiplet strek når faktoren er negativ.
4. Sett opp fortegnslinja for hele venstre side av ulikheten ved å benytte at 0, 2, 4, ... negative faktorer blir positivt, mens 1, 3, 5, ... negative faktorer blir negativt.
5. Se av oppgaveteksten om venstre side skal være positiv eller negativ, og skriv ned svaret ut fra fortegnslinja.

Dette må illustreres med et par eksempler:

Eksempel 3.6.2: Løs ulikhetene

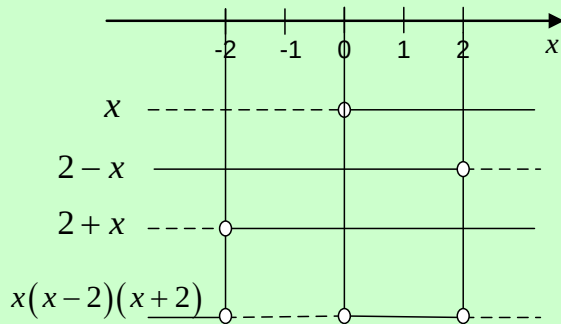
a) $4x < x^3$.

b) $\frac{x}{x-2} \geq 3$.

Løsning:

- a) Du må ikke forkorte bort x ! Slik forkorting innebærer egentlig at du dividerer med x , og du vet jo ikke om x er positiv eller negativ. Da vet du heller ikke hvilken vei ulikhetstegnet skal stå etter forkorting. Vi må gjøre slik:

$$4x < x^3 \Leftrightarrow 4x - x^3 < 0 \Leftrightarrow x(4 - x^2) < 0 \Leftrightarrow x(2 - x)(2 + x) < 0.$$



Nå må vi sette opp fortegnsskjema med en linje for hver faktor, der en hel strek markerer positiv faktor mens stiplet strek markerer negativ faktor. Da kan vi bli lurt av faktoren $(2-x)$, som får hel strek når

$$2-x > 0 \Leftrightarrow -x > -2 \Leftrightarrow x < 2.$$

Ellers er

$$x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2.$$

Hele fortegnsskjemaet blir da som vist ovenfor. Vi leser av:

$$x(2-x)(2+x) < 0 \text{ når } \underline{-2 < x < 0} \text{ eller når } \underline{x > 2}.$$

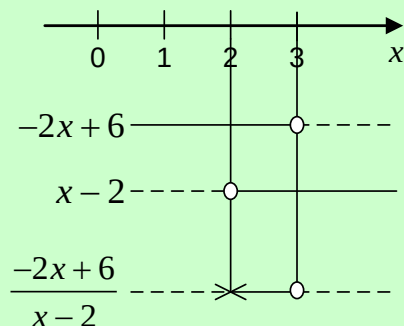
- b) Her kan du ikke multiplisere begge sider med $(x-2)$, fordi du ikke vet om denne faktoren er positiv eller negativ. Du flytter heller alle leddene over på venstre side av ulikhetstegnet, og setter alt opp på felles brøkstrek:

$$\frac{x}{x-2} - 3 \cdot \frac{x-2}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-3x+6}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-2x+6}{x-2} \geq 0$$

Så undersøker du når hver faktor er positiv:

$$-2x+6 > 0 \Leftrightarrow -2(x-3) > 0 \Leftrightarrow x-3 < 0 \Leftrightarrow \underline{x < 3}.$$

$$x-2 > 0 \Leftrightarrow \underline{x > 2}.$$



Disse resultatene samles i fortegnsskjemaet til venstre. Merk at vi ikke kan bruke $x=2$ fordi vi da får null i nevneren. Videre merker vi oss at oppgaven går ut på å vi finne de x -verdiene som fører til at brøken er større enn *eller lik* null. Av fortegnsskjemaet ser vi at dette er oppfylt når

$$\underline{2 < x \leq 3}.$$

Oppgave 3.6.2.

4. Litt matematisk logikk og mengdelære.

4.1. Matematisk logikk.

Matematikk er egentlig logisk tenkning satt i system. Men "matematisk logikk" er likevel blitt et eget fagområde innen matematikken. I dette kapitlet skal vi så vidt se litt på dette. Vi skal begrense oss til de viktigste definisjonene, symbolene, og bruken av symbolene. Stoffet videreføres med litt fordypning og litt om anvendelser i et [tilleggskapitel](#).

4.1.1. Utsagn.

La oss starte med en viktig definisjon:

Et **utsagn** er en formulering som er enten **sann** eller **usann**.

Merk at formuleringen må være så presis at det er mulig å avgjøre med sikkerhet om påstanden er sann eller usann.

Dersom utsagnet er **sant**, har det **sannhetsverdi T (True)** eller **1**.
Dersom utsagnet er **usant**, har det **sannhetsverdi F (False)** eller **0**.

Eksempel 4.1.1: Er formuleringene nedenfor utsagn? Dersom de er utsagn, skal du avgjøre sannhetsverdien.

- a) "Oslo er hovedstaden i Norge".
- b) "Det er varmt i dag".
- c) "Matematikk er morsomt".
- d) " $2 + 2 = 5$ "

Løsning:

- a) Dette er et utsagn. Sannhetsverdi **T** eller **1**.
- b) Ikke utsagn. Sannhetsverdien avhenger av den subjektive vurderingen til den som framsetter påstanden.
- c) Ikke utsagn, av samme grunn som ovenfor.
- d) Utsagn, med sannhetsverdi **F** eller **0**.

Vi bruker ofte bokstavsymboler (gjerne i *kursiv*) for å angi utsagn, f. eks. slik:

p : "Rosenborg ble seriemester i fotball for menn i 2003".

Nå kan vi bruke symbolet p istedenfor det lange utsagnet "Rosenborg ble seriemester i fotball for menn i 2003". Slike symboler kalles **utsagnsvariabler**.

I matematikken kommer vi ofte over formuleringer av typen " $x > 2$ ". Sannhetsverdien av slike utsagn avhenger av verdien av x . I det øyeblikk x er kjent, kan vi også avgjøre om utsagnet er sant eller ikke. Slike utsagn kaller vi **åpne utsagn**.

Et **åpent utsagn** er et utsagn der sannhetsverdien først kan avgjøres etter at en eller flere variabler har fått tilordnet verdi(er).

Oppg. 4.1.1.

Når vi bruker en utsagnsvariabel til å angi et åpent utsagn, setter vi ofte den eller de ukjente variablene i parentes slik:

$p(x)$: ” $x > 2$ ”. Sannhetsverdien av utsagnet p kan avgjøres når vi kjenner verdien av x .
 $q(x, y)$: ” $x \leq y$ ”. Sannhetsverdien av utsagnet q kan avgjøres når vi kjenner verdiene av x og y .

Likninger, likningssystemer og ulikheter egentlig er åpne utsagn. Når vi løser en likning, en ulikhet eller et likningssystem, går vi på jakt etter verdier av den eller de ukjente som gjør utsagnet sant. Vi skal snart komme nærmere inn på dette, men vi må ta med oss noen flere definisjoner først.

4.1.2. Negasjon, konjunksjon og disjunksjon.

Negasjonen til p er et utsagn som har motsatt sannhetsverdi av p . Vi bruker symbolet $\bar{p}$ (eller $\neg p$) for negasjonen til p .
 $\bar{p}$ leses ”ikke p ”, og betyr at ” p er ikke sant”.

Sammenhenger mellom sannhetsverdier til utsagn illustreres gjerne i **sannhetsverditabeller**. Sannhetsverditabellen til p og $\bar{p}$ blir slik:

p	$\bar{p}$
0	1
1	0

Denne sannhetsverdien leses slik:

Når p er usann, er $\bar{p}$ sann.

Når p er sann, er $\bar{p}$ usann.

Oppg. 4.1.2.

Vi får ofte bruk for å kombinere enkle utsagn til mer kompliserte utsagn. Da får vi bruk for definisjonene nedenfor:

La p og q være to utsagn. Da gjelder:

Konjunksjonen $p \wedge q$ leses " p og q ", og er et sammensatt utsagn som er sant hvis og bare hvis *både* p og q er sanne.

Disjunksjonen $p \vee q$ leses " p eller q ", og er et sammensatt utsagn som er sant hvis og bare hvis *enten* p eller q eller *begge* er sanne.

Legg merke til at $p \vee q$ er sant når *enten* p eller q eller *begge* er sanne. Men noen ganger har vi bruk for et symbol som angir at *enten* p eller q , men *ikke* begge, er sanne. Da kan vi bruke "eksklusiv eller":

$p \underline{\vee} q$ kalles *eksklusiv eller* (engelsk: XOR), og er et utsagn som er sant hvis og bare hvis *enten* p eller q , men *ikke* *begge* er sanne.

Sannhetsverditabellene for $p \wedge q$, $p \vee q$ og $p \underline{\vee} q$ blir slik:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \underline{\vee} q$
0	0	0	0	0
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	0

Eksempel 4.1.2: Vi har disse utsagnene:

p : "Jeg står til eksamen i matematikk".

q : "Jeg står til eksamen i fysikk".

Formuler med ord disse sammensatte utsagnene:

$$p \wedge q, \quad p \vee q, \quad p \underline{\vee} q, \quad \overline{p \wedge q}, \quad \overline{p} \vee \overline{q}.$$

Løsning:

$p \wedge q$: "Jeg står til eksamen i både matematikk og fysikk".

$p \vee q$: "Jeg står til eksamen i enten matematikk eller fysikk eller begge".

$p \underline{\vee} q$: "Jeg står til eksamen i enten matematikk eller fysikk, men ikke i begge."

$\overline{p \wedge q}$: "Jeg står ikke til eksamen i både matematikk og fysikk".

$\overline{p} \vee \overline{q}$: "Jeg står ikke til eksamen i matematikk, eller jeg står ikke til eksamen i fysikk, eller begge deler".

Sammenlikner vi de to siste utsagnene, ser vi at de egentlig gir uttrykk for det samme. Slike utsagn med samme sannhetsverdi er **ekvivalente**.

[Oppg. 4.1.3](#) og [4.1.4](#).

4.1.3. Implikasjon og ekvivalens.

Vi får ofte bruk for disse viktige sammenhengene mellom utsagn:

La p og q være to utsagn.

$p \Rightarrow q$ betyr at når p er sann, er også q sann.

Det leses " p **impliserer** q " eller " p så q ".

$p \Leftrightarrow q$ betyr det samme som $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

Det leses " p er **ekvivalent** med q " eller " p hvis og bare hvis q ".

Vi bruker også symbolet $\equiv$ for ekvivalens.

Som før sagt er likninger, likningssystemer og ulikheter egentlig åpne utsagn. Når vi løser slike problem, omformer vi det opprinnelige utsagnet til enklere, ekvivalente utsagn. Da bør vi være nøye med å benytte ekvivalenssymbolet $\Updownarrow$ (eller $\Leftrightarrow$). Dette innebærer at alle verdier av den eller de ukjente som gjør at utsagnet på en side av ekvivalenssymbolet er sant, også fører til at utsagnet på den andre siden blir sant. I praksis slurver vi dessverre ofte med ekvivalenssymbolene når vi foretar slike utregninger, eller vi sløyfer ekvivalenssymbolene helt for å forenkle skrivingen. Men da er det fort gjort å gjøre feil, noe neste eksempel viser:

Eksempel 4.1.3: Påvis feilene i disse "ekvivalensene":

a) $n = 2 \Leftrightarrow n^2 = 4$

b) $x^2 = 3x \Leftrightarrow x = 3$

Løsning:

a) Vi definerer de to utsagnene $p(n): n = 2$ og $q(n): n^2 = 4$. Vi ser at hvis $p(n)$ er sant slik at $n = 2$, får vi ved kvadrering at $n^2 = 4$ slik at også $q(n)$ er sant. Men når $q(n)$ er sant slik at $n^2 = 4$, kan vi også ha at $n = -2$ slik at $p(n)$ ikke er sant. Altså må ekvivalenssymbolet byttes ut med en implikasjon slik:

$$n = 2 \Rightarrow n^2 = 4.$$

b) Vi definerer de to utsagnene $p(x): x^2 = 3x$ og $q(x): x = 3$. Vi ser at hvis $q(x)$ er sant slik at $x = 3$, blir også $p(x)$ sant fordi $x^2 = 3^2 = 9$ og $3x = 3 \cdot 3 = 9$. Men se hva som skjer dersom $x = 0$. Da blir $p(x)$ sant fordi $x^2 = 0^2 = 0$ og $3x = 3 \cdot 0 = 0$ mens $q(x)$ åpenbart ikke er sant. Vi må på ny erstatte implikasjonen med ekvivalens, og setter:

$$x^2 = 3x \Leftrightarrow x = 3.$$

Vi bruker også ordet "ekvivalens" i en annen sammenheng. Når vi skriver

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2),$$

så er ikke dette noen likning. Høyre og venstre side av likhetstegnet er like for *alle* verdier av x . Vi sier at $x^2 - 4$ er *ekvivalent* med $(x - 2)(x + 2)$. Egentlig burde vi presisert dette med å skrive

$$x^2 - 4 \equiv (x - 2)(x + 2),$$

men det er sjelden at vi er så formelle.

4.1.4. deMorgans lover.

Vi skal nå se på to logiske ekvivalenser som vi ofte får bruk for. De kalles **deMorgans lover**:

La p og q være to utsagn. Da gjelder:

$$\overline{(p \vee q)} \equiv \bar{p} \wedge \bar{q}$$

$$\overline{(p \wedge q)} \equiv \bar{p} \vee \bar{q}$$

Huskeregel: Bryt negasjons-streken og bytt $\wedge$ - og $\vee$ -symbol.

Opgg. 4.1.5

Vi så et eksempel på en av deMorgans lover i Eksempel 4.1.2. Her er et annet eksempel:

Eksempel 4.1.4: En deprimeret trønder sier at:

”Rosenborg blir verken serie- eller cupmester i år”.

Definer de to utsagnene

p : Rosenborg blir seriemester i år.

q : Rosenborg blir cupmester i år.

Bruk en av deMorgans lover til å formulere trønderens utsagn på to måter, uttrykt ved p og q .

Løsning: Utsagnet omformes først til ”Rosenborg blir ikke seriemester i år, og Rosenborg blir ikke cupmester i år”. Med symboler: $\bar{p} \wedge \bar{q}$. Men den øverste av de to lovene sier at dette er ekvivalent med $\overline{p \vee q}$, som betyr ”Det er ikke sant at Rosenborg enten blir cupmester eller seriemester eller begge deler i år”. Du innser vel at de to formuleringene er ekvivalente?

4.1.5. Mer om matematisk logikk.

De små smakebitene på matematisk logikk som vi har sett på hittil, omhandler kun en liten flik av dette fagfeltet. Vi skal imidlertid begrense oss til disse småbitene i denne omgangen. Hvis du er interessert, kan du finne mer om matematisk logikk med anvendelser i et tilleggs-kapitel. Der finner du bl.a.:

- Litt mer om [sammensatte utsagn og logisk algebra](#).
- For matematikerne er det svært viktig at matematiske bevis gjennomføres på en korrekt måte. Noen slike [bevisteknikker](#) er samlet i et eget lite tilleggsavsnitt.

- Innen elektronikk er det et fagfelt som omhandler logiske kretser. Dette er kretser som bl.a. brukes til å slå brytere av og på avhengig av om visse betingelser er oppfylt. Slike logiske kretser benytter i praksis logisk algebra for å avgjøre om bryterne skal slås på eller av.
- Mikroprosessoren som er ”hjernen” i enhver datamaskin, er i prinsippet en svært komplisert logisk krets. Når du programmerer en datamaskin, benytter du et eller annet programmeringsspråk som igjen baserer seg på logisk algebra.

4.2. Mengdelære.

4.2.1. Grunnleggende definisjoner

En **mengde** er en veldefinert samling av objekter.
Hvert objekt kalles et **element** i mengden.

I prinsippet kan slike mengder inneholde alle tenkelige elementer (tall, hus, mennesker ...). Vi skal stort sett konsentrere oss om mengder som inneholder matematiske objekter (tall og tallsymboler).

Vi bruker gjerne store bokstaver i kursiv til å betegne mengder (for eksempel A , M), mens små bokstaver i kursiv betegner elementer i mengden (for eksempel a , x , y).

Dersom et element x er med i en mengde A , skriver vi $x \in A$.
Dersom et element x *ikke* er med i en mengde A , skriver vi $x \notin A$.

Vi kan angi mengder på to måter. Det enkleste er å ramse opp de elementene som inngår i mengden. Vi sier at mengden gis på **listeform**. De elementene som inngår i mengden, skrives da vanligvis mellom to klammeparenteser: $\{ \}$.

Eksempel 4.2.1: Angi at en mengde A inneholder alle hele tall fra og med 1 til og med 5.

Løsning: Vi skriver
 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Noen ganger inneholder mengden så mange elementer at det ikke er hensiktsmessig, eller ikke mulig, å ramse opp alle elementene. Da ramser vi noen av elementene på en slik måte at det er ”innlysende” hvilke andre elementer som inngår.

Eksempel 4.2.2: Angi at en mengde B inneholder alle hele tall fra og med 1 til og med 100.

Løsning: Dette kan skrives på flere måter, for eksempel slik:

$$B = \{1, 2, 3, \dots, 99, 100\}.$$

En noenlunde oppvakt leser vil skjønne hvilke elementer som inngår.

Eksempel 4.2.3: Angi at en mengde C inneholder alle hele tall fra og med 10 og oppover uten noen øvre grense.

Løsning: Dette kan skrives på flere måter for eksempel slik:

$$C = \{10, 11, 12, \dots\}.$$

Også her er det temmelig innlysende hva som menes.

Noen mengder brukes så ofte at de har fått egne symboler og egne navn:

$\mathbb{N}$: Dette er mengden av **naturlige tall**.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Merk at tallet 0 ikke inngår i $\mathbb{N}$.

$\mathbb{Z}$: Dette er mengden av **hele tall**.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

$\mathbb{Q}$: Dette er mengden av **rasjonale tall**, som er alle tall som kan skrives på brøkform der teller er et helt tall og nevner er et naturlig tall.

$\mathbb{R}$: Dette er mengden av **reelle tall**, som er alle tallene på tall-linja. Vi kan nemlig vise at det eksisterer tall som ikke kan skrives som rasjonale tall.

Senere skal vi utvide tallbegrepet til å omfatte mengden av **komplekse tall** som skrives $\mathbb{C}$.

Dersom vi har mer kompliserte mengder, angir vi hvilke elementer som inngår ved hjelp av en **mengdebygger**. Denne ser i utgangspunktet slik ut:

$$A = \{x \mid p(x)\}.$$

Dette leses: "Mengden A inneholder alle elementer x som er slik at utsagnet $p(x)$ er sant".

Eksempel 4.2.4: Bruk mengdebygger til å angi mengden $\mathbb{Q}$.

Løsning: Dette kan gjøres på flere måter. En litt uformell skrivemåte kan være:

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{t}{n}, t \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dette leses: "Mengden $\mathbb{Q}$ inneholder alle elementer x som er av formen $x = \frac{t}{n}$, der t er et helt tall og n er et naturlig tall".

Denne skrivemåten stemmer ikke helt med reglene for matematisk logikk. Vi *kan* uttrykke oss mer formelt korrekt. Men i dette kurset skal vi koste noen formalismer under teppet og nøye oss med enklere skrivemåter.

Eksempel 4.2.5: Bruk mengdebygger til å angi mengden av alle hele, positive tall som er delelige med 7.

Løsning: Denne mengden kan (litt uformelt) skrives

$$M = \{x \mid x = 7t, t \in \mathbb{N}\}.$$

Eksempel 4.2.6: Bruk mengdebygger til å angi mengden av alle hele, positive tall under 100 som er delelig med 3.

Løsning: Denne mengden kan (litt uformelt) skrives

$$M = \{x < 100 \mid x = 3t, t \in \mathbb{N}\}.$$

Også andre (mer formelt korrekte) skrivemåter kan brukes.

En annen mengde som ofte forekommer, er den **tomme mengden**:

Den tomme mengden har fått symbolet $\emptyset$.
Denne mengden inneholder ingen elementer.

Oppgave 4.2.1.

4.2.2. Sammensatte mengder.

Vi får ofte behov for å sette sammen mengder. Vi skal nå se hvordan det kan gjøres.

I de fleste situasjoner er det en begrenset gruppe elementer som kan inngå i våre mengder. Denne samlingen elementer kalles **grunnmengden** for den aktuelle situasjonen. Vi betegner gjerne grunnmengden med G eller U (Univers). Da definerer vi:

La A være en mengde innenfor en grunnmengde U .

Komplementmengden til A skrives A^c eller $\overline{A}$ og inneholder alle elementer som er med i grunnmengden men som *ikke* er med i A .

Med symboler:

$$A^c = \{x \in U \mid x \notin A\}.$$

Videre har vi:

La A og B være to mengder som inngår i samme grunnmengde U . Da definerer vi:

Unionen mellom A og B skrives $A \cup B$, og består av alle elementer som er med *enten* i A eller i B eller i begge.

Med symboler:

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

Snittet mellom A og B skrives $A \cap B$, og består av alle elementer som er med *både* i A og i B .

Med symboler:

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

Differansen mellom A og B skrives $A - B$ eller $A \setminus B$, og består av alle elementer i A som *ikke* er med i B .

Med symboler:

$$A - B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

Eksempel 4.2.7: Vi har gitt grunnmengden

$$U = \{1, 2, 3, \dots, 9, 10\},$$

og mengdene

$$A = \{1, 2, 3, 5, 7, 10\}$$

og

$$B = \{2, 5, 8, 9, 10\}.$$

Hva blir A^C , B^C , $A \cup B$, $A \cap B$ og $A - B$?

Løsning:

$$A^C = \{4, 6, 8, 9\}, \quad B^C = \{1, 3, 4, 6, 7\}.$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}.$$

$$A \cap B = \{2, 5, 10\}.$$

$$A - B = \{1, 3, 7\}.$$

Vi trenger et par definisjoner til:

Vi sier at **A er en delmengde av B** og skriver $A \subseteq B$ dersom alle elementer i A også er elementer i B .

Med symboler:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow [(x \in A) \Rightarrow (x \in B)].$$

Neste definisjon er nokså naturlig:

Vi sier at **to mengder A og B er like** og skriver $A = B$ dersom de inneholder de samme elementene.

Med symboler:

$$A = B \Leftrightarrow [(x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)]$$

eller

$$A = B \Leftrightarrow [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)].$$

Slik vi har definert delmengde, er A en delmengde av B også når $A = B$. Da er også B en delmengde av A . Vi trenger imidlertid også begrepet **ekte delmengde**:

Vi sier at **A er en ekte delmengde av B** og skriver $A \subset B$ dersom A er en delmengde av B samtidig som det fins minst ett element i B som *ikke* er med i A .

Med symboler:

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (A \neq B).$$

Nå gjenstår det bare en definisjon til:

Vi sier at to mengder A og B er **disjunkte** dersom de ikke har noen felles elementer.

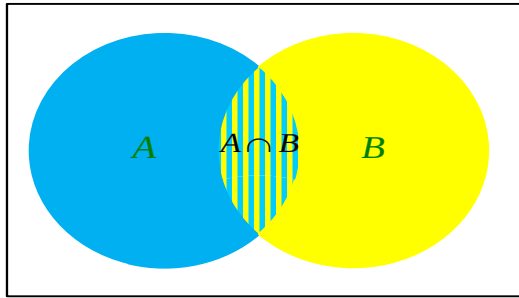
Vi har ikke noe eget symbol som angir at to mengder er disjunkte. Men vi kan definere begrepet symbolsk slik:

$$A \text{ og } B \text{ er disjunkte} \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset.$$

Oppgave 4.2.2.

4.2.3. Venn-diagram.

Venn-diagram er nyttige til å illustrere definisjonene ovenfor, og når vi skal jobbe med mengde-operasjoner. Et Venn-diagram består vanligvis av et rektangel som angir grunnmengden, og sirkler eller ellipser som angir de mengdene som inngår. Dersom mengdene ikke er disjunkte, må sirklene overlappe.

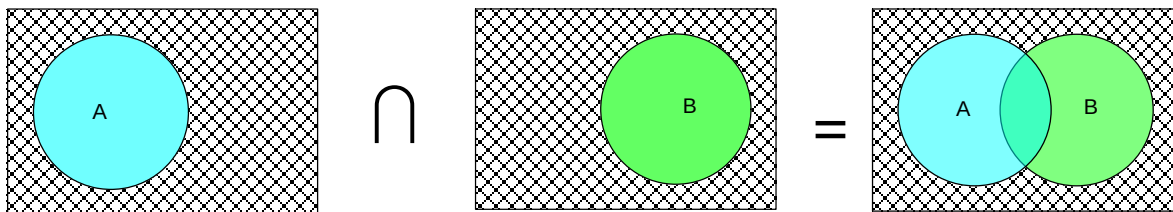


Til venstre ser du et Venn-diagram for to mengder A og B .

- $A \cap B$ blir det skraverte området.
- $A \cup B$ blir alt som er fargelagt.
- $A - B$ blir den delen av A som *ikke* er skravert.

Slike Venn-diagram er nyttige til å illustrere sammenhenger mellom mengder. De er også nyttige når vi skal bevise regneregler. Nedenfor ser du hvordan vi kan vise at

$$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c.$$



Her er A^c alt som ligger utenfor A , d.v.s. det som er skravert. På tilsvarende måte er B^c alt som er utenfor B . Snittet av disse to mengdene blir da alt som er skravert på *begge* de to figurene til venstre ovenfor. På figuren til høyre ovenfor ser vi at dette er det samme som området utenfor $A \cup B$. Da har vi vist at $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$.

Denne regelen er en av de to **deMorgans lover for mengder**. Disse lovene ser slik ut:

deMorgans lover for mengder:
La A og B være to mengder. Da er:
 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
 $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Lovene er enklere å huske dersom vi bruker skrivemåten $\overline{A}$ istedenfor A^c for å betegne en komplementmengde. Med denne skrivemåten blir regelen ovenfor:

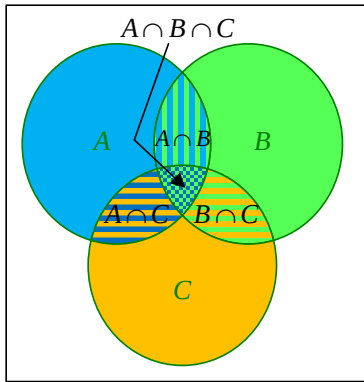
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Huskeregel: Bryt komplementerings-streken, og skift $\cap/\cup$ -tegn.

deMorgans lover inngår i samlingen av regneregler for [mengdealgebra](#).

[Oppgave 4.2.3.](#)



Dersom vi har tre mengder, er det viktig å tegne Venn-diagrammet slik at alle kombinasjoner av mengder kommer med. Til venstre ser du hvordan vi tegner et Venn-diagram for de tre mengdene A , B og C .

Legg merke til hvordan de sammensatte mengdene $A \cap B$, $A \cap C$ og $B \cap C$ framkommer. Merk at ”trekanten” $A \cap B \cap C$ i midten er med i alle disse tre snitt-mengdene!

4.2.4. Antall elementer i mengder.

I mange praktiske situasjoner er det viktig å bestemme hvor mange elementer det er i sammensatte mengder. Vi skal da bruke skrivemåten $n(A)$ for å angi antall elementer i mengden A (noen lærebøker bruker n_A). Da har vi denne grunnregelen:

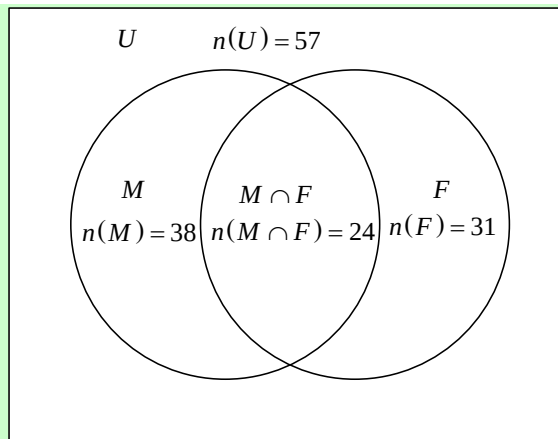
La $n(M)$ stå for antall elementer i mengden M .
Dersom A og B er to mengder med samme grunnmengde, har vi at:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Regelen vises ved hjelp av et Venn-diagram: Når du summerer antall elementer i A og antall elementer i B , vil du telle elementene i $A \cap B$ to ganger. For å finne antall elementer i $A \cup B$, må du trekke antall elementer i $A \cap B$ fra summen av antall elementer i A og antall elementer i B .

Eksempel 4.2.8: Ved en høyskole var det 57 studenter som gikk opp til eksamen i både matematikk og fysikk. Da sensurlistene forelå, var det 38 studenter som hadde stått i matematikk, og 31 som hadde stått i fysikk. Av disse hadde 24 stått i begge fagene. Hvor mange studenter hadde strøket i begge fagene?

Løsning: La U være mengden av studenter som gikk opp til eksamen i begge fagene. Da er $n(U) = 57$. La M og F være mengden av studenter som sto i henholdsvis matematikk og fysikk. Da er $n(M) = 38$ og $n(F) = 31$. Vi innser at $M \cup F$ er mengden av studenter som har stått i minst ett av fagene, mens $M \cap F$ er mengden av studenter som har stått i begge. Situasjonen kan illustreres i et Venn-diagram slik:



Telleregelen i ramma ovenfor gir at

$$\begin{aligned} n(M \cup F) &= n(M) + n(F) - n(M \cap F) \\ &= 38 + 31 - 24 \\ &= 45 \end{aligned}$$

Det er altså 45 studenter som har stått i minst ett av fagene. Da er det
 $57 - 45 = \underline{\underline{12}}$
 studenter som har strøket i begge fagene.

Dersom vi har tre mengder A , B og C , blir telleregelen mer komplisert:

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) \\ &\quad - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) \\ &\quad + n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Regelen kan vises med Venn-diagram, eller vi kan bruke [mengdealgebra](#).

Hva kan vi bruke mengdelære til? Vi kan raskt ramse opp flere bruksområder:

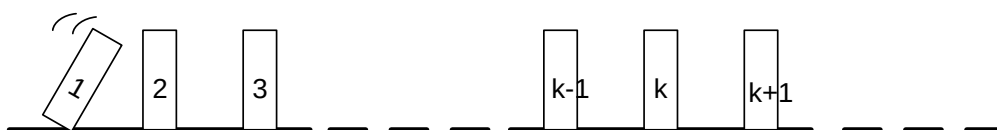
- Mengdelæra gir oss en terminologi og et sett symboler som viser seg å være svært nyttig i mange sammenhenger.
- Vi bruker matematisk logikk og begrep fra mengdelæra når vi går nærmere inn på hva som egentlig skjer når vi [løser likninger](#) eller system av likninger.
- Mengdelære er uunnværlig innenfor sannsynlighetsregning.

Du vil derfor stadig komme tilbake til begrep fra mengdelæra, selv om mengdelæra i utgangspunktet ikke virker særlig nyttig for en ingeniør.

[Oppgave 4.2.4](#).

4.3. Induksjonsbevis.

En dag du ikke har noe bedre å gjøre, stiller du opp noen domino-brikker slik at dersom en brikke velter, så tar den med seg neste brikke i fallet. Dette gjelder uansett hvilken brikke som velter. Hvis du nå velter den første brikken, vil alle de andre brikkene også velte etter tur. Logisk, ikke sant?



Dette lille eksperimentet illustrerer et viktig matematisk prinsipp som kalles **induksjonsprinsippet**. Vi skal bruke det til å føre **induksjonsbevis**. Det kan formuleres slik:

Induksjonsbeviset:

Gitt et åpent utsagn $U(n)$, der n er et helt tall større enn eller lik en verdi n_0 .

Vi kan vise at $U(n)$ er sann for alle $n \geq n_0$ slik:

- 1) Vis at $U(n_0)$ er sann. Dette kalles *induksjonsgrunnlaget*.
- 2) Vis at dersom $U(k)$ er sann, må også $U(k+1)$ være sann.

Eller: $U(k) \Rightarrow U(k+1)$.

Dette kalles *induksjonstrinnet*.

Da må $U(n)$ være sann for alle $n \geq n_0$.

Hva har nå denne formuleringen med domino-brikkene å gjøre? La oss formulere domino-eksperimentet matematisk:

$U(n)$: Domino-brikke nr. n velter.

Sett $n_0 = 1$. Induksjonsgrunnlaget blir da $U(1)$, d.v.s. at den første domino-brikken i rekka velter. Videre har du stilt opp brikkene slik at dersom brikke nr. k velter, så velter også nabobrikken, d.v.s. at brikke nr. $k+1$ velter. Eller: $U(k) \Rightarrow U(k+1)$. Dette fører til at brikke nr. 1 river med seg brikke nr. 2, som river med seg brikke nr. 3, som ... som river med seg brikke nr. k , som river med seg brikke nr. $k+1$, som osv... Dermed velter alle brikkene etter tur.

Nå er tiden inne til å bruke dette prinsippet til et matematisk bevis:

Eksempel 4.3.1: Bruk induksjon til å vise at:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ for alle } n \in \mathbb{N}.$$

Løsning: Vi formulerer dette som et åpent utsagn:

$$U(n): 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ for alle } n \in \mathbb{N}.$$

Vi starter med å etablere induksjonsgrunnlaget. Vi setter inn $n = 1$ i utsagnet, og får

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

som er et sant utsagn.

Deretter sjekker vi induksjonstrinnet. Vi setter $n = k$ og får

$$U(k): 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Så setter vi $n = k+1$ og får

$$U(k+1): 1+2+3+\dots+(k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Nå skal vi *anta* at $U(k)$ er sant, og undersøke om dette fører til at også $U(k+1)$ er sant. Vi merker oss først at venstre side i $U(k+1)$ kan skrives

$$1+2+3+\dots+k+(k+1).$$

Så *forutsetter* vi at $U(k)$ er sant. Venstre side av $U(k+1)$ kan da omformes slik:

$$\underbrace{1+2+3+\dots+k}_{=\frac{k(k+1)}{2}} + (k+1) \stackrel{1)}{=} \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \stackrel{2)}{=} \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \stackrel{3)}{=} \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Forklaring til overgangene:

- 1) Siden vi forutsetter at $U(k)$ er sant, kan vi erstatte $1+2+3+\dots+k$ med $\frac{k(k+1)}{2}$.
- 2) Setter opp på felles brøkstrek.
- 3) Setter $(k+1)$ utenfor parentes.

Nå har vi vist at *dersom* $U(k)$ er sant, så er også $U(k+1)$ sant. Vi vet at $U(1)$ er sant. Da må også $U(2)$ være sant, slik at $U(3)$ må være sant, og $U(4)$ må være sant, osv... Utsagnet må være sant for alle $n \in \mathbb{N}$.

Du bør merke deg at denne metoden kun kan brukes til å *vise* at en formel stemmer. Metoden kan ikke brukes til å *utlede* en formel. For å kunne bruke metoden, må du altså først *anta* at vi har en eller annen sammenheng, og deretter bruke induksjon til å undersøke om sammenhengen alltid stemmer. Eksemplet nedenfor viser en slik situasjon.

Eksempel 4.3.2: En dag du sitter og leker med kalkulatoren din, oppdager du noe påfallende:

$$1+3=4=2^2$$

$$1+3+5=9=3^2$$

$$1+3+5+7=16=4^2$$

$$1+3+5+7+9=25=5^2$$

Dessuten er det jo opplagt at $1=1^2$. Det ser ut til å være et system:

Summen av de n første positive oddetallene er lik n^2 .

Du har allerede påvist at regelen gjelder for $n=1, 2, 3, 4$ og 5 . Men dermed er det ikke sikkert at regelen gjelder generelt. Bruk induksjon til å påvise at denne regelen stemmer for alle $n \in \mathbb{N}$.

Løsning: Først må vi formulere påstanden vår mer matematisk. Vi legger først merke til at oddetall nr. n har verdien $2n-1$ (bare sjekk med tallene ovenfor). Påstanden kan forresten bevises med et eget lite induksjonsbevis, der vi starter med at første oddetall er 1, og at det er avstand 2 mellom hvert oddetall. Vår påstand kan da formuleres som dette utsagnet:

$$U(n): 1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2, n \in \mathbb{N}.$$

Vi har allerede påvist at utsagnet er sant for $n = 1, 2, 3, 4$ og 5 , slik at induksjonsgrunnlaget er grundig etablert. Så går vi i gang med induksjonstrinnet.

Vi setter først $n = k$, og får

$$U(k): 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2.$$

Så setter vi $n = k + 1$, og får

$$U(k + 1): 1 + 3 + 5 + \dots + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2.$$

Vi antar at utsagnet stemmer for en vilkårlig positiv verdi $n = k$. Da kan venstre side av $U(k + 1)$ omformes slik:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) &\stackrel{1)}{=} k^2 + (2(k + 1) - 1) \stackrel{2)}{=} k^2 + 2k + 2 - 1 \\ &\stackrel{3)}{=} k^2 + 2k + 1 \stackrel{4)}{=} (k + 1)^2 \end{aligned}$$

Forklaring til overgangene:

- 1) Siden vi forutsetter at $U(k)$ er sant, kan vi erstatte $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1)$ med k^2 .
- 2) Ganger ut parentesen.
- 3) Trekker sammen.
- 4) Bruker kvadratsetning.

Dette viser at *dersom* $U(k)$ er sant, så er også $U(k + 1)$ sant. Vi har allerede påvist at utsagnet er sant for $n = 1, 2, 3, 4$ og 5 . Da er også $U(6)$ sant, og $U(7)$ er sant, og $U(8)$ er sant, osv... Utsagnet må være sant for alle $n \in \mathbb{N}$.

Oppg. 4.3.1.

Så tar vi et eksempel der det er viktig å "oversette" den påstanden som skal bevises til matematisk språkdrakt.

Eksempel 4.3.3: Bruk induksjon til å vise at $4^n - 1$ er delelig med 3 for alle $n \in \mathbb{N}$.

Løsning: Vi starter med å sette inn noen verdier for n slik at vi ser hva påstanden egentlig går ut på. Samtidig etableres induksjonsgrunnlaget.

$$n = 1: \quad 4^1 - 1 = 4 - 1 = 3 = 3 \cdot 1.$$

$$n = 2: \quad 4^2 - 1 = 16 - 1 = 15 = 3 \cdot 5.$$

$$n = 3: \quad 4^3 - 1 = 64 - 1 = 63 = 3 \cdot 21.$$

$$n = 4: \quad 4^4 - 1 = 256 - 1 = 255 = 3 \cdot 85.$$

Vi ser at påstanden stemmer for $n = 1, 2, 3$ og 4 . Vi ser også at når et positivt tall er delelig med 3, må tallet kunne skrives som $3 \cdot t$ der $t \in \mathbb{N}$. Nå er vi klar til å formulere vår påstand matematisk:

$$U(n): \quad \text{For alle } n \in \mathbb{N} \text{ eksisterer et tall } t \in \mathbb{N} \text{ slik at } 4^n - 1 = 3 \cdot t.$$

Induksjonsgrunnlaget er allerede etablert. Vi går i gang med induksjonstrinnet.

$$U(k): \quad 4^k - 1 = 3 \cdot t_1 \text{ der } t_1 \in \mathbb{N}.$$

$$U(k+1): 4^{k+1} - 1 = 3 \cdot t_2 \text{ der } t_2 \in \mathbb{N}.$$

Vi antar at $U(k)$ er sant. Så går vi i gang med å omforme venstre side i $U(k+1)$:

$$4^{k+1} - 1 \stackrel{(1)}{=} 4^k \cdot 4^1 - 1 \stackrel{(2)}{=} (3 \cdot t_1 + 1) \cdot 4 - 1 \stackrel{(3)}{=} 12 \cdot t_1 + 4 - 1 \stackrel{(4)}{=} 12t_1 + 3 \stackrel{(5)}{=} 3(4t_1 + 1) \stackrel{(6)}{=} 3 \cdot t_2.$$

Forklaring til overgangene:

- 1: Bruker potens-regneregel: $4^{k+1} = 4^k \cdot 4^1$.
- 2: Forutsetter at $U(k)$ er sant. Da gjelder $4^k - 1 = 3 \cdot t_1 \Leftrightarrow 4^k = 3 \cdot t_1 + 1$.
- 3: Ganger ut parentesen.
- 4: Trekker sammen.
- 5: Setter 3 som felles faktor utenfor parentes.
- 6: Setter $t_2 = 4t_1 + 1$. Siden $t_1 \in \mathbb{N}$, må også $t_2 \in \mathbb{N}$.

Vi har altså vist at dersom $U(k)$ er sant, må også $U(k+1)$ være sant. Og siden påstanden stemmer for $n=1$, må den også stemme for alle andre verdier av $n \in \mathbb{N}$.

Opppg. 4.3.2.

Hittil har vi bare vist at formler stemmer. Men vi kan også bruke induksjonsbevis til å vise at ulikheter stemmer, noe neste eksempel viser.

Eksempel 4.3.4: Vis at:

Hvis $x > -1$, så er $(1+x)^n \geq 1+nx$ for alle $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$.

Løsning: Vi starter med å formulere påstanden som et utsagn:

$$U(n): \text{ Hvis } x > -1, \text{ blir } (1+x)^n \geq 1+nx \text{ for alle } n \in \{2, 3, 4, \dots\}.$$

Så må vi etablere induksjonsgrunnlaget. Vi setter $n=2$, og utsagnet blir:

$$U(2): (1+x)^2 = 1+2x+x^2 \geq 1+2x \text{ som er sant fordi } x^2 \geq 0 \text{ for alle } x.$$

Til slutt kommer induksjonstrinnet. For oversiktens skyld sløyfer vi betingelsene $x > -1$ og $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$ når vi setter opp utsagnene:

$$U(k): (1+x)^k \geq 1+kx.$$

$$U(k+1): (1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x.$$

Vi omformer venstre side av $U(k+1)$, og forutsetter at $U(k)$ er sant:

$$(1+x)^{k+1} \stackrel{(1)}{=} (1+x)^k (1+x) \stackrel{(2)}{\geq} (1+kx)(1+x) \stackrel{(3)}{=} 1+x+kx+kx^2 \stackrel{(4)}{\geq} 1+x+kx \stackrel{(5)}{=} 1+(k+1)x$$

Forklaring til overgangene:

- 1: Bruker potens-regneregel.

- 2: Forutsetter at $U(k)$ er sant. Da er $(1+x)^k \geq 1+kx$. Dessuten har vi forutsatt at $x > -1$, slik at $1+x$ er et positivt tall. Ulikheten $(1+x)^k \geq 1+kx$ er fremdeles oppfylt etter at vi har multiplisert begge sider med det positive tallet $1+x$.
- 3: Multipliserer ut parentesene.
- 4: Denne ulikheten må gjelde fordi $kx^2 \geq 0$.
- 5: Setter felles faktor x utenfor parentes.

Siden induksjonsgrunnlaget er sant, og induksjonstrinnet også er sant, har vi bevist påstanden.

Oppg. 4.3.3.

5. Polynomdivisjon.

5.1. Divisjonsteknikken.

Du vet sikkert at et uttrykk av formen

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

er et polynom av n 'te grad. For eksempel er uttrykket

$$2x^3 - x + 1$$

et tredjegradspolynom, mens et tall (for eksempel 4) alene kan oppfattes som et nulltegrads-polynom.

La oss gå rett på sak:

Dersom $P(x)$ og $Q(x)$ er to polynomer, der $P(x)$ har høyere grad enn $Q(x)$, kan vi alltid skrive

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv K(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Her er $K(x)$ et polynom som vi kaller *kvotienten*, mens polynomet $R(x)$ kalles *divisjons-resten* og har lavere grad enn $Q(x)$.

Vi skal ikke bevise påstanden, men skal heller demonstrere hvordan vi går fram for å omforme brøker av formen

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

der $P(x)$ har høyere grad enn $Q(x)$ til uttrykk av formen

$$K(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Denne teknikken kalles **polynomdivisjon**.

Eksempel 5.1.1: Utfør polynomdivisjonen

$$\frac{3x^3 - x^2 + 2x + 4}{x + 2}.$$

Løsning: Jeg foretrekker et oppsett der jeg skriver brøken som en divisjon:

$$(3x^3 - x^2 + 2x + 4) : (x + 2).$$

Så deler jeg $3x^3$ på x (som er høyeste potens i nevnerpolynomet), og får $3x^2$. Dette fører jeg slik:

$$(3x^3 - x^2 + 2x + 4) : (x + 2) = 3x^2$$

Neste trinn er å multiplisere $3x^2$ med nevneren $x + 2$, og skrive resultatet under tellerpolynomet:

$$(3x^3 - x^2 + 2x + 4) : (x + 2) = 3x^2$$

$$3x^3 + 6x^2$$

Så trekker jeg $3x^3 + 6x^2$ fra det opprinnelige tellerpolynomet, slik at x^3 -leddet forsvinner:

$$(3x^3 - x^2 + 2x + 4) : (x + 2) = 3x^2$$

$$\underline{-(3x^3 + 6x^2)}$$

$$-7x^2 + 2x + 4$$

Nå gjentar jeg prosessen, ved at $-7x^2$ deles på x . Jeg får $-7x$, som skrives slik:

$$(3x^3 - x^2 + 2x + 4) : (x + 2) = 3x^2 - 7x$$

$$\underline{-(3x^3 + 6x^2)}$$

$$-7x^2 + 2x + 4$$

Deretter multipliseres $-7x$ med $x + 2$, resultatet skrives nederst og trekkes fra slik at x^2 -leddet forsvinner:

$$(3x^3 - x^2 + 2x + 4) : (x + 2) = 3x^2 - 7x$$

$$\underline{-(3x^3 + 6x^2)}$$

$$-7x^2 + 2x + 4$$

$$\underline{-(-7x^2 - 14x)}$$

$$16x + 4$$

Nå gjenstår det bare å dele $16x$ på x og få 16 , multiplisere 16 med $x + 2$, og trekke fra slik at x -leddet forsvinner:

$$(3x^3 - x^2 + 2x + 4) : (x + 2) = 3x^2 - 7x + 16$$

$$\underline{-(3x^3 + 6x^2)}$$

$$-7x^2 + 2x + 4$$

$$\underline{-(-7x^2 - 14x)}$$

$$16x + 4$$

$$\underline{-(16x + 32)}$$

$$-28$$

Endelig er vi ved veis ende. Vi har vist at

$$\frac{3x^3 - x^2 + 2x + 4}{x + 2} \equiv 3x^2 - 7x + 16 - \frac{28}{x + 2}.$$

Jeg vil anbefale at du er nøye med å skrive ledd med samme eksponent under hverandre, slik at det er lett å holde oversikten. Om nødvendig kan du skyte inn 0-ledd slik som i neste eksempel:

Eksempel 5.1.2: Utfør polynomdivisjonen

$$\frac{2x^4 + x^3 - 3x^2 + 3}{x^2 - 1}.$$

Løsning: Jeg skriver bare ned den fullstendige divisjonen uten å kommentere hver enkelt operasjon:

$$\begin{array}{r} (2x^4 + x^3 - 3x^2 + 0x + 3) : (x^2 + 0x - 1) = 2x^2 + x - 1 \\ -(2x^4 + 0x^3 - 2x^2) \\ \hline x^3 - x^2 + 0x + 3 \\ -(x^3 + 0x^2 - x) \\ \hline -x^2 + x + 3 \\ -(-x^2 - 0x + 1) \\ \hline x + 2 \end{array}$$

Resultatet blir altså:

$$\frac{2x^4 + x^3 - 3x^2 + 3}{x^2 - 1} \equiv 2x^2 + x - 1 + \frac{x + 2}{x^2 - 1}.$$

Oppgave 5.1.1.

5.2. Mer faktorisering.

Vi sier at **polynomdivisjonen går opp dersom restleddet** $R(x) \equiv 0$. Da kan vi skrive

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv K(x) \Leftrightarrow P(x) \equiv K(x) \cdot Q(x).$$

Vi ser at polynomet $P(x)$ er blitt *faktorisert* i de to faktorene $K(x)$ og $Q(x)$.

Det er vanskelig å sette opp generelle kriterier for at en polynomdivisjon skal gå opp uten å utføre selve divisjonen. Men ett spesialtilfelle er viktig, og er forholdsvis lett å handtere:

Dersom $P(a) = 0$, vil polynomdivisjonen $P(x) : (x - a)$ gå opp.

Vi sier at $P(x)$ er delelig med $(x - a)$ eller at $(x - a)$ er faktor i $P(x)$.

Dette ser vi enkelt: Dersom divisjonen $P(x) : (x - a)$ går opp, har vi

$$\frac{P(x)}{x - a} \equiv K(x) \Leftrightarrow P(x) \equiv K(x) \cdot (x - a).$$

Sett inn $x = a$ slik at $x - a = 0$. Hvis nå $P(a) = 0$, ser du at identiteten er oppfylt.

Eksempel 5.2.1: Undersøk om polynomet

$$P(x) = x^3 - x^2 + x + 3$$

har $(x-1)$, $(x+1)$ eller $(x-2)$ som faktor.

Bruk resultatet til å faktorisere $P(x)$.

Løsning: Regner ut $P(1)$, $P(-1)$ og $P(2)$, og får:

$$P(1) = 1^3 - 1^2 + 1 + 3 = 4$$

$$P(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 + (-1) + 3 = 0 \text{ slik at } x - (-1) = x + 1 \text{ er faktor i } P(x).$$

$$P(2) = 2^3 - 2^2 + 2 + 3 = 9.$$

Vi ser at bare $P(-1) = 0$, slik at $P(x)$ kun er delelig med faktoren $x - (-1) = x + 1$.

Da kan vi utføre en polynomdivisjon:

$$\begin{array}{r} (x^3 - x^2 + x + 3) : (x + 1) = \underline{x^2 - 2x + 3} \\ -(x^3 + x^2) \\ \hline -2x^2 + x + 3 \\ -(-2x^2 - 2x) \\ \hline 3x + 3 \\ -(3x + 3) \\ \hline 0 \end{array}$$

Dette fører til at

$$x^3 - x^2 + x + 3 \equiv \underline{\underline{(x^2 - 2x + 3)(x + 1)}}.$$

For sikkerhets skyld kan du vise at likningen $x^2 - 2x + 3 = 0$ ikke har reelle løsninger, slik at $(x^2 - 2x + 3)$ ikke lar seg faktorisere videre i reelle faktorer.

Eksemplet over illustrerer et vanlig problem: Du har et polynom av typen

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

der a_0 er et helt tall, og skal prøve å finne eventuelle faktorer $x - a$ der a er et helt tall slik at $P(x)$ er delelig med $x - a$. Da kan du få bruk for setningen nedenfor:

Dersom

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

skal være delelig med $x - a$ der a og a_0 er hele tall, må a være faktor i a_0 .

Væpnet med setningen over kunne du med en gang sagt at i Eksempel 5.2.1 kan $x^3 - x^2 + x + 3$ umulig være delelig med $(x - 2)$ fordi 2 ikke er faktor i $a_0 = 3$.

Eksempel 5.2.2: Faktoriser (om mulig) polynomet

$$P(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12.$$

Løsning: Vi ser at a kan være $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6$ eller ± 12 fordi alle disse tallene er faktorer i 12. Vi prøver oss fram:

$$P(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^3 - 7 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 + 12 = 12.$$

$$P(-1) = (-1)^4 - 2 \cdot (-1)^3 - 7 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot (-1) + 12 = 0 \text{ slik at } x+1 \text{ er faktor i } P(x).$$

$$P(2) = 2^4 - 2 \cdot 2^3 - 7 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 + 12 = 0 \text{ slik at } x-2 \text{ er faktor i } P(x).$$

Nå vet vi at $P(x)$ er delelig med

$$(x+1)(x-2) = x^2 - 2x + x - 2 = x^2 - x - 2.$$

Vi utfører polynomdivisjonen:

$$(x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12) : (x^2 - x - 2) = x^2 - x - 6$$

$$\begin{array}{r} -(x^4 - x^3 - 2x^2) \\ \hline -x^3 - 5x^2 + 8x + 12 \\ -(-x^3 + x^2 + 2x) \\ \hline -6x^2 + 6x + 12 \\ -(-6x^2 + 6x + 12) \\ \hline 0 \end{array}$$

Til slutt faktoreriserer vi $x^2 - x - 6$ ved hjelp av formelen for løsning av andregradslikning:

$$x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \begin{cases} \frac{1+5}{2} = 3 \\ \frac{1-5}{2} = -2 \end{cases}$$

slik at

$$x^2 - x - 6 = (x-3)(x-(-2)) = (x-3)(x+2).$$

Dermed har vi at

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = (x^2 - x - 2)(x^2 - x - 6) \\ &= \underline{\underline{(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)}} \end{aligned}$$

Oppgave 5.2.1.

6. Delbrøkoppspalting.

Du vet sikkert hvordan vi kan legge sammen flere brøker med ulike nevnerer til en brøk med fellesnevner. Delbrøkoppspalting er det motsatte: vi starter med en brøk der nevneren er et produkt av flere faktorer, og spalter den opp i en sum av flere brøker der hver brøk har enklest mulig nevner. I dette kapitlet skal jeg gi en oversikt over hvordan vi går fram for å foreta en delbrøkoppspalting.

6.1. Faktorisering av nevneren.

Vi må starte med en brøk der både teller og nevner er polynomer i den frie variable (heretter kalt x), og tellerpolynomet er av lavere grad enn nevnerpolynomet. Vår første deloppgave er da å faktorisere nevnerpolynomet.

Et polynom lar seg alltid faktorisere i reelle første- eller andregradsfaktorer. Vi har allerede sett på faktorerings-teknikker i flere sammenhenger. La oss summere opp:

1. Se etter felles faktorer som kan settes utenfor parentes.
2. Undersøk om 3. kvadratsetning kan brukes: $x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$.
3. Dersom andregradslikningen $ax^2 + bx + c = 0$ har to reelle røtter $x = x_1$ og $x = x_2$, kan $ax^2 + bx + c$ faktorerisere til $a(x - x_1)(x - x_2)$.
4. Dersom du ser at et polynom blir lik null når $x = x_1$, kan polynomet deles på $x - x_1$ slik at du får et polynom av lavere grad som kan faktorerisere som angitt ovenfor.

Eksempel 6.1.1: Faktorer disse polynomene:

- a) $x^3 - 3x^2 + 2x$.
- b) $2x^4 + 3x^3 - 2x^2$.
- c) $x^4 - 8x^2 + 16$.
- d) $2x^3 - 7x^2 + 2x + 3$.
- e) $x^3 + 3x^2 + 4x + 12$.

Løsning:

- a) Vi starter med å sette x utenfor parentes:

$$x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 - 3x + 2).$$

Så løser vi andregradslikningen

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 2 \cdot 4}}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = 2 \\ \frac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

Da er

$$x^3 - 3x^2 + 2x = \underline{\underline{x(x - 2)(x - 1)}}.$$

- b) Vi starter med å sette x^2 utenfor parentes:

$$2x^4 + 3x^3 - 2x^2 = x^2(2x^2 + 3x - 2).$$

Så løser vi andregradslikningen

$$2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \begin{cases} \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{-3-5}{4} = -2 \end{cases}$$

Da er

$$2x^4 + 3x^3 - 2x^2 = x^2 \cdot 2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - (-2)\right) = \underline{\underline{x^2(2x-1)(x+2)}}.$$

c) Det gitte polynomet kan faktoriseres ved hjelp av 2. kvadratsetning slik:

$$x^4 - 8x^2 + 16 = (x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot 4 + 4^2 = (x^2 - 4)^2 = \underline{\underline{((x+2)(x-2))^2 = (x+2)^2(x-2)^2}}.$$

d) Vi ser ved innsetting at $2x^3 - 7x^2 + 2x + 3 = 0$ når $x = 1$. Da gir en polynomdivisjon (der jeg hopper over detaljer) at

$$(2x^3 - 7x^2 + 2x + 3) : (x - 1) = 2x^2 - 5x - 3,$$

som kan faktoriseres videre ved å løse andregradslikningen

$$2x^2 - 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \begin{cases} \frac{5+7}{4} = 3 \\ \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Dermed har jeg at

$$2x^3 - 7x^2 + 2x + 3 = (x - 1) \cdot 2\left(x - 3\right)\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \underline{\underline{(x-1)(x-3)(2x+1)}}.$$

e) Her er det plundrete å prøve seg fram til en x -verdi som gjør at polynomet blir lik null. Men med litt smartness kan vi faktorisere slik:

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 12 = x^2(x + 3) + 4(x + 3) = \underline{\underline{(x^2 + 4)(x + 3)}}.$$

Legg merke til at $x^2 + 4$ ikke kan faktoriseres videre i reelle 1.gradsfaktorer. Vi må derfor finne oss i at faktoriseringen inneholder et 2.gradspolynom.

I resten av dette kapitlet skal jeg forutsette at nevneren allerede er faktorisert, og konsentrere meg om delbrøkkoppspaltingen. Denne går ut på å uttrykke den gitte brøken som en sum av enklere brøker som har de faktorene vi har funnet som nevner. Jeg skal vise framgangsmåten for de vanligste situasjonene som kan forekomme.

6.2. Forskjellige førstegradsfaktorer i nevneren.

Dersom nevneren kun består av forskjellige, reelle førstegradsfaktorer, omformer vi til en sum av brøker der tellerne er konstanter og nevnerne er de faktorene som vi har funnet.

Eksempelene nedenfor viser framgangsmåten.

Eksempel 6.2.1: Delbrøkkoppspalt uttrykkene nedenfor:

a) $\frac{3x + 2}{x(x + 2)}.$

b) $\frac{3x^2 - 7x - 4}{x(x - 2)(x + 1)}.$

Løsning:

a) Vi skal nå finne to tall A og B slik at

$$\begin{aligned}\frac{3x+2}{x(x+2)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} = \frac{A}{x} \cdot \frac{x+2}{x+2} + \frac{B}{x+2} \cdot \frac{x}{x} = \frac{A(x+2) + Bx}{x(x+2)} \\ &= \frac{Ax + 2A + Bx}{x(x+2)} = \frac{(A+B)x + 2A}{x(x+2)}\end{aligned}$$

Dette er egentlig en serie *identiteter*, slik at første og siste brøk skal være like for alle verdier av x . Da må vi ha at

$$A + B = 3$$

$$2A = 2$$

Av den siste likningen får vi direkte at $A = 1$, som innsatt i den første likningen gir

$$1 + B = 3 \Leftrightarrow B = 2.$$

Dermed har vi delbrøkkoppstillingen

$$\frac{3x+2}{x(x+2)} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x+2}.$$

b) Vi skal nå finne tre tall A , B og C slik at

$$\begin{aligned}\frac{3x^2 - 7x - 4}{x(x-2)(x+1)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1} = \frac{A(x-2)(x+1) + B \cdot x(x+1) + C \cdot x(x-2)}{x(x-2)(x+1)} \\ &= \frac{Ax^2 - Ax - 2A + Bx^2 + Bx + Cx^2 - 2Cx}{x(x-2)(x+1)} \\ &= \frac{(A+B+C)x^2 + (-A+B-2C)x + (-2A)}{x(x-2)(x+1)}\end{aligned}$$

Her må koeffisientene foran x^2 , x og konstantleddet være like i første og siste brøk. Dette gir likningssystemet

$$A + B + C = 3$$

$$-A + B - 2C = -7$$

$$-2A = -4$$

Vi ser direkte av siste likning at $A = 2$. Hvis vi skifter fortegn på andre likning og deretter legger sammen alle tre likningene, får vi

$$3C = 6 \Leftrightarrow C = 2.$$

Av første likning får vi nå at

$$B = 3 - A - C = 3 - 2 - 2 = -1.$$

Dermed har vi at

$$\frac{3x^2 - 7x - 4}{x(x-2)(x+1)} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+1}.$$

Oppgave 6.2.1.

6.3. Flere like førstegradsfaktorer i nevneren.

Dersom nevneren inneholder flere like førstegradsfaktorer, d.v.s. faktorer av typen $(x - a)^n$, er det oftest mest hensiktsmessig å bruke delbrøker av typen

$$\frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x - a)^n}.$$

Eksemplet nedenfor viser framgangsmåten.

Eksempel 6.3.1: Delbrøkoppspalt brøken

$$\frac{x^2 + 2}{x(x - 1)^2}.$$

Løsning: Vi må finne tall A , B og C slik at

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 2}{x(x - 1)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x - 1} = \frac{A(x - 1)^2 + Bx + Cx(x - 1)}{x(x - 1)^2} \\ &= \frac{Ax^2 - 2Ax + A + Bx + Cx^2 - Cx}{x(x - 1)^2} = \frac{(A + C)x^2 + (-2A + B - C)x + A}{x(x - 1)^2} \end{aligned}$$

Siden dette er en identitet, må vi ha at

$$\begin{aligned} A + C &= 1 \\ -2A + B - C &= 0 \\ A &= 2 \end{aligned}$$

Dette likningssystemet løses uten problemer, og vi får

$$\begin{aligned} A &= 2, \\ C &= 1 - A = -1, \\ B &= C + 2A = 3. \end{aligned}$$

Dermed har vi at

$$\frac{x^2 + 2}{x(x - 1)^2} = \frac{2}{x} + \frac{3}{(x - 1)^2} - \frac{1}{x - 1}.$$

Oppgave 6.3.1.

6.4. "Tildekkingsmetoden".

Når nevneren består av bare ulike førstegradsfaktorer, har vi en snarvei som kan forenkle delbrøkoppspaltningen. Metoden kalles gjerne "tildekkingsmetoden" eller "metoden med håndspålegging". Den er enklere å gjennomføre enn å forklare. Eksemplet nedenfor viser både den formelle og den praktiske framgangsmåten.

Eksempel 6.4.1: Bruk "tildekkingsmetoden" til å delbrøkoppspalte

$$\frac{2}{(x + 1)(x - 1)}.$$

Løsning: Vi skal altså finne to konstanter A og B slik at

$$\frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}.$$

Formelt går vi fram slik: For å finne A , multipliserer vi begge sider av likhetstegnet med nevneren i den brøken som har A som teller, d.v.s. med $x+1$. Da får vi

$$\frac{2}{(x+1)(x-1)}(x+1) = \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} \right)(x+1) \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} = A + \frac{B}{x-1}(x+1).$$

Så setter vi $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$, og får

$$\frac{2}{-1-1} = A + \frac{B}{(-1)-1} \cdot (1-1) \Leftrightarrow A = \frac{2}{-2} = -1.$$

Vi finner B ved å multiplisere med nevneren i den brøken som har B som teller, d.v.s. med $x-1$. Da får vi

$$\frac{2}{(x+1)(x-1)}(x-1) = \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} \right)(x-1) \Leftrightarrow \frac{2}{x+1} = \frac{A(x-1)}{x+1} + B.$$

Så setter vi $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$. Da får vi

$$\frac{2}{1+1} = \frac{A \cdot (1-1)}{1+1} + B \Leftrightarrow B = \frac{2}{2} = 1.$$

Den praktiske framgangsmåten er mye enklere. For å finne A , "tildekkes" alle forekomstene av nevneren $x+1$, og *alle andre delbrøker*. Vi får altså

$$\frac{2}{\cancel{(x+1)}(x-1)} = \frac{A}{\cancel{x+1}} + \frac{\cancel{B}}{\cancel{x-1}}.$$

Så setter vi $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$, og får

$$A = \frac{2}{-1-1} = \frac{2}{-2} = -1.$$

Vi finner B på tilsvarende måte:

$$\frac{2}{(x+1)\cancel{(x-1)}} = \frac{\cancel{A}}{\cancel{x+1}} + \frac{B}{\cancel{x-1}}.$$

Vi setter $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$, og får

$$B = \frac{2}{1+1} = 1.$$

Oppgave 6.4.1.

Denne "tildekkingsmetoden" fungerer ikke like bra dersom vi har flere like førstegradsfaktorer i nevneren. Vi kan likevel komme et stykke på vei, slik eksemplet nedenfor viser.

Eksempel 6.4.2: Bruk "tildekkingsmetoden" til å delbrøkoppspalte brøken fra Eksempel 6.3.1:

$$\frac{x^2 + 2}{x(x-1)^2}.$$

Løsning: Som før skal vi finne tre konstanter A , B og C slik at

$$\frac{x^2 + 2}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1}.$$

Vi kan nå finne A og B med "tildekkingsmetoden":

$$\frac{x^2 + 2}{\cancel{x}(x-1)^2} = \frac{\cancel{A}}{\cancel{x}} + \frac{\cancel{B}}{(x-1)^2} + \frac{\cancel{C}}{\cancel{x-1}} \Leftrightarrow A = \frac{0^2 + 2}{(0-1)^2} = \underline{2}.$$

$$\frac{x^2 + 2}{x\cancel{(x-1)^2}} = \frac{\cancel{A}}{\cancel{x}} + \frac{B}{\cancel{(x-1)^2}} + \frac{\cancel{C}}{\cancel{x-1}} \Leftrightarrow B = \frac{1^2 + 2}{1} = \underline{3}.$$

Nå finner vi enklest C ved å sette inn det vi allerede vet:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 2}{x(x-1)^2} &= \frac{2}{x} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{2(x-1)^2 + 3x + Cx(x-1)}{x(x-1)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 4x + 2 + 3x + Cx^2 - Cx}{x(x-1)^2} = \frac{(2+C)x^2 + (-1-C)x + 2}{x(x-1)^2} \end{aligned}$$

Nå har vi to likninger som begge gir samme verdi for C :

$$2 + C = 1 \Leftrightarrow C = -1$$

og

$$-1 - C = 0 \Leftrightarrow C = -1.$$

Som før får vi da delbrøkkoppstillingen

$$\frac{x^2 + 2}{x(x-1)^2} = \frac{2}{x} + \frac{3}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1}.$$

6.5. Andregradsfaktorer i nevneren.

Dersom nevneren inneholder andregradsfaktorer som ikke kan faktorerises videre til reelle førstegradsfaktorer, må vi finne en delbrøk der telleren er av første grad. Eksemplet nedenfor viser framgangsmåten:

Eksempel 6.5.1: Delbrøkkoppspalt

$$\frac{7x + 3}{(x-1)(x^2 + 2x + 2)}.$$

Løsning: Vi merker oss at $x^2 + 2x + 2$ ikke kan faktorerises i reelle førstegradsfaktorer, for eksempel ved å prøve å løse likningen $x^2 + 2x + 2 = 0$, eller enklere ved å legge merke til at

$$x^2 + 2x + 2 = (x^2 + 2x + 1) + 1 = (x+1)^2 + 1$$

som aldri kan bli lik null. Vi må derfor benytte delbrøkkoppstillingen nedenfor:

$$\begin{aligned}\frac{7x+3}{(x-1)(x^2+2x+2)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2} = \frac{A(x^2+2x+2) + (Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+2x+2)} \\ &= \frac{Ax^2 + 2Ax + 2A + Bx^2 - Bx + Cx - C}{(x-1)(x^2+2x+2)} \\ &= \frac{(A+B)x^2 + (2A-B+C)x + (2A-C)}{(x-1)(x^2+2x+2)}\end{aligned}$$

Siden dette er en identitet, må vi ha at

$$A + B = 0$$

$$2A - B + C = 7$$

$$2A - C = 3$$

Vi kan starte med å legge sammen alle likningene. Da får vi

$$5A = 10 \Leftrightarrow A = 2.$$

Deretter gir den øverste likningen at

$$B = -A = -2$$

mens den nederste likningen gir

$$C = 2A - 3 = 2 \cdot 2 - 3 = 1.$$

Vi har altså delbrøkkoppstillingen

$$\frac{7x+3}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{2}{x-1} + \frac{-2x+1}{x^2+2x+2}.$$

Oppgave 6.5.1.

6.6. Flere like andregradsfaktorer i nevneren.

Dersom vi har flere like andregradsfaktorer i nevneren, d.v.s. faktorer av typen $(ax^2 + bx + c)^n$, finner vi etter samme prinsipp som tidligere delbrøker av typen

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}.$$

Eksemplet nedenfor viser framgangsmåten.

Eksempel 6.6.1: Delbrøkkoppspalt

$$\frac{-x^4 + 2x^3 + 6x - 9}{x(x^2 + 3)^2}.$$

Løsning: Den naturlige delbrøkkoppstillingen er

$$\begin{aligned}
 \frac{-x^4 + 2x^3 + 6x - 9}{x(x^2 + 3)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B_1x + C_1}{(x^2 + 3)} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + 3)^2} \\
 &= \frac{A(x^2 + 3)^2 + (B_1x + C_1) \cdot x(x^2 + 3) + (B_2x + C_2) \cdot x}{x(x^2 + 3)^2} \\
 &= \frac{Ax^4 + 6Ax^2 + 9A + B_1x^4 + 3B_1x^2 + C_1x^3 + 3C_1x + B_2x^2 + C_2x}{x(x^2 + 3)^2} \\
 &= \frac{(A + B_1)x^4 + C_1x^3 + (6A + 3B_1 + B_2)x^2 + (3C_1 + C_2)x + 9A}{x(x^2 + 3)^2}
 \end{aligned}$$

Sammenlikning av koeffisienter gir 5 likninger med 5 ukjente. Men dersom vi jobber systematisk, løser dette seg lett. Vi starter med konstantleddet, og ser at

$$9A = -9 \Leftrightarrow A = \underline{-1}.$$

Koeffisienten foran 4.gradsleddet gir nå

$$A + B_1 = -1 \Leftrightarrow B_1 = -A - 1 = -(-1) - 1 = \underline{0}.$$

Koeffisienten foran 3.gradsleddet gir direkte

$$C_1 = \underline{2}.$$

De to siste koeffisientene gir

$$6A + 3B_1 + B_2 = 0 \Leftrightarrow B_2 = -3B_1 - 6A = 0 - 6 \cdot (-1) = \underline{6}.$$

$$3C_1 + C_2 = 6 \Leftrightarrow C_2 = 6 - 3C_1 = 6 - 3 \cdot 2 = \underline{0}.$$

Da blir

$$\frac{-x^4 + 2x^3 + 6x - 9}{x(x^2 + 3)^2} = \underline{\underline{\frac{-1}{x} + \frac{2}{x^2 + 3} + \frac{6x}{(x^2 + 3)^2}}}$$

Oppgave 6.6.1.

7. Potens- og rotregning.

7.1. Grunnleggende definisjoner og regneregler for potensregning.

Vi har ofte bruk for å gange et tall a med seg selv n ganger. Dette skriver vi som a^n , der a kalles *grunntallet* og n kalles *eksponenten*. Vi har altså denne definisjonen:

Dersom n er et helt, positivt tall, er

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ faktorer}}$$

Med utgangspunkt i denne definisjonen har vi disse regnereglene:

$$1) \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$4) \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$2) \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$5) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$3) \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m} = (a^m)^n$$

For å vise at Regel 1 stemmer, kan vi først se på et eksempel:

$$a^2 \cdot a^3 = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a^5.$$

Generelt vises regelen slik:

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{m \text{ faktorer}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{n \text{ faktorer}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m+n \text{ faktorer}} = a^{m+n}$$

På tilsvarende måte vises Regel 2. Først et eksempel:

$$\frac{a^5}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a}} = \frac{a \cdot a \cdot a}{1} = a^3.$$

Generelt får vi (når $m > n$):

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\underbrace{a \cdot \dots \cdot a \cdot a}_{m \text{ faktorer}}}{\underbrace{a \cdot \dots \cdot a \cdot a}_{n \text{ faktorer}}} = \frac{\underbrace{a \cdot \dots \cdot a \cdot a}_{m-n \text{ faktorer}}}{1} = a^{m-n}.$$

I den midterste overgangen forkortes n faktorer bort, slik at vi står igjen med $m - n$ faktorer i teller.

Til slutt skal vi se på regel 3 som sier at

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} = (a^m)^n.$$

La oss som før starte med et eksempel:

$$(a^2)^3 = (a^2) \cdot (a^2) \cdot (a^2) = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a) \cdot (a \cdot a) = a^6.$$

$$(a^3)^2 = (a^3) \cdot (a^3) = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a^6.$$

Generelt får vi:

$$(a^n)^m = \underbrace{\left(\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ faktorer}} \right) \cdot \left(\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ faktorer}} \right) \cdot \dots \cdot \left(\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ faktorer}} \right)}_{\text{Gjentas } m \text{ ganger}} = \left(\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \cdot n \text{ faktorer}} \right) = a^{m \cdot n}.$$

Tilsvarende får vi for $(a^m)^n$.

Regel 3 kan brukes til å foreta smarte omforminger. Her er et par eksempler på dette:

$$a^{12} = (a^6)^2 = (a^4)^3 = (a^3)^4 = (a^2)^6.$$

$$8^x = (2^3)^x = 2^{3x} = (2^x)^3.$$

Slike omforminger kan ofte være nyttige. Det er ikke alltid lett å se hvilken form som er mest gunstig, så vi må ofte prøve oss fram for å finne den gunstigste formen.

Regel 4 og 5 kan du prøve å bevise selv etter samme framgangsmåte som ovenfor.

Vær obs på denne situasjonen:

$4 \cdot 3^2$ betyr at vi først skal regne ut 3^2 , og deretter multiplisere med 4. Vi får altså:

$$4 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = \underline{\underline{36}}.$$

Det er en alt for vanlig feil å gange sammen $4 \cdot 3$ først, og deretter opphøye i 2. Da får du det feilaktige resultatet $12^2 = 144$. Dersom du skal gange sammen $4 \cdot 3$ først, og deretter opphøye i 2, må du skrive $(4 \cdot 3)^2$. Vær nøye med parentesene!

Vi avslutter med et større eksempel:

Eksempel 7.1.1: Skriv uttrykket

$$\frac{(2x)^3 \cdot (x^2)^4}{4x^5} \cdot \left(\frac{x}{2} \right)^2$$

så enkelt som mulig.

Løsning: Vi omformer uttrykket slik ved hjelp av regnereglene ovenfor:

$$\begin{aligned} \frac{(2x)^3 \cdot (x^2)^4}{4x^5} \cdot \left(\frac{x}{2} \right)^2 &= \frac{2^3 \cdot x^3 \cdot x^{2 \cdot 4}}{4x^5} \cdot \frac{x^2}{2^2} = \frac{2^3 \cdot x^3 \cdot x^8 \cdot x^2}{4 \cdot 2^2 \cdot x^5} = \frac{8}{16} \cdot \frac{x^{3+8+2}}{x^5} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{13}}{x^5} = \frac{1}{2} \cdot x^{13-5} = \frac{1}{2} x^8 = \underline{\underline{\frac{x^8}{2}}} \end{aligned}$$

Oppgave 7.1.1.

7.2. Negative eksponenter.

Hittil har det vært underforstått at eksponentene er hele, positive tall. Men vi har bruk for potensregning også for andre eksponenter. Vi definerer derfor:

$$a^0 = 1 \text{ når } a \neq 0. \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Den første definisjonen begrunnes slik:

Når vi forkorter på vanlig måte, er $\frac{a^n}{a^n} = 1$.

Men når vi bruker regel 2, blir $\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$.

Siden det er hensiktsmessig å få samme resultat uansett regnemåte, er det naturlig å definere $a^0 = 1$.

For å begrunne den andre definisjonen, kan vi først se på et eksempel:

Når vi forkorter på vanlig måte, blir $\frac{a^2}{a^5} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a}}{a \cdot a \cdot a \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}} = \frac{1}{a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^3}$.

Men når vi bruker regel 2, blir $\frac{a^2}{a^5} = a^{2-5} = a^{-3}$.

Siden det er hensiktsmessig å få samme resultat uansett regnemåte, er det naturlig å definere $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$, eller generelt $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Med utgangspunkt i den siste av disse nye reglene kan Eksempel 7.1.1 ovenfor løses litt enklere etter disse retningslinjene:

1. Samle alle faktorer med samme grunntall.
2. Faktorer som flyttes fra nevner til teller (eller omvendt) skifter fortegn på eksponenten.
3. Legg sammen eksponentene for hvert grunntall.

Eksempel 7.2.1: Bruk bl.a. retningslinjene i ramma ovenfor til å forenkle uttrykket

$$\frac{(2x)^3 \cdot (x^2)^4}{4x^5} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

(samme som Eksempel 7.1.1).

Løsning:

$$\frac{(2x)^3 \cdot (x^2)^4}{4x^5} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{2^3 \cdot x^3 \cdot x^{2 \cdot 4}}{2^2 x^5} \cdot \frac{x^2}{2^2} = 2^{3-2-2} \cdot x^{3+8+2-5} = 2^{-1} \cdot x^8 = \frac{x^8}{2}$$

Oppgave [7.2.1](#), [7.2.2](#).

7.3. Rotregning.

Du vet sikkert at

$$\sqrt{25} = \pm 5 \text{ fordi } (\pm 5)^2 = 25$$

eller at

$$\sqrt{100} = \pm 10 \text{ fordi } (\pm 10)^2 = 100.$$

Generelt har vi derfor denne definisjonen av **kvadratrota** til et positivt tall:

$$\sqrt{a} = t \Rightarrow a = t^2$$

Nå trenger vi ikke å begrense oss til kvadratrøtter. Vi har også **tredje rot**:

$$\sqrt[3]{8} = 2 \text{ fordi } 2^3 = 8,$$

eller

$$\sqrt[3]{-125} = -5 \text{ fordi } (-5)^3 = -125.$$

Generelt har derfor at

$$\sqrt[3]{a} = t \Rightarrow a = t^3.$$

Vi merker oss at når det gjelder kvadratrøtter, kan vi kun trekke kvadratrota av positive tall. Resultatet er enten positivt eller negativt. Det skyldes at når vi kvadrerer et tall (positivt eller negativt), blir resultatet alltid positivt. Men når det gjelder tredje rot, kan vi godt trekke tredje rot av et negativt tall. Det skyldes at når et negativt tall opphøyes i tredje potens, blir resultatet negativt, mens et positivt tall som opphøyes i tredje potens alltid blir positivt.

Nå er vi klar til en generell definisjon av n -te rot av et tall:

$$\sqrt[n]{a} = t \Rightarrow a = t^n.$$

Vi kaller n for **roteksponenten**, mens a er **radikanden**.

Dersom n er et jamt tall, må a være positiv mens t kan være positiv eller negativ.

Dersom n er et oddetall, kan a være positiv eller negativ mens t har samme fortegn som a .

Legg merke til at:

- Dersom $n = 2$, har vi $\sqrt[2]{a}$ som vi skriver enklere som $\sqrt{a}$.
- Dersom n er et jamt tall, bruker vi vanligvis bare den positive verdien av rota dersom vi ikke sier noe annet. Det er derfor vanlig å si at $\sqrt{4} = 2$. Dersom vi vil ta med begge fortegnene, skriver vi gjerne $\pm\sqrt{4} = \pm 2$.

Eksempel 7.3.1: Bestem (om mulig) disse rotuttrykkene:

$$\sqrt{81}, \quad \sqrt[4]{81}, \quad \sqrt[3]{-64}, \quad \sqrt[5]{-32}, \quad \sqrt[4]{-81}.$$

Løsning:

$$\sqrt{81} = 9 \text{ fordi } 9^2 = 81.$$

$$\sqrt[4]{81} = 3 \text{ fordi } 3^4 = 81.$$

$$\sqrt[3]{-64} = -4 \text{ fordi } (-4)^3 = -64.$$

$$\sqrt[5]{-32} = -2 \text{ fordi } (-2)^5 = -32.$$

$\sqrt[4]{-81}$ eksisterer ikke (mer presist: det fins ingen reelle løsninger) fordi det ikke eksisterer noe reelt tall som er slik at når det opphøyes i 4. potens, får du -81 .

Oppgave 7.3.1.

På samme måte som for potensregning, har vi også noen regneregler for rotregning som det er kjekt å kunne:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad \sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$$

Eksempel 7.3.2: Skriv disse uttrykkene enklere:

$$\sqrt{9x^4}, \quad \sqrt[3]{8x^3}, \quad \sqrt{\frac{9}{25}}, \quad \sqrt{\frac{4x^2}{y^4}}, \quad (\sqrt{2})^4.$$

Løsning:

$$\sqrt{9x^4} = \sqrt{9x^2 \cdot x^2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x^2} = 3x \cdot x = \underline{\underline{3x^2}}.$$

$$\sqrt[3]{8x^3} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{x^3} = \underline{\underline{2x}}.$$

$$\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}.$$

$$\sqrt{\frac{4x^2}{y^4}} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{x^2}}{\sqrt{y^4}} = \frac{2x}{\underline{\underline{y^2}}}.$$

$$(\sqrt{2})^4 = \sqrt{2^4} = \sqrt{16} = \underline{\underline{4}}.$$

Noen ganger klarer vi ikke å kvitte oss helt med rottegnene, men vi kan likevel omforme uttrykkene noe slik eksemplene nedenfor viser:

Eksempel 7.3.3 Skriv uttrykkene nedenfor med så enkle rotuttrykk som mulig:

$$\sqrt{9x^5}, \quad \sqrt[3]{2x^7}, \quad \sqrt{\frac{x^5}{2y^4}}.$$

Løsning:

$$\sqrt{9x^5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{x^4 \cdot x} = 3 \cdot \sqrt{x^4} \cdot \sqrt{x} = \underline{\underline{3x^2 \cdot \sqrt{x}}}.$$

$$\sqrt[3]{2x^7} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{x^3 \cdot x^3 \cdot x} = \sqrt[3]{2} \cdot x \cdot x \cdot \sqrt[3]{x} = \underline{\underline{x^2 \cdot \sqrt[3]{2x}}}.$$

$$\sqrt{\frac{x^5}{2y^4}} = \frac{\sqrt{x^5}}{\sqrt{2y^4}} = \frac{\sqrt{x^2 \cdot x^2 \cdot x}}{\sqrt{2 \cdot y^2 \cdot y^2}} = \frac{x \cdot x \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{2} \cdot y \cdot y} = \frac{x^2}{y^2} \cdot \underline{\underline{\sqrt{\frac{x}{2}}}}.$$

Oppgave [7.3.2](#).

7.4. Fra rotregning til potensregning.

Det er faktisk en mye nærmere sammenheng mellom rotregning og potensregning enn vi har benyttet hittil. Vi har nemlig denne sammenhengen:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}.$$

Begrunnelsen for denne sammenhengen er:

Vi vet at

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

Men regnereglene for potensregning gir

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^1 = a.$$

Da er det fornuftig å definere

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}.$$

Denne regelen kan komme til nytte når vi forenkler rotuttrykk. Men den kommer enda mer til nytte senere når vi skal derivere og integrere.

De tre første eksemplene nedenfor er hentet fra Eksempel 7.3.3, men nå er de løst med potensregning. Det siste eksemplet er litt vanskeligere.

Eksempel 7.4.1: Skriv uttrykkene nedenfor med så enkle rotuttrykk som mulig:

$$\sqrt{9x^5}, \quad \sqrt[3]{2x^7}, \quad \sqrt{\frac{x^5}{2y^4}}, \quad \frac{(2x)^{-2}}{\sqrt{y^3}} \cdot \sqrt{8xy}.$$

Løsning:

$$\sqrt{9x^5} = (3^2 \cdot x^5)^{\frac{1}{2}} = (3^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (x^5)^{\frac{1}{2}} = 3^{2 \cdot \frac{1}{2}} \cdot x^{5 \cdot \frac{1}{2}} = 3^1 \cdot x^{2 + \frac{1}{2}} = 3x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{3x^2 \cdot \sqrt{x}}}.$$

$$\sqrt[3]{2x^7} = (2x^7)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{7}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot x^{2 + \frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^2 \cdot (2x)^{\frac{1}{3}} = \underline{\underline{x^2 \cdot \sqrt[3]{2x}}}.$$

$$\sqrt{\frac{x^5}{2y^4}} = \left(\frac{x^5}{2y^4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{2^{\frac{1}{2}} \cdot y^{4 \cdot \frac{1}{2}}} = \frac{x^{2 + \frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}} \cdot y^2} = \frac{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}} \cdot y^2} = \frac{x^2}{y^2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\frac{x^2}{y^2} \cdot \sqrt{\frac{x}{2}}}}.$$

$$\begin{aligned}\frac{(2x)^{-2}}{\sqrt{y^3}} \cdot \sqrt{8xy} &= \frac{2^{-2} \cdot x^{-2}}{(y^3)^{\frac{1}{2}}} \cdot (2^3)^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}} = 2^{-2+\frac{3}{2}} \cdot x^{-2+\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}} = 2^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{3}{2}} \cdot y^{-1} \\ &= \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{x^{1+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{y^1} = \frac{1}{xy \cdot \sqrt{2x}}\end{aligned}$$

I enkle oppgaver (som i de tre første eksemplene ovenfor) kan det virke mer tungvint å gå veien om potensregning enn å holde seg til rotregning. Men du skal ikke ha mye trening før du kan hoppe over mange av mellomleddene i eksemplene ovenfor. Og i oppgaver som inneholder en blanding av potens- og rotuttrykk slik som i det siste eksemplet ovenfor er det nesten alltid mer hensiktsmessig å benytte potensregning konsekvent enn å holde seg til rotregning. Det vil du sikkert oppdage når du jobber med **Oppgave 7.4.1**.

7.5. Mer om kvadratrøtter.

Sammentrekking av flerleddede uttrykk med kvadratrøtter følger vanlige regneregler, og bør gå uten særlige problemer:

Eksempel 7.5.1: Trekk sammen uttrykkene nedenfor:

- $\sqrt{x}(1-\sqrt{x}) + (x+1)$
- $(2\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2) - \sqrt{x}(1+2\sqrt{x})$

Løsning:

- $\sqrt{x}(1-\sqrt{x}) + (x+1) = \sqrt{x} - (\sqrt{x})^2 + x + 1 = \sqrt{x} - x + x + 1 = \underline{\underline{\sqrt{x} + 1}}.$
- $(2\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2) - \sqrt{x}(1+2\sqrt{x}) = 2(\sqrt{x})^2 + 4\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 6 - \sqrt{x} - 2(\sqrt{x})^2$
 $= 2x + 4\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 6 - \sqrt{x} - 2x = \underline{\underline{-6}}$

Oppgave 7.5.1.

Etter denne innledningen skal vi trekke sammen brøker som inneholder kvadratrøtter. Det mest systematiske er da å finne fellesnevneren for de brøkene som inngår, skrive alle brøkene med denne fellesnevneren som nevner, trekke sammen, og om mulig forenkle svaret til slutt. Men noen ganger kan vi få enklere regninger ved å forenkle brøker underveis, slik eksemplene nedenfor viser.

Eksempel 7.5.2: Trekk sammen brøkene nedenfor, og skriv svaret så enkelt som mulig:

- $\frac{x+1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}$
- $\frac{2\sqrt{x}+x}{x} - \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

Løsning:

a) Fellesnevneren er $\sqrt{x}$, slik at vi kan skrive

$$\frac{x+1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \frac{x+1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{x+1 - (\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} = \frac{x+1-x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Vi kan også starte med å forenkle den første brøken:

$$\frac{x+1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \left(\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) - \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

b) Fellesnevneren blir $x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$, slik at vi kan skrive

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{x}+x}{x} - \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} &= \frac{2\sqrt{x}+x}{x} - \frac{(1+\sqrt{x})\sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}+x}{x} - \frac{\sqrt{x} + (\sqrt{x})^2}{x} \\ &= \frac{(2\sqrt{x}+x) - (\sqrt{x}+x)}{x} = \frac{2\sqrt{x}+x-\sqrt{x}-x}{x} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Dersom vi starter med å forenkle leddene, får vi:

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{x}+x}{x} - \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} &= \left(\frac{2\sqrt{x}}{x} + \frac{x}{x} \right) - \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right) = \left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} + 1 \right) - \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 1 \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{x}} + 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Oppgave 7.5.2.

Nå vil jeg benytte anledningen til å komme med en advarsel. Nedenfor har jeg satt opp og krysset over to "regneregler" som **ikke** gjelder, selv om mange studenter tror at de gjelder:

~~$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$~~

~~$$\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$~~

Jeg skal illustrere dette med et par eksempler:

$$\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5, \text{ mens } \sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7.$$

$$\sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5, \text{ mens } \sqrt{13^2} - \sqrt{12^2} = 13 - 12 = 1.$$

La oss heller se på regneregler som virkelig gjelder. Heldigvis trenger vi ikke å presentere noen nye regneregler. Det eneste vi må gjøre, er å benytte regler som vi allerede kjenner. I praksis innebærer dette at vi (om mulig) må faktorisere radikanden slik eksemplene nedenfor viser.

Eksempel 7.5.3: Skriv rotuttrykkene nedenfor så enkelt som mulig:

a) $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{4x^2 - 16}$

b) $\frac{\sqrt{a^4 - 2a^2b}}{\sqrt{a^2b^2 - 2b^3}}$

Løsning:

a) $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{4x^2 - 16} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4(x^2 - 4)} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{x^2 - 4} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{x^2 - 4} = \underline{\underline{\sqrt{x^2 - 4}}}.$

b) $\frac{\sqrt{a^4 - 2a^2b}}{\sqrt{a^2b^2 - 2b^3}} = \frac{\sqrt{a^2(a^2 - 2b)}}{\sqrt{b^2(a^2 - 2b)}} = \frac{\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a^2 - 2b}}{\sqrt{b^2} \cdot \sqrt{a^2 - 2b}} = \frac{a}{b}.$

Oppgave 7.5.3.

I Eksempel 7.5.3b ovenfor måtte du faktorisere under rottegnene både i teller og nevner før du kunne forkorte. Noen ganger er slik faktorisering og forkorting mer krevende:

Eksempel 7.5.4: Faktoriser teller og nevner i disse brøkene, og forkort deretter brøkene:

a) $\frac{x - 4}{\sqrt{x + 2}}$

b) $\frac{\sqrt{x^3 - 4x}}{\sqrt{x^2 + 2x}}$

Løsning:

a) $\frac{x - 4}{\sqrt{x + 2}} = \frac{(\sqrt{x})^2 - 2^2}{\sqrt{x + 2}} = \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{\sqrt{x + 2}} = \underline{\underline{\sqrt{x} - 2}}.$

En annen metode går ut på å gange teller og nevner med $\sqrt{x} - 2$ slik:

$$\frac{x - 4}{\sqrt{x + 2}} = \frac{x - 4}{\sqrt{x + 2}} \cdot \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2} = \frac{(x - 4)(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x})^2 - 2^2} = \frac{\cancel{(x - 4)}(\sqrt{x} - 2)}{\cancel{x - 4}} = \underline{\underline{\sqrt{x} - 2}}.$$

b) $\frac{\sqrt{x^3 - 4x}}{\sqrt{x^2 + 2x}} = \frac{\sqrt{x(x^2 - 4)}}{\sqrt{x(x + 2)}} = \frac{\cancel{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x^2 - 4}}{\cancel{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x + 2}} = \frac{\sqrt{(x - 2)(x + 2)}}{\sqrt{x + 2}} = \frac{\cancel{\sqrt{x + 2}} \cdot \sqrt{x - 2}}{\cancel{\sqrt{x + 2}}} = \underline{\underline{\sqrt{x - 2}}}.$

Oppgave 7.5.4.

Til slutt skal vi se på sammentrekking av brøker som inneholder kvadratrotuttrykk. Da får vi bruk for alle de teknikkene som vi har sett på hittil.

Eksempel 7.5.5: Trekk sammen brøkene nedenfor, og skriv svarene så enkelt som mulig:

a) $\frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} - \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$

$$\text{b) } \frac{2}{\sqrt{x^2-4}} + \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}}$$

$$\text{c) } \sqrt{x^3+4x^2} - \frac{4x}{\sqrt{x+4}}$$

Løsning:

$$\text{a) } \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+x^2} - x \cdot x}{x \cdot \sqrt{1+x^2}} = \frac{(1+x^2) - x^2}{x\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$$

$$\text{b) } \frac{2}{\sqrt{x^2-4}} + \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}} = \frac{2}{\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+2}} + \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}} \cdot \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}} = \frac{2 + (x-2)}{\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \sqrt{x^3+4x^2} - \frac{4x}{\sqrt{x+4}} &= \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x+4} - \frac{4x}{\sqrt{x+4}} = x\sqrt{x+4} \cdot \frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+4}} - \frac{4x}{\sqrt{x+4}} \\ &= \frac{x(x+4) - 4x}{\sqrt{x+4}} = \frac{x^2}{\sqrt{x+4}} \end{aligned}$$

Oppgave 7.5.5.

8. Logaritmer.

8.1. Grunnleggende definisjoner.

La oss gå tilbake til disse potensreglene:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$

Vi ser at istedenfor å multiplisere eller dividere to tall, kan vi nå legge sammen eksponentene eller trekke eksponentene fra hverandre. Addisjon og subtraksjon er jo mye enklere regneoperasjoner enn multiplikasjon og divisjon, særlig når du ikke har kalkulator til disposisjon. Denne observasjonen danner grunnlaget for *logaritmeregningen*.

Når vi driver logaritmeregning, snakker vi ikke lenger om *potenser*. Vi snakker heller om *logaritmer*. Mer presist har vi denne sammenhengen:

Dersom et tall $t = a^n$, sier vi at n er **logaritmen til t med grunntall a** .
Dette skriver vi
$$n = \log_a(t)$$
eller enklere
$$n = \log_a t.$$

Sammenhengen ovenfor fører til disse to identitetene:

$$t = a^n = a^{\log_a t}, \quad n = \log_a(t) = \log_a(a^n).$$

Eksempel 8.1.1: Finn disse logaritmene:

$$\log_2 8, \quad \log_5 25, \quad \log_{10} 100, \quad \log_2\left(\frac{1}{4}\right), \quad \log_{10} 0.001, \quad \log_2 \sqrt{2}.$$

Løsning:

$$\log_2 8 = \underline{\underline{3}} \text{ fordi } 2^3 = 8.$$

$$\log_5 25 = \underline{\underline{2}} \text{ fordi } 5^2 = 25.$$

$$\log_{10} 100 = \underline{\underline{2}} \text{ fordi } 10^2 = 100.$$

$$\log_2\left(\frac{1}{4}\right) = \underline{\underline{-2}} \text{ fordi } 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}.$$

$$\log_{10} 0.001 = \underline{\underline{-3}} \text{ fordi } 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0.001.$$

$$\log_2 \sqrt{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \text{ fordi } 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

Hvis du synes at dette er forvirrende, kan du prøve å gjenta for deg selv at:

Logaritmen til et tall er den eksponenten som grunntallet må opphøyes i for å få tallet.

Oppgave 8.1.1.

Vi har egentlig bare betraktet eksponenter som er hele tall eller brøker. Men vi kan også bruke desimaltall som eksponenter, og vi får ofte bruk for logaritmer skrevet som desimaltall.

Du legger sikkert merke til at logaritmen til et tall avhenger av hvilket grunntall vi bruker. Men det er ett viktig unntak som følger direkte av at $a^0 = 1$ uansett verdi av a .

I alle logaritmesystemer er $\log(1) = 0$.

I praktisk arbeid er noen grunntall mer brukt enn andre. Gjennom flere hundre år var logaritmer med grunntall 10 svært mye brukt. Disse logaritmene kalles *Briggske logaritmer* etter den britiske matematikeren Henry Briggs som utarbeidet detaljerte tabeller over logaritmene til tall i dette logaritmesystemet. Disse logaritmene benyttes fremdeles i mange fag, for eksempel er kjemikernes pH-verdier, Richters skala for jordskjelv og decibel-skalaen basert på Briggske logaritmer.

Innen datateknologi har man stor nytte av et logaritmesystem med 2 som grunntall.

Men i matematikken er det likevel et annet grunntall som er mest brukt. Det er tallet e som defineres slik:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.71828...$$

Du finner en begrunnelse for denne definisjonen i et lite [vedlegg](#).

Dette rare tallet e er så viktig at logaritmer med grunntall e kalles ***naturlige logaritmer***. Vi skriver $\ln$ istedenfor $\log_e$.

8.2. Regneregler for logaritmer.

Uansett logaritmesystem gjelder disse regnereglene:

La u og v være positive tall. Da er:

(1): $\log(u \cdot v) = \log u + \log v$

$$(2): \log\left(\frac{u}{v}\right) = \log u - \log v$$

$$(3): \log(u^n) = n \cdot \log u$$

Setning 1 bevises slik: Vi tar utgangspunkt i at $u = a^{\log_a u}$ og at $v = a^{\log_a v}$. Når vi benytter regneregler for potensregning, får vi at

$$u \cdot v = a^{\log_a u} \cdot a^{\log_a v} = a^{\log_a u + \log_a v}.$$

Men av definisjonen på logaritmer må vi også ha at

$$u \cdot v = a^{\log_a(u \cdot v)}.$$

Ved å sammenlikne eksponentene, ser vi at

$$\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v.$$

Bevis selv Setning 2!

Så var det setning 3. Her benytter vi en annen regneregler for potenser:

$$u^n = \left(a^{\log_a u}\right)^n = a^{n \cdot \log_a u}.$$

Men av definisjonen på logaritmer må vi også ha at

$$u^n = a^{\log_a(u^n)}.$$

Ved å sammenlikne eksponentene, ser vi at

$$\log(u^n) = n \cdot \log u.$$

Eksempel 8.2.1: Skriv disse uttrykkene så enkelt som mulig:

a) $\ln(x^2) - \ln(2x).$

b) $\ln(x^2 - y^2) - \ln(x - y)$

c) $\ln(\sqrt{8x}) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) - \ln 2$

Løsning:

a) $\ln(x^2) - \ln(2x) = \ln\left(\frac{x^2}{2x}\right) = \ln\left(\frac{x}{2}\right) = \underline{\underline{\ln x - \ln 2}}.$

Eller:

$$\ln(x^2) - \ln(2x) = 2 \ln x - (\ln 2 + \ln x) = 2 \ln x - \ln x - \ln 2 = \underline{\underline{\ln x - \ln 2}} = \underline{\underline{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}}.$$

b) $\ln(x^2 - y^2) - \ln(x - y) = \ln\left(\frac{x^2 - y^2}{x - y}\right) = \ln\left(\frac{\cancel{(x - y)}(x + y)}{\cancel{x - y}}\right) = \underline{\underline{\ln(x + y)}}$

$$\begin{aligned}
 \text{c)} \quad \ln(\sqrt{8x}) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) - \ln 2 &= \ln\left((8x)^{\frac{1}{2}}\right) + \ln(x^{-1}) - \ln 2 = \frac{1}{2}(\ln 8 + \ln x) - 1 \cdot \ln x - \ln 2 \\
 &= \frac{1}{2} \ln 2^3 + \frac{1}{2} \ln x - \ln x - \ln 2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \ln 2 + \frac{1}{2} \ln x - \ln x - \ln 2 \\
 &= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln x = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2}{x}\right) = \ln\left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = \ln \sqrt{\frac{2}{x}}
 \end{aligned}$$

Oppgave 8.2.1.

8.3. Omregning mellom logaritmesystem.

Det er nyttig å vite hvordan man regner om fra ett logaritmesystem til et annet. Vi skal begrense oss til å se hvordan vi kan regne om mellom et vilkårlig logaritmesystem med grunntall a og naturlige logaritmer. Da gjelder disse sammenhengene:

$$\log_a u = \log_a e \cdot \ln u = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln u.$$

Den første sammenhengen vises slik:

$$\log_a u \stackrel{(1)}{=} \log_a (e^{\ln u}) \stackrel{(2)}{=} \ln u \cdot \log_a e.$$

I overgang (1) benyttes at $u = e^{\ln u}$, og i overgang (2) benyttes logaritmeregel (3).

Vis selv den andre sammenhengen i **Oppgave 8.3.1**

Eksempel 8.3.1: Du trenger den Briggske logaritmen til tallet 58.3, men har en kalkulator som kun kan regne med naturlige logaritmer. Bruk regneregelen i ramma ovenfor til å løse dette problemet.

Løsning: Grunntallet i det Briggske logaritmesystemet er $a = 10$. Ved hjelp av kalkulatoren finner du at $\ln 10 \approx 2.3026...$ og at $\ln 58.3 \approx 4.0656...$

Da er

$$\log_{10} 58.3 = \frac{1}{\ln 10} \cdot \ln 58.3 \approx \frac{4.0656}{2.3026} \approx \underline{\underline{1.7657}}.$$

Kontroll: $10^{1.7657} \approx 58.304...$

Oppgave 8.3.2.

9. Grunnleggende trigonometri.

Ordet *trigonometri* kan oversettes med "måling av vinkler i en trekant". Trigonometrien ble først tatt i bruk bl.a. til landmåling og navigasjon. I dag er trigonometri en av de nyttigste grenene av matematikken.

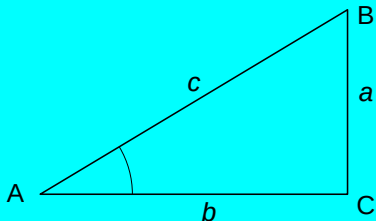
Vinkler måles tradisjonelt i **grader**. Utgangspunktet er da at en hel sirkel deles i 360 like store deler, der hver del kalles en **grad**. En grad kan deles inn i 60 *bueminutter*, der hvert bueminutt igjen kan deles inn i 60 *buesekunder*. I matematikken bruker vi sjelden denne inndelingen i bueminutter og buesekunder. Når det er nødvendig å dele opp en grad, bruker vi heller vanlige desimaltall.

9.1. Trigonometriske definisjoner for en rettvinklet trekant.

I utgangspunktet er de trigonometriske grunn-funksjonene **sinus**, **cosinus** og **tangens** definert i forhold til en rettvinklet trekant på denne måten:

- **Sinus** til en vinkel er forholdet mellom *motstående* katet og hypotenusen.
- **Cosinus** til en vinkel er forholdet mellom *hosliggende* katet og hypotenusen.
- **Tangens** til en vinkel er forholdet mellom *motstående* katet og *hosliggende* katet.

Dette er illustrert i figuren nedenfor:



La C være den rette vinkelen i den rettvinklede trekanten ABC. La a , b og c være motstående sider til vinklene A, B og C. Da er:

- **Sinus** til A er $\sin A = \frac{a}{c}$.
- **Cosinus** til A er $\cos A = \frac{b}{c}$.
- **Tangens** til A er $\tan A = \frac{a}{b}$.

I praksis bruker vi gjerne kalkulator til å finne sinus, cosinus og tangens til en kjent vinkel. Vi bruker også kalkulator til å finne vinkelen når sinus, cosinus eller tangens er kjent. Da bruker vi de *inverse* trigonometriske funksjonene som vi skal se nærmere på senere.

Eksempel 9.1.1: I den rettvinklede trekanten ABC ovenfor vet vi at:

- Siden $c = 0.69\text{ m}$ og vinkel $A = 44.1^\circ$. Finn de andre sidene.
- Siden $a = 1.24\text{ m}$ og vinkel $A = 36.9^\circ$. Finn de andre sidene.

Løsning:

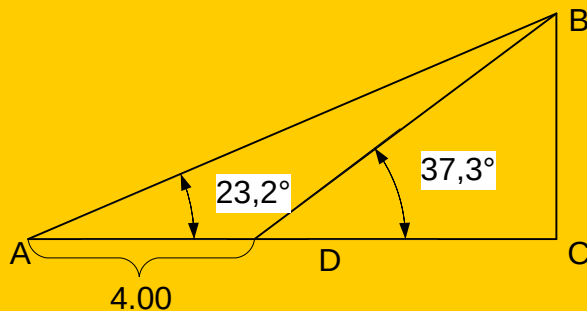
$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \sin A = \frac{a}{c} &\Leftrightarrow a = c \cdot \sin A = 0.69\text{ m} \cdot \sin 44.1^\circ = 0.69\text{ m} \cdot 0.6959 = \underline{\underline{0.48\text{ m}}} \\ \cos A = \frac{b}{c} &\Leftrightarrow b = c \cdot \cos A = 0.69\text{ m} \cdot \cos 44.1^\circ = 0.69\text{ m} \cdot 0.7181 = \underline{\underline{0.50\text{ m}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \sin A = \frac{a}{c} &\Leftrightarrow c = \frac{a}{\sin A} = \frac{1.24 \text{ m}}{\sin 36.9^\circ} = \frac{1.24 \text{ m}}{0.600} = \underline{\underline{2.07 \text{ m}}}. \\ \tan A = \frac{a}{b} &\Leftrightarrow b = \frac{a}{\tan A} = \frac{1.24 \text{ m}}{\tan 36.9^\circ} = \frac{1.24 \text{ m}}{0.7508} = \underline{\underline{1.65 \text{ m}}}. \end{aligned}$$

Oppgave 9.1.1.

Etter denne innledende oppvarmingen kan vi se på et mer komplisert eksempel:

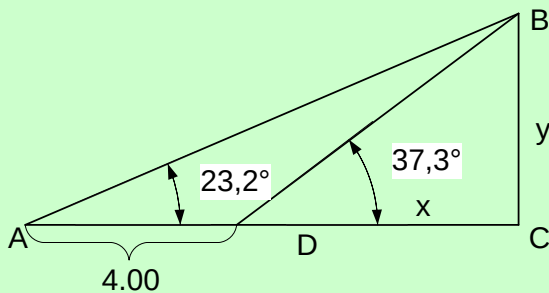
Eksempel 9.1.2



I den rettvinklede trekanten ABC til venstre er strekningen $AD = 4$,
 $\angle BAD = 23.2^\circ$, og $\angle BDC = 37.3^\circ$.

Finn lengdene av sidene AB, AC og BC.

Løsning:



Av figuren ser vi at:

$$\tan 37.3^\circ = \frac{y}{x}$$

$$y = x \cdot \tan 37.3^\circ = \underline{0.762x}$$

og at

$$\tan 23.2^\circ = \frac{y}{x+4}$$

$$\begin{aligned} y &= (x+4) \cdot \tan 23.2^\circ = 0.429(x+4) \\ &= \underline{0.429x + 1.72} \end{aligned}$$

Setter disse to uttrykkene for y lik hverandre, og får

$$0.762x = 0.429x + 1.72 \Leftrightarrow 0.333x = 1.72 \Leftrightarrow x = \frac{1.72}{0.333} = \underline{\underline{5.17}}.$$

Da blir

$$y = 0.762x = 0.762 \cdot 5.17 = \underline{\underline{3.94}}.$$

Nå nøster vi opp:

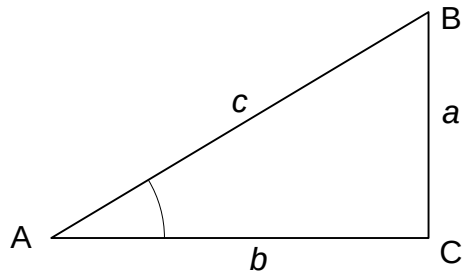
$$AC = AD + x = 4.00 + 5.17 = \underline{\underline{9.17}}.$$

$$BC = y = \underline{\underline{3.94}}.$$

$$\sin 23.2^\circ = \frac{y}{AB} \Leftrightarrow AB = \frac{y}{\sin 23.2^\circ} = \frac{3.94}{0.394} = \underline{\underline{10.00}}.$$

Oppgave 9.1.2.

9.2. Sammenhenger mellom sinus, cosinus og tangens.



Fra figuren til venstre får vi at:

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

Den første sammenhengen ser vi slik:

$$\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \tan A.$$

Den siste sammenhengen følger av Pytagoras' velkjente setning:

$$a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1 \Leftrightarrow (\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1.$$

Dessuten har jeg benyttet vi den vanlige skrivemåten $\sin^2 A$ istedenfor $(\sin A)^2$, og tilsvarende for cosinus.

Eksempel 9.2.1:

- a) Du vet at $\sin A = \frac{5}{13}$. Finn $\cos A$ og $\tan A$ uten å finne vinkelen A først.
b) Du vet at $\tan A = \frac{3}{4}$. Finn $\sin A$ og $\cos A$ uten å finne vinkelen A først.

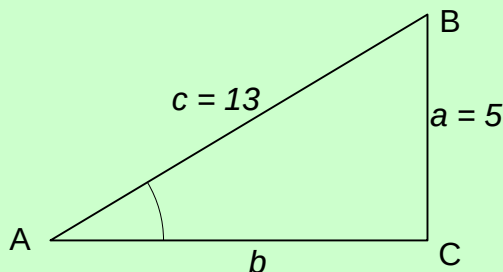
Løsning:

- a) Når $\sin A = \frac{5}{13}$, blir

$$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{169}{169} - \frac{25}{169} = \frac{144}{169} \Leftrightarrow \cos A = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}.$$

Da blir

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}.$$



Dette kan vi også finne ved hjelp av den rettvinklede trekanten til venstre. Når $\sin A = \frac{5}{13}$, velger vi måleenhetene slik at $a = 5$ og $c = 13$. Dermed blir

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{5}{13}.$$

Da blir

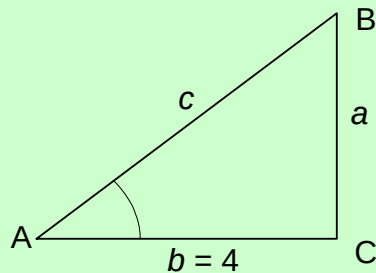
$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$$

Dette gir

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{12}{13},$$

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{5}{12}.$$

- b) Oppgaven løses enklest med utgangspunkt i en rettvinklet trekant av samme type som i del a). Når $\tan A = \frac{3}{4}$, velger vi måleenhetene slik at $a = 3$ og $b = 4$. Dermed blir



$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{3}{4}$$

Da blir

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Dette gir

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{3}{5}, \quad \cos A = \frac{b}{c} = \frac{4}{5}.$$

Eksempel 9.2.2: Finn en formel for $\sin A$ uttrykt ved $\tan A$, og bruk denne formelen til å finne $\sin A$ når $\tan A = \frac{3}{4}$.

Løsning: Vet at

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \Leftrightarrow \tan^2 A = \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = \frac{\sin^2 A}{1 - \sin^2 A}.$$

Løser ut $\tan A$ ved å multiplisere med $1 - \sin^2 A$ på begge sider av likhetstegnet:

$$\tan^2 A (1 - \sin^2 A) = \sin^2 A \Leftrightarrow \tan^2 A - \tan^2 A \cdot \sin^2 A = \sin^2 A$$

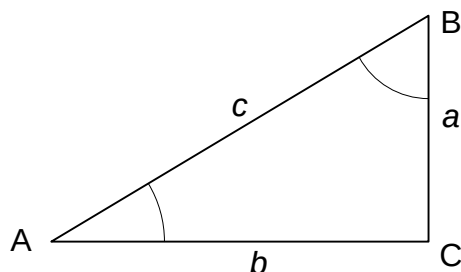
$$\Leftrightarrow \tan^2 A = \tan^2 A \cdot \sin^2 A + \sin^2 A = (\tan^2 A + 1) \cdot \sin^2 A$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A = \frac{\tan^2 A}{1 + \tan^2 A} \Leftrightarrow \sin A = \frac{\tan A}{\sqrt{1 + \tan^2 A}}$$

Setter inn $\tan A = \frac{3}{4}$, og får

$$\sin A = \frac{\tan A}{\sqrt{1 + \tan^2 A}} = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{16}{16} + \frac{9}{16}}} = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{5}.$$

Oppgave 9.2.1.



Vi tar utgangspunkt i samme figur som før, og setter opp sinus, cosinus og tangens til vinkelen B. Da ser vi at:

$$\sin B = \cos A, \quad \cos B = \sin A,$$

$$\tan B = \frac{1}{\tan A}.$$

I den rettvinklede trekanten er

$$A + B + C = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow A + B = 180^\circ - C = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

$$\Leftrightarrow B = 90^\circ - A$$

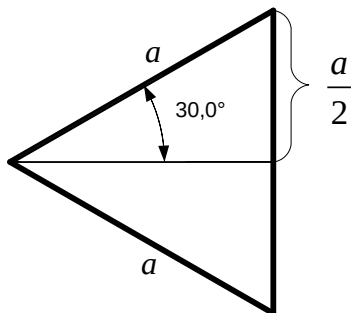
Av de to første sammenhengene ovenfor følger nå:

$$\sin(90^\circ - A) = \cos A$$

$$\cos(90^\circ - A) = \sin A$$

9.3. Noen spesielle vinkler.

Selv om vi i dag har kalkulatorer som gir ut verdier for sinus, cosinus og tangens, er det ofte nyttig å kjenne eksakte verdier for noen spesielle vinkler som forekommer ofte. Vi skal nå se hvordan vi kan finne fram til noen slike verdier.



Vi starter med vinkler på 30° og 60° . Vi tar da utgangspunkt i en rettvisket trekant med vinkler på 30° og 60° . Den framkommer ved at det trekkes en rett linje fra et hjørne til motstående side i en likesidet trekant med sidelengde a slik figuren til venstre viser. Da får vi at:

$$\sin 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}.$$

Deretter finner vi $\cos 30^\circ$ slik:

$$\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2 30^\circ = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 30^\circ = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos 30^\circ = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Til slutt blir:

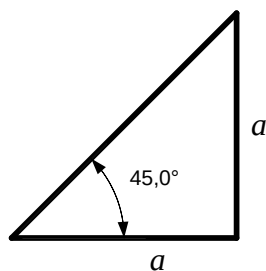
$$\tan 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

Nå er det lett å finne sinus, cosinus og tangens til 60° . Vi kan enten bruke samme figur og samme framgangsmåte som ovenfor, eller vi kan benytte at:

$$\sin 60^\circ = \cos(90^\circ - 60^\circ) = \cos(30^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

$$\cos 60^\circ = \sin(90^\circ - 60^\circ) = \sin(30^\circ) = \frac{1}{2}.$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$



Så tar vi for oss en vinkel på 45° på grunnlag av figuren til venstre. Ved hjelp av Pytagoras' setning finner vi at den lengste siden blir

$$\sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2},$$

slik at

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Da blir

$$\tan 45^\circ = \frac{a}{a} = 1.$$

Jeg vil anbefale at du nå samler resultatene i tabellen nedenfor.

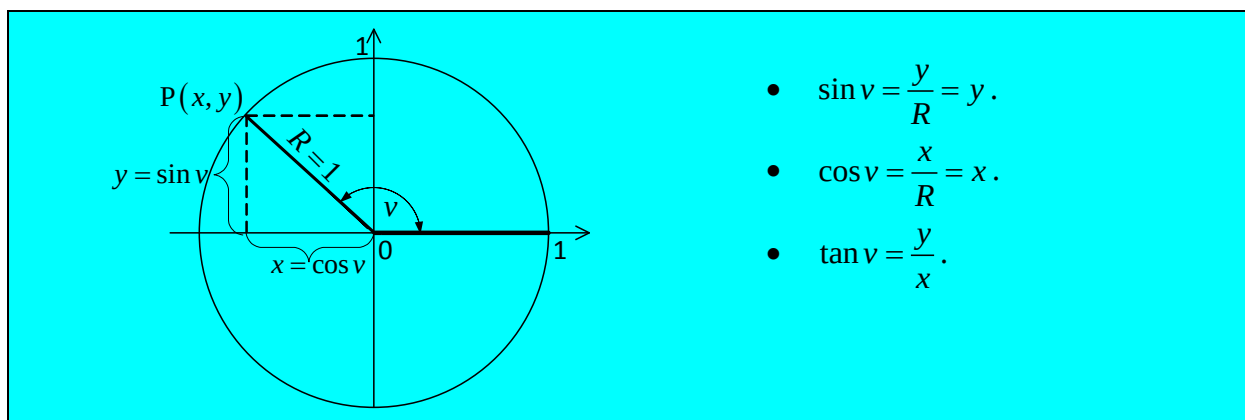
Vinkel i grader	Sinus	Cosinus	Tangens
0			
30			
45			
60			
90			

9.4. Generelle definisjoner av de trigonometriske funksjonene.

Hittil har vi holdt oss til rettvinklede trekanter. Da er det kun mulig å definere sinus, cosinus og tangens for vinkler mellom 0° og 90° . Vi trenger imidlertid definisjoner som gjelder for vinkler utenfor dette området. Dette ordner vi slik:

Slå en sirkel med sentrum i origo og radius $R = 1$ i et vanlig (kartesisk) koordinatsystem. En slik sirkel kalles en **enhetssirkel**. Trekk ei rett linje fra sirkelens sentrum slik at linja danner en vinkel v med x -aksen. Linja skjærer sirkelen i et punkt P med koordinater (x, y) . Se figuren nedenfor.

Legg merke til at vinkelen v ikke trenger å ligge mellom 0° og 90° . Nå kan vi definere sinus, cosinus og tangens slik:



På denne måten kan sinus, cosinus og tangens til en vinkel defineres ut fra koordinatene til et punkt på enhetssirkelen. Legg merke til hvordan du finner fortegnet til sinus, cosinus og tangens til vinkelen ut fra plasseringen til punktet P i koordinatsystemet.

Sinus, cosinus og tangens er egentlig funksjoner der v er den fri variable mens sinus-, cosinus- og tangens-verdiene er funksjonsverdier. Vi burde derfor skrevet v -en i parentes slik: $\sin(v)$, $\cos(v)$ og $\tan(v)$. Når vi taster inn på kalkulatorer, må vi som regel benytte denne funksjons-skrivemåten. I vanlig skrift er det imidlertid blitt vanlig å sløyfe parentesene når dette kan gjøres uten at det oppstår misforståelser.

Vi kan nå sette opp mange sammenhenger mellom sinus, cosinus og tangens til vinkler, men vi skal nøye oss med disse (som du selv kan overbevise deg om ved hjelp av en figur):

$$\sin(180^\circ - A) = \sin A,$$

$$\cos(180^\circ - A) = -\cos A$$

9.5. Inverse trigonometriske funksjoner.

Hittil har vi nøydd oss med å finne sinus, cosinus og tangens til vinkler. Men vi får ofte det motsatte problemet: Vi kjenner sinus, cosinus eller tangens til en vinkel, og skal finne vinkelen. Vi må da benytte **inverse trigonometriske funksjoner**, som også kalles **arcus-funksjoner**. På kalkulatoren er disse merket $\sin^{-1}(x)$ eller $\arcsin(x)$, og tilsvarende for cosinus og tangens. De er definert slik:

$$y = \sin(v), \quad v \in [-90^\circ, 90^\circ] \Leftrightarrow v = \arcsin(y) = \sin^{-1}(y)$$

$$y = \cos(v), \quad v \in [0, 180^\circ] \Leftrightarrow v = \arccos(y) = \cos^{-1}(y)$$

$$y = \tan(v), \quad v \in (-90^\circ, 90^\circ) \Leftrightarrow v = \arctan(y) = \tan^{-1}(y)$$

Vi må begrense definisjonsområdet for vinkelen v for å få entydige definisjoner.

Eksempel 9.5.1: Hva er:

- a) $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$?
- b) $\arccos(-1)$?
- c) $\arctan(1)$?

Løsning:

- a) $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{30^\circ}}$ fordi $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$.
- b) $\arccos(-1) = \underline{\underline{180^\circ}}$ fordi $\cos(180^\circ) = -1$.
- c) $\arctan(1) = \underline{\underline{45^\circ}}$ fordi $\tan(45^\circ) = 1$.

Oppgave 9.5.1.

9.6. Trekantberegning.

Hittil har vi holdt oss til rettvinklede trekanter. Men de fleste trekanter vi kommer bort i i praksis, er ikke rettvinklet. Da får vi bruk for setningene nedenfor:

La A , B og C være hjørner i en vilkårlig trekant. La a , b og c være hjørnenes motstående sider. Da gjelder disse setningene:

Sinus-setningen (sinus-proporsjonen):

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

Cosinus-setningene:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

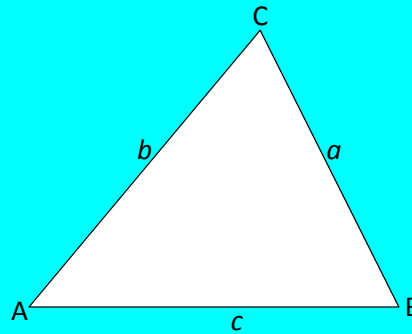
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Areal-setningen:

Trekantens areal F er

$$F = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B.$$



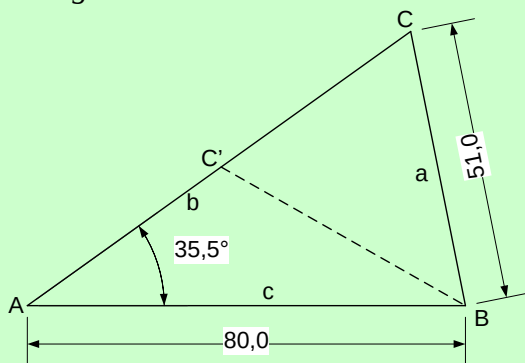
Merk at:

- Alle versjonene av cosinus-setningen starter med kvadratet av en side og slutter med cosinus til sidens motstående vinkel. Dette er en grei huskeregel.
- I alle versjonene er arealet lik halvparten av produktet av to sider, multiplisert med sinus til sidenes mellomliggende vinkel.

Bevis for disse setningene finner du i et lite [tillegg](#).

Eksempel 9.6.1: Finn siden b og de ukjente vinklene i en trekant der du vet at siden $a = 51.0 \text{ cm}$, siden $c = 80.0 \text{ cm}$, og vinkel $A = 35.5^\circ$.

Løsning:



Trekanten er tegnet til venstre. Vi bruker sinusproporsjonen til å finne vinkel C :

$$\begin{aligned} \frac{\sin C}{c} &= \frac{\sin A}{a} \\ \sin C &= \sin A \cdot \frac{c}{a} = \sin 35.5^\circ \cdot \frac{80.0}{51.0} \\ &= \underline{0.911} \end{aligned}$$

Men vi vet at det er to vinkler mellom 0° og 180° som har sinusverdien 0.911. Vi kan derfor få *to* forskjellige løsninger. Dersom vi velger den vinkelen som er mindre enn 90° (og som kalkulatoren gir ut) blir

$$\angle C = \sin^{-1}(0.911) = \underline{65.6^\circ}.$$

Da blir

$$\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C = 180^\circ - 35.5^\circ - 65.6^\circ = \underline{\underline{78.9^\circ}}.$$

Bruker igjen sinusproporsjonen til å finne b :

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a} \Leftrightarrow b = a \cdot \frac{\sin B}{\sin A} = (51.0 \text{ cm}) \cdot \frac{\sin 78.9^\circ}{\sin 35.5^\circ} = \underline{\underline{86.2 \text{ cm}}}.$$

Den andre vinkelen som har sinusverdien 0.911, er

$$\angle C' = 180^\circ - 65.6^\circ = \underline{\underline{114.4^\circ}}.$$

Som du ser av figuren, gir også denne vinkelen en løsning som tilfredsstiller kravene i oppgaveteksten (se den stiplede linja BC'). Dersom vi velger hjørnet C' istedenfor C , blir

$$\angle B' = 180^\circ - \angle A - \angle C' = 180^\circ - 35.5^\circ - 114.4^\circ = \underline{\underline{30.1^\circ}}.$$

Bruker igjen sinusproporsjonen til å finne b' :

$$\frac{\sin B'}{b'} = \frac{\sin A}{a} \Leftrightarrow b' = a \cdot \frac{\sin B'}{\sin A} = (51.0 \text{ cm}) \cdot \frac{\sin 30.1^\circ}{\sin 35.5^\circ} = \underline{\underline{44.0 \text{ cm}}}.$$

Den tvetydigheten som framkommer i eksemplet ovenfor, vil vi alltid støte på når vi bruker sinus-setningen til å finne en vinkel. Vi må derfor alltid støtte oss til en god figur for å avgjøre om begge løsningene kan brukes.

Oppgave 9.6.1.

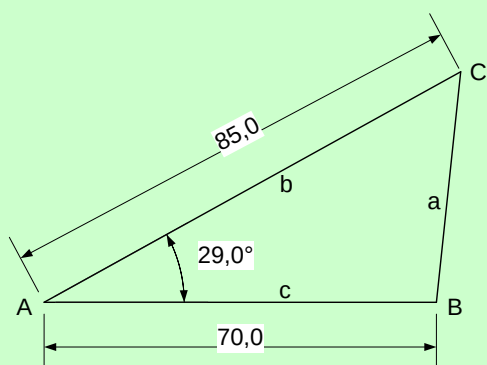
Som du har sett av eksempel 9.6.1 og oppgave 9.6.1, kan vi få to løsninger når vi bruker sinus-setningen. I en del tilfeller kan det være vanskelig å avgjøre om vi kan bruke begge løsningene, eller om vi bare kan bruke den ene. Noen ganger kan det være nødvendig å kontrollere med andre metoder. Da er cosinus-setningene uunnværlig. Setningene brukes også i mange situasjoner der sinus-setningen ikke kan brukes.

Eksempel 9.6.2: Bestem de sider og vinkler som ikke er kjent i disse trekantene:

- Siden $c = 70.0 \text{ cm}$, siden $b = 85.0 \text{ cm}$, og $\angle A = 29.0^\circ$.
- Siden $a = 46.6 \text{ cm}$, siden $b = 63.6 \text{ cm}$ og siden $c = 57.0 \text{ cm}$

Løsning:

a)



Vi finner siden a ved hjelp av cosinus-setningen:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \\ &= 85.0^2 + 70.0^2 - 2 \cdot 85.0 \cdot 70.0 \cdot \cos(29^\circ) \\ &= \underline{\underline{1717}} \end{aligned}$$

Da er

$$a = \sqrt{1717} = \underline{\underline{41.4}}$$

Nå er det fristende å finne en av de ukjente vinklene med sinus-setningen. Men da støter vi på den tvetydigheten som vi så i forrige eksempel. Vi bruker heller cosinus-setningen selv om den gir litt mer regning:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \Leftrightarrow 2ac \cos B = a^2 + c^2 - b^2$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1717 + 70.0^2 - 85.0^2}{2 \cdot 41.4 \cdot 70.0} = \underline{-0.105}$$

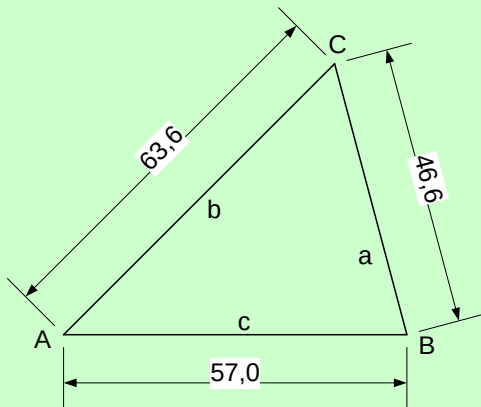
Da blir

$$\angle B = \cos^{-1}(-0.105) = \underline{96.0^\circ}$$

og

$$\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 180^\circ - 29.0^\circ - 96.0^\circ = \underline{55.0^\circ}.$$

b)



Her benytter vi bare cosinus-setningen:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$\Leftrightarrow 2ac \cos B = a^2 + c^2 - b^2$$

$$\begin{aligned} \cos B &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ &= \frac{46.6^2 + 57.0^2 - 63.6^2}{2 \cdot 46.6 \cdot 57.0} \\ &= \underline{0.259} \end{aligned}$$

Da blir

$$\angle B = \cos^{-1}(0.259) = \underline{75.0^\circ}.$$

Vi motstår fremdeles fristelsen til å bruke den enklere sinu-setningen, og benytter heller den sikrere cosinus-setningen til å finne $\angle A$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Leftrightarrow 2bc \cos A = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{63.6^2 + 57.0^2 - 46.6^2}{2 \cdot 63.6 \cdot 57.0} = \underline{0.7065}$$

Da er

$$\angle A = \underline{45.0^\circ}.$$

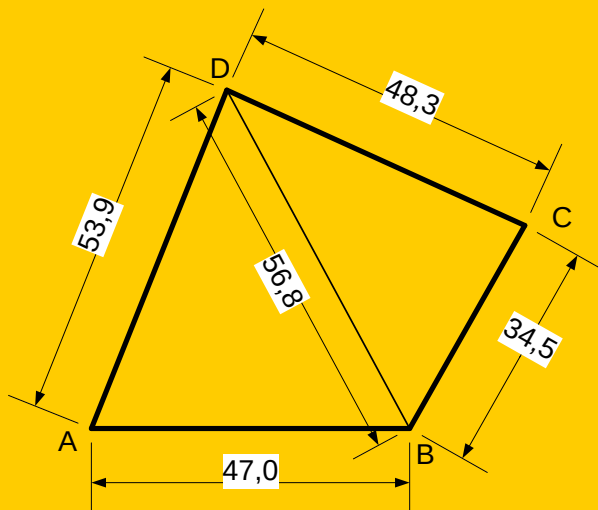
Til slutt blir

$$\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 180^\circ - 45.0^\circ - 75.0^\circ = \underline{60^\circ}$$

Oppgave 9.6.2.

Til slutt må vi ta et eksempel med arealberegning:

Eksempel 9.6.3:



En firkantet tomt $ABCD$ har de dimensjonene som er vist på figuren til venstre. Finn arealet av tomta

Løsning: Vi starter med å finne $\angle A$:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos A \Leftrightarrow 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos A = AB^2 + AD^2 - BD^2$$

$$\cos A = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2 \cdot AB \cdot AD} = \frac{47.0^2 + 53.9^2 - 56.8^2}{2 \cdot 47.0 \cdot 53.9} = \underline{0.3726}$$

Da er

$$\angle A = \cos^{-1}(0.3726) = \underline{68.1^\circ}$$

slik at arealet av $\triangle ABD$ blir

$$F_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 47.0 \cdot 53.9 \cdot \sin(68.1^\circ) = \underline{1175}.$$

Så finner vi $\angle C$ på samme måte:

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2 \cdot BC \cdot CD \cdot \cos C \Leftrightarrow 2 \cdot BC \cdot CD \cdot \cos C = BC^2 + CD^2 - BD^2$$

$$\cos C = \frac{BC^2 + CD^2 - BD^2}{2 \cdot BC \cdot CD} = \frac{34.5^2 + 48.3^2 - 56.8^2}{2 \cdot 34.5 \cdot 48.3} = \underline{0.089}$$

Da er

$$\angle C = \cos^{-1}(0.089) = \underline{84.9^\circ}$$

slik at arealet av $\triangle BCD$ blir

$$F_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CD \cdot \sin C = \frac{1}{2} \cdot 34.5 \cdot 48.3 \cdot \sin(84.9^\circ) = \underline{830}.$$

Samlet areal blir da

$$1175\text{m}^2 + 830\text{m}^2 = \underline{\underline{2005\text{m}^2}}.$$

Oppgave 9.6.3.

10. Vektorer.

10.1. Definisjoner.

Mange av de størrelsene vi benytter i matematikk, er fullstendig definert bare med et *tall*, eventuelt med en *måleenhet* i tillegg. Slike størrelser kaller vi gjerne **skalare størrelser**. I fysikk viser det seg imidlertid at vi også må kjenne en *retning*. Slike størrelser som består av tallverdi (gjærne med måleenhet i tillegg) og retning, kaller vi **vektorer**. For eksempel er *krefter* og *hastigheter* vektorer. I tillegg til tallet som angir hvor stor kraften eller hastigheten er, må vi også vite *retningen* for at kraften eller hastigheten skal være fullstendig definert.

Når vi bruker bokstaver for å angi en vektor, skriver vi bokstavene med **uthevet skrift** eller med en pil over: $\mathbf{v}$ eller $\vec{v}$ er vanlige måter å angi en vektor. Noen ganger brukes begge deler: $\vec{\mathbf{v}}$. Når vi skriver for hand, bruker vi helst pil over eller en strek under bokstaven: $\vec{v}$ eller $\underline{v}$. I dette notatet skal jeg stort sett benytte **uthevet skrift**: $\mathbf{v}$.

Noen ganger er vi kun interessert i *størrelsen* (*lengden*) av en vektor, uten å bry oss om retningen. Vi bruker da skrivemåten $\|\mathbf{v}\|$, $|\mathbf{v}|$ eller bare v for å angi størrelsen av $\mathbf{v}$.

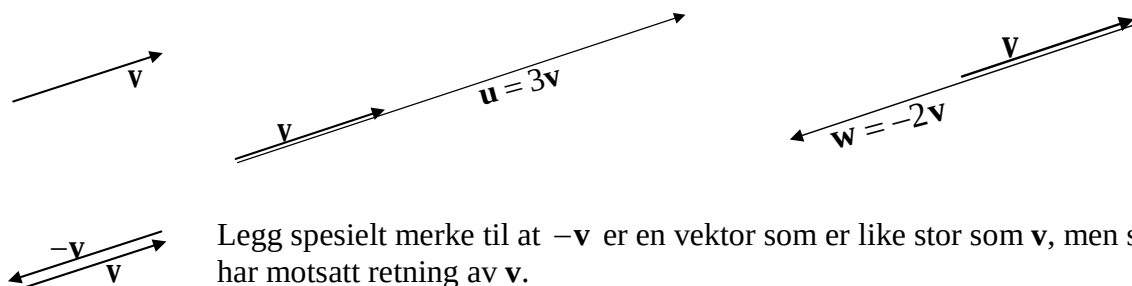
Vi definerer **likhet** slik: To vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er like hvis og bare hvis begge vektorene har samme størrelse og samme retning.

10.2. Multiplikasjon av vektor med skalar.

La $\mathbf{v}$ være en vektor, mens t er en skalar (et vanlig tall). Da definerer vi:

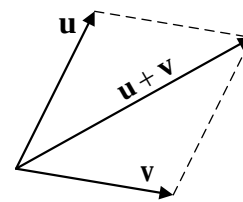
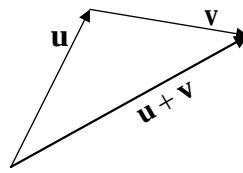
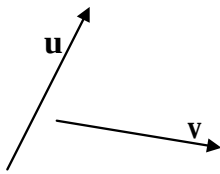
Dersom $t > 0$, er $\mathbf{u} = t \cdot \mathbf{v}$ en ny vektor der $|\mathbf{u}| = t \cdot |\mathbf{v}|$, og som har *samme* retning som $\mathbf{v}$.
Dersom $t < 0$, er $\mathbf{u} = t \cdot \mathbf{v}$ en ny vektor der $|\mathbf{u}| = t \cdot |\mathbf{v}|$, og som har *motsatt* retning av $\mathbf{v}$.

Vektorer illustreres gjerne med en vanlig pil, der pilens lengde og retning angir vektorens størrelse og retning. Nedenfor ser du en vektor $\mathbf{v}$ samt vektorene $\mathbf{u} = 3\mathbf{v}$ og $\mathbf{w} = -2\mathbf{v}$:



10.3. Addisjon og subtraksjon av vektorer.

Figuren nedenfor viser hvordan vi **adderer** to vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$:

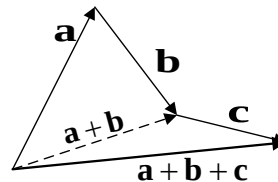
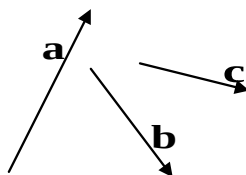


Til venstre ser du de to vektorene $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ som skal adderes.

I midten ser du den ene måten å gå fram på: Vi lar $\mathbf{v}$ starte der $\mathbf{u}$ slutter. Vektorsummen $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ blir da en vektor som går fra starten på $\mathbf{u}$ til slutten av $\mathbf{v}$.

Til høyre ser du en annen måte å gå fram på: Vi lar $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ starte i samme punkt slik at de definerer et parallelogram. Da blir $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ en vektor som følger diagonalen fra vektorenes felles startpunkt.

Dersom vi skal addere tre eller flere vektorer, starter vi med å addere to av dem. Deretter legger vi til den tredje. Figuren nedenfor viser hvordan vi kan gå fram for å finne $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$:



Ved hjelp av slike figurer kan vi vise at regnereglene nedenfor må gjelde, der $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er vektorer mens s og t er skalarer:

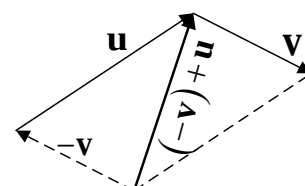
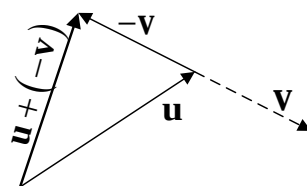
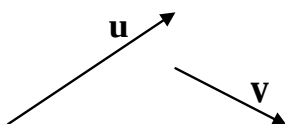
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$$

$$t \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = t \cdot \mathbf{u} + t \cdot \mathbf{v}$$

$$(s + t) \cdot \mathbf{u} = s \cdot \mathbf{u} + t \cdot \mathbf{u}$$

Subtraksjon av vektorer skjer enkelt ved å benytte at $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$. Figurene nedenfor viser hvordan det kan gjøres:



Vi starter som før med to vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$. Figuren i midten viser hvordan vi går fram når vi adderer $\mathbf{u}$ og $-\mathbf{v}$, mens figuren til høyre viser hvordan vi benytter den andre diagonalen i parallelogrammet som $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ utspenner til å finne $(-\mathbf{v}) + \mathbf{u}$.

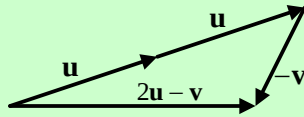
Eksempel 10.3.1: Nedenfor til venstre ser du to vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$. Finn:



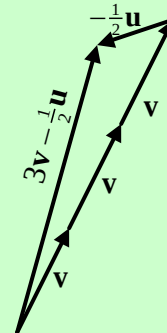
- a) $2\mathbf{u} - \mathbf{v}$
b) $3\mathbf{v} - \frac{1}{2}\mathbf{u}$

Løsning:

a)

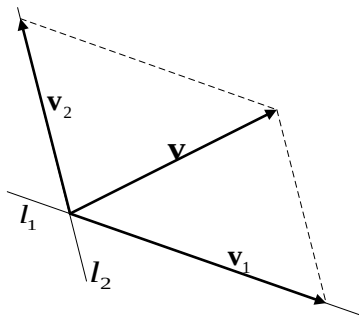


b)



Oppgave 10.3.1.

10.4. Dekomponering av vektorer.

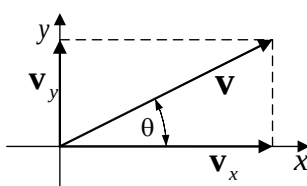


La oss starte med et plant (to-dimensjonalt) koordinatsystem. I dette koordinatsystemet fastlegger vi to retninger, for eksempel ved å tegne to ikke-parallelle linjer l_1 og l_2 . Å *dekomponere* en vektor $\mathbf{v}$ i disse to retningene består da i å finne to nye vektorer $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$, en i hver av de to retningene, slik at $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$. Figuren til venstre viser hvordan vi kan gjøre dette. Vi parallellforskyver $\mathbf{v}$ slik at den begynner der linjene krysser hverandre. Så trekker vi paralleller med linjene l_1 og l_2 gjennom "spissen" av $\mathbf{v}$. Dermed framkommer et parallellogram, og $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ går da langs sidene i dette parallellogrammet.

I et tre-dimensjonalt koordinatsystem går vi fram på samme måten: Vi fastlegger tre retninger ved å trekke tre ikke-parallelle linjer. Deretter bestemmer vi tre vektorer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$, en i hver av de tre retningene, slik at $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$.

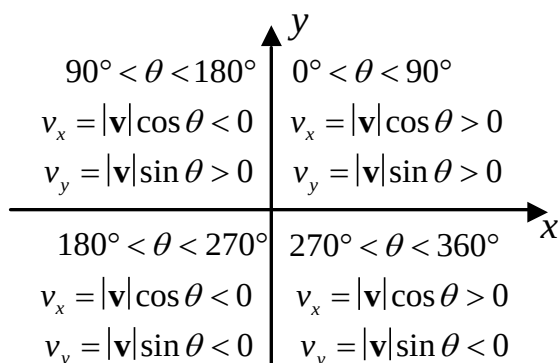
Oppgave 10.4.1.

10.5. Enhetsvektorer.



Vi skal nå plassere en vektor $\mathbf{v}$ i et *rettvinklet* koordinatsystem. I starten skal vi begrense oss til et todimensjonalt koordinatsystem. Da kan $\mathbf{v}$ dekomponeres i to andre vektorer, en vektor $\mathbf{v}_x$ parallell med x-aksen og en vektor $\mathbf{v}_y$ parallell med y-aksen. Vi har da at

$\mathbf{v} = \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y$. Se figuren til venstre.



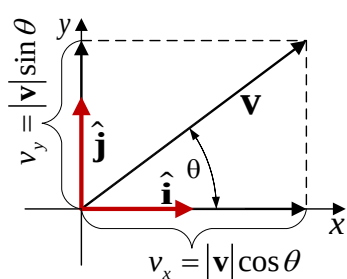
Nå viser det seg å være hensiktsmessig å endre litt på denne tolkingen. Istedenfor å benytte to **vektorer** $\mathbf{v}_x$ og $\mathbf{v}_y$, innfører vi to **skalare komponenter** v_x og v_y slik:

$$v_x = |\mathbf{v}| \cdot \cos \theta, \quad v_y = |\mathbf{v}| \cdot \sin \theta.$$

Her er θ vinkelen mellom positiv x-akse og $\mathbf{v}$.

Legg spesielt merke til at disse definisjonene fører til at v_x og v_y får korrekte fortegn. Se figuren til venstre, og husk fortegnet til $\cos \theta$ og $\sin \theta$ når θ ligger i de angitte intervallene.

Nå er det hensiktsmessig å definere to **enhetsvektorer** $\hat{\mathbf{i}}$ og $\hat{\mathbf{j}}$ slik:



$\hat{\mathbf{i}}$ har retning langs positiv x-akse.

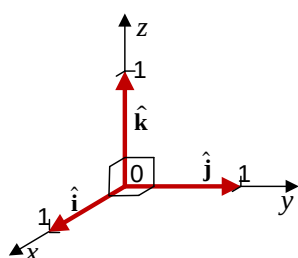
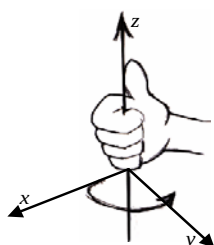
$\hat{\mathbf{j}}$ har retning langs positiv y-akse.

$$|\hat{\mathbf{i}}| = |\hat{\mathbf{j}}| = 1$$

Da kan en vektor $\mathbf{v}$ skrives slik:

$$\mathbf{v} = v_x \hat{\mathbf{i}} + v_y \hat{\mathbf{j}}.$$

Se figuren til venstre.



I et tredimensjonalt koordinatsystem har vi en z-retning vinkelrett på x- og y-aksene, slik at xyz danner et **høyrehåndssystem**. Dette kan defineres slik: Grip om z-aksen slik at tommelen peker i positiv z-retning. Da vil de fire andre fingrene peke *fra* positiv x *mot* positiv y slik figuren til venstre viser.

Så innfører vi en enhetsvektor $\hat{\mathbf{k}}$ i z-retningen. Et tredimensjonalt koordinatsystem med enhetsvektorene $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ og $\hat{\mathbf{k}}$ inntegnet er vist i midten ovenfor.

I et slikt koordinatsystem kan en vektor $\mathbf{v}$ skrives

$$\mathbf{v} = v_x \hat{\mathbf{i}} + v_y \hat{\mathbf{j}} + v_z \hat{\mathbf{k}}.$$

Her er v_z komponenten av $\mathbf{v}$ langs z-aksen. Vi sier at $\mathbf{v}$ er skrevet på **komponentform**.

Slik dekomponering er svært nyttig i mange sammenhenger, for eksempel når vi skal addere eller subtrahere vektorer slik eksemplet nedenfor viser:

Eksempel 10.5.1: Vi har gitt vektorene

$$\mathbf{u} = 2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$$

og

$$\mathbf{v} = -\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}.$$

Finn $2\mathbf{u} - \mathbf{v}$ og $\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$.

Løsning:

$$2\mathbf{u} - \mathbf{v} = 2(2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) - (-\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}) = 4\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}} + \hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}} = \underline{\underline{5\hat{\mathbf{i}} - 5\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}}}.$$

$$\mathbf{u} + 3\mathbf{v} = (2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) + 3(-\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}) = 2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}} - 3\hat{\mathbf{i}} + 9\hat{\mathbf{j}} - 6\hat{\mathbf{k}} = \underline{\underline{-\hat{\mathbf{i}} + 8\hat{\mathbf{j}} - 5\hat{\mathbf{k}}}}.$$

[Oppgave 10.5.1](#), [10.5.2](#).

Dersom det ikke kan føre til misforståelser, kan vi unnlate å skrive enhetsvektorene $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ og $\hat{\mathbf{k}}$. Da skriver vi bare ned komponentene v_x , v_y og v_z i riktig rekkefølge slik:

$$\mathbf{v} = [v_x, v_y, v_z] \text{ eller uten bruk av komma: } \mathbf{v} = [v_x \ v_y \ v_z].$$

Hittil har vi forutsatt at enhetsvektorene går langs x- y- eller z-aksen. Men det er slett ikke nødvendig. Vi kan ha enhetsvektorer som peker i hvilken som helst retning. Dersom $\hat{\mathbf{e}}_v$ er en enhetsvektor som peker i samme retning som vektoren $\mathbf{v}$, har vi at $\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\hat{\mathbf{e}}_v$. Dermed har vi en grei måte å finne en enhetsvektor i samme retning som $\mathbf{v}$:

En enhetsvektor i samme retning som $\mathbf{v}$ er gitt ved

$$\hat{\mathbf{e}}_v = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}.$$

10.6. Skalarproduktet.

Vi definerer **skalarproduktet** av to vektorer slik:

Skalarproduktet av de to vektorene $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos \theta$$

der θ er vinkelen mellom $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$.

Vi kan med en gang merke oss noen viktige konsekvenser av denne definisjonen:

- Siden både $|\mathbf{u}|$, $|\mathbf{v}|$ og $\cos \theta$ er *skalarer* (vanlige tall), blir også $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ en skalar, ikke en vektor.
- Skalarproduktet er **kommutativt**, d.v.s. at $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$.

- Dersom $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ står vinkelrett på hverandre, er $\theta = 90^\circ$ slik at $\cos \theta = 0$. Dette fører til at dersom verken $\mathbf{u}$ eller $\mathbf{v}$ har lengde lik null, må vi ha at:
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} \perp \mathbf{v}.$$
- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos 0^\circ = |\mathbf{v}|^2 \cdot 1 \Leftrightarrow |\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}.$

La oss se hva som skjer dersom vi beregner skalarprodukt av enhetsvektorene $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ og $\hat{\mathbf{k}}$:

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 1 \text{ fordi både } \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}} \text{ og } \hat{\mathbf{k}} \text{ har lengde lik 1.}$$

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = 0 \text{ fordi } \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}} \text{ og } \hat{\mathbf{k}} \text{ står vinkelrett på hverandre.}$$

Dette gir oss en enkel regneregul for skalarprodukt når vektorene er skrevet på komponentform:

Dersom $\mathbf{u} = u_x \hat{\mathbf{i}} + u_y \hat{\mathbf{j}} + u_z \hat{\mathbf{k}}$ og $\mathbf{v} = v_x \hat{\mathbf{i}} + v_y \hat{\mathbf{j}} + v_z \hat{\mathbf{k}}$, er

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y + u_z \cdot v_z.$$

For oversiktens skyld skal jeg nøye meg med å bevise dette for todimensjonale vektorer:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_x \hat{\mathbf{i}} + u_y \hat{\mathbf{j}}) \cdot (v_x \hat{\mathbf{i}} + v_y \hat{\mathbf{j}}) = u_x v_x \underbrace{\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}}}_{=1} + u_x v_y \underbrace{\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}}}_{=0} + u_y v_x \underbrace{\hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{i}}}_{=0} + u_y v_y \underbrace{\hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}}}_{=1} = u_x v_x + u_y v_y.$$

Beviset for tredimensjonale vektorer er helt likedan, bare med mer skriving.

Nå er det lett å finne lengden av en vektor på komponentform:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Eksempel 10.6.1: Vi har gitt vektorene

$$\mathbf{u} = 2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}} \text{ og } \mathbf{v} = -\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}.$$

Finn $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, $|\mathbf{u}|$, $|\mathbf{v}|$, og vinkelen θ mellom $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$.

Løsning:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot (-2) = \underline{\underline{-7}}.$$

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \underline{\underline{\sqrt{6}}}.$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + (-2)^2} = \underline{\underline{\sqrt{14}}}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos \theta \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|} = \frac{-7}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{14}} \approx \underline{\underline{-0.7638}} \Leftrightarrow \theta \approx \underline{\underline{139.8^\circ}}.$$

Oppgave 10.6.1.

Eksempel 10.6.2: Bestem t slik at vektorene

$$\mathbf{u} = 2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}} \text{ og } \mathbf{v} = -\hat{\mathbf{i}} + t \cdot \hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}$$

står vinkelrett på hverandre.

Løsning: Når to vektorer står vinkelrett på hverandre, er skalarproduktet lik null:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot t + 1 \cdot (-2) = 0 \Leftrightarrow -4 - t = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{t = -4}}.$$

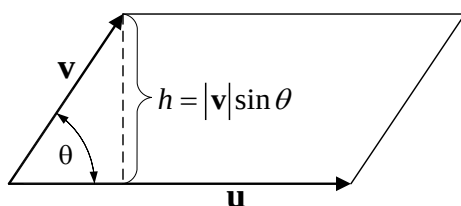
Oppgave 10.6.2, 10.6.3.

Til slutt skal jeg uten bevis føre opp disse setningene:

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$$

$$t \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = t \cdot \mathbf{u} + t \cdot \mathbf{v}$$

10.7. Vektorproduktet.



La $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ være to vektorer. Av figuren til venstre ser du sikkert at arealet av det parallelogrammet som vektorene utspenner, er

$$A = |\mathbf{u}| \cdot h = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \sin \theta$$

der θ er vinkelen mellom vektorene.

Vi skal nå tilordne dette arealet en enhetsvektor $\hat{\mathbf{n}}$ vinkelrett på flata som utspennes av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$, slik at $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\hat{\mathbf{n}}$ danner et høyrehåndssystem. På figuren vil da $\hat{\mathbf{n}}$ peke ut av papirplanet.

Den vektoren som har størrelse A og retning $\hat{\mathbf{n}}$ skal vi kalle **vektorproduktet** eller **kryssproduktet** av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$. Vi definerer altså:

Vektorproduktet (kryssproduktet) av de to vektorene $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \sin \theta \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

der θ er vinkelen mellom $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$, og $\hat{\mathbf{n}}$ er en enhetsvektor slik at $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\hat{\mathbf{n}}$ danner et høyrehåndssystem.

Vi kan med en gang merke oss noen viktige konsekvenser av denne definisjonen:

- $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ blir en vektor som står vinkelrett på både $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$.
- Vektorproduktet er *ikke* kommutativt. Tvert imot har vi at

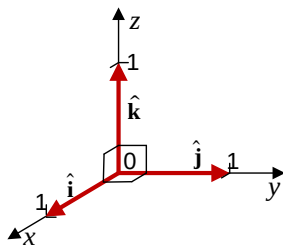
$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$$

fordi $\hat{\mathbf{n}}$ skifter retning når $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ bytter plass.

- Dersom $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er parallelle, er $\theta = 0^\circ$ slik at $\sin \theta = 0$. Dette fører til at dersom verken $\mathbf{u}$ eller $\mathbf{v}$ har lengde lik null, må vi ha at:

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} \parallel \mathbf{v}.$$

La oss se hva som skjer dersom vi beregner vektorprodukt av enhetsvektorene $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ og $\hat{\mathbf{k}}$:



$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = \vec{0}.$$

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}, \quad \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}}, \quad \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}.$$

$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{k}}, \quad \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{i}}, \quad \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{j}}.$$

Disse sammenhengene kan du selv kontrollere ved hjelp av figuren til venstre og høyrehåndsgregelen!

Væpnet med disse sammenhengene kan vi nå sette opp vektorproduktet på komponentform:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (u_x \hat{\mathbf{i}} + u_y \hat{\mathbf{j}} + u_z \hat{\mathbf{k}}) \times (v_x \hat{\mathbf{i}} + v_y \hat{\mathbf{j}} + v_z \hat{\mathbf{k}}) \\ &= u_x \left(v_x \underbrace{\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}}}_{=0} + v_y \underbrace{\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}}}_{=\hat{\mathbf{k}}} + v_z \underbrace{\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}}}_{=-\hat{\mathbf{j}}} \right) + u_y \left(v_x \underbrace{\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}}}_{=-\hat{\mathbf{k}}} + v_y \underbrace{\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}}}_{=0} + v_z \underbrace{\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}}}_{=\hat{\mathbf{i}}} \right) \\ &\quad + u_z \left(v_x \underbrace{\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}}}_{=\hat{\mathbf{j}}} + v_y \underbrace{\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}}}_{=-\hat{\mathbf{i}}} + v_z \underbrace{\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}}}_{=0} \right) \\ &= \underline{(u_y v_z - u_z v_y) \hat{\mathbf{i}} - (u_x v_z - u_z v_x) \hat{\mathbf{j}} + (u_x v_y - u_y v_x) \hat{\mathbf{k}}} \end{aligned}$$

Dette uttrykket er ikke lett å huske. Men dersom du kan regne med *determinanter*, vil du se at uttrykket kan skrives på determinantform slik det er gjort i ramma nedenfor:

Dersom $\mathbf{u} = u_x \hat{\mathbf{i}} + u_y \hat{\mathbf{j}} + u_z \hat{\mathbf{k}}$ og $\mathbf{v} = v_x \hat{\mathbf{i}} + v_y \hat{\mathbf{j}} + v_z \hat{\mathbf{k}}$, er

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = (u_y v_z - u_z v_y) \hat{\mathbf{i}} - (u_x v_z - u_z v_x) \hat{\mathbf{j}} + (u_x v_y - u_y v_x) \hat{\mathbf{k}}$$

Eksempel 10.7.1: Vi har gitt vektorene

$$\mathbf{u} = 2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = -\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}.$$

Finn $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

Løsning:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} \\ &= ((-1)(-2) - 1 \cdot 3)\hat{\mathbf{i}} - (2 \cdot (-2) - 1 \cdot (-1))\hat{\mathbf{j}} + (2 \cdot 3 - (-1) \cdot (-1))\hat{\mathbf{k}} \\ &= \underline{\underline{-\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}}}}\end{aligned}$$

[Oppgave 10.7.1](#), [10.7.2](#).

Det fins en mengde setninger for vektorprodukt, og for kombinasjoner av skalarprodukt og vektorprodukt. Jeg skal nøye meg med disse:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w} \\ (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \times \mathbf{u} &= \mathbf{v} \times \mathbf{u} + \mathbf{w} \times \mathbf{u}\end{aligned}$$

11. Tillegg.

I dette tilleggs-kapitlet blir underkapitlene numrert ut fra de hovedkapitlene som tilleggene tilhører.

4.4. Mer om matematisk logikk

I hovedkapitlet om matematisk logikk har vi definert hva vi mener med *utsagn*, og vi har også definert de grunnleggende sammenhengene mellom utsagn. Nå skal vi se litt mer på slike sammenhenger.

4.4.1. Logiske strukturer og sannhetsverditabeller.

Vi kan bruke negasjon, konjunksjon og disjunksjon til å bygge opp sammensatte utsagn. Slike sammensatte utsagn kalles ofte **logiske strukturer**. Vi skal la uttrykket *utsagn* omfatte både *utsagn* og *logisk struktur*. Vi får ofte bruk for å sammenlikne og forenkle logiske strukturer. Dette kan gjøres på flere måter. Vi skal stort sett bruke *sannhetsverditabeller*, men skal også si litt om *logisk algebra*.

Sannhetsverditabeller har du allerede stiftet bekjentskap med. Slike tabeller settes opp ved at vi undersøker sannhetsverdien av den logiske strukturen for alle mulige kombinasjoner av de logiske variablene som inngår i strukturen. Det er greit å ha et system for oppsett av sannhetsverditabell slik at du sikrer deg at hver mulig kombinasjon av utsagnsvariablene forekommer en og kun en gang. Jeg vil anbefale at du går fram slik:

Dersom strukturen inneholder 2 utsagnsvariabler (p og q) som hver kan ha 2 ulike verdier (0 eller 1), kan disse kombineres på $2^2 = 4$ ulike måter slik at tabellen får 4 rader. Da skriver du verdier av p i første kolonne (lengst til venstre). Under skriver du først to nuller, deretter to enere. I neste kolonne skriver du verdier av q som vekselvis null og en.

Dersom strukturen inneholder 3 utsagnsvariabler (p , q og r) som hver kan ha 2 ulike verdier (0 eller 1), kan disse kombineres på $2^3 = 8$ ulike måter slik at tabellen får 8 rader. Da setter du opp tabellen slik:

- I kolonnen for p skriver du først 4 nuller, deretter 4 enere.
- I kolonnen for q skriver du vekselvis 2 nuller og 2 enere.
- I kolonnen for r skriver du vekselvis 1 null og 1 ener.

Har du generelt n utsagnsvariabler, får du 2^n ulike kombinasjoner slik at tabellen får 2^n rader. Dersom du har $n = 4$ utsagnsvariabler, starter du med 8 nuller og 8 enere i første kolonne. I neste kolonne blir det vekselvis 4 nuller og 4 enere. Deretter fortsetter du som ovenfor.

Dersom du har vært borti binære tall, vil du se at dette systemet fører til at kombinasjonene av de n utsagnsvariablene utgjør tallene $0, 1, \dots, 2^n - 1$ skrevet på binær form.

Etter at du har satt opp alle kombinasjoner av variablene, må du bygge opp sannhetsverditabellen for den logiske strukturen. Jeg vil anbefale at jobber trinnvis innenfra og utover. Se eksemplet nedenfor.

Eksempel 4.4.1: Bruk sannhetsverditabell til å forenkle den logiske strukturen

$$(p \vee q) \wedge \overline{(\bar{p} \wedge q)}.$$

Løsning: Denne logiske strukturen inneholder kun to logiske variabler, p og q . Vi får da en slik tabell:

p	q	$p \vee q$	$\bar{p}$	$\bar{p} \wedge q$	$\overline{\bar{p} \wedge q}$	$(p \vee q) \wedge \overline{(\bar{p} \wedge q)}$
0	0	0	1	0	1	0
0	1	1	1	1	0	0
1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1

Her ser du at $(p \vee q) \wedge \overline{(\bar{p} \wedge q)}$ har samme sannhetsverditabell som p . dette betyr at

$(p \vee q) \wedge \overline{(\bar{p} \wedge q)}$ er **ekvivalent** med p , og skriver det slik:

$$(p \vee q) \wedge \overline{(\bar{p} \wedge q)} \equiv p$$

eller

$$(p \vee q) \wedge \overline{(\bar{p} \wedge q)} \Leftrightarrow p.$$

[Oppgave 4.4.1](#) og [4.4.2](#).

Et par definisjoner til slutt:

En **tautologi** er et utsagn som er sant for alle verdier av tilstandsvariablene.
En **selvmotsigelse** er et utsagn som er usant for alle verdier av tilstandsvariablene.

Eksempel 4.4.2: Vis ved hjelp av en sannhetsverditabell at:

$p \vee \bar{p}$ er en tautologi.

$p \wedge \bar{p}$ er en selvmotsigelse.

Løsning:

p	$\bar{p}$	$p \vee \bar{p}$	$p \wedge \bar{p}$
0	1	1	0
1	0	1	0

Vi ser at $p \vee \bar{p}$ alltid er sant, mens $p \wedge \bar{p}$ aldri er sant.

4.4.2. Mer om implikasjon og ekvivalens.

Vi har tidligere benyttet uttrykkene "implikasjon" og "ekvivalens" for å angi at dersom ett utsagn er sant, må også et annet utsagn være sant. Dette kan illustreres som en sammenheng

mellom to kolonner i en sannhetsverditabell. Men uttrykkene $p \Rightarrow q$ og $p \Leftrightarrow q$ kan også oppfattes som selvstendige utsagn som i seg selv kan være sanne eller usanne. Dermed kan de også brukes til å bygge opp sammensatte utsagn. Sannhetsverditabellene for de logiske strukturene $p \Rightarrow q$ og $p \Leftrightarrow q$ er gitt nedenfor:

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Vi ser av tabellen at $p \Leftrightarrow q$ er et sammensatt utsagn som er sant hvis og bare hvis både p og q er sanne, eller hvis begge er usanne.

Sannhetsverditabellen for $p \Rightarrow q$ viser at dette sammensatte utsagnet er *usant* hvis og bare hvis p er sant og q er usant. I alle andre situasjoner er det sammensatte utsagnet $p \Rightarrow q$ sant. Dette kan virke litt merkelig i praksis. Kan vi i det hele tatt avgjøre sannhetsverdien av dette sammensatte utsagnet dersom p er usant? Dette illustreres i eksemplet nedenfor:

Eksempel 4.4.3. Vi har disse to utsagnene:

p : "Du har stått til eksamen."

q : "Du får 100 kroner."

Hva innebærer de to utsagnene $p \Leftrightarrow q$ og $p \Rightarrow q$?

Løsning: Det sammensatte utsagnet $p \Leftrightarrow q$ blir da: "Hvis og bare hvis du har stått til eksamen, får du 100 kroner". Det virker helt rimelig at $p \Leftrightarrow q$ er sant dersom du har stått til eksamen og får 100 kroner, eller dersom du *ikke* har stått til eksamen og *ikke* får 100 kroner. Det er også rimelig at $p \Leftrightarrow q$ er usant dersom du *ikke* har stått til eksamen, men får 100 kroner likevel, eller dersom du har stått til eksamen uten å få 100 kroner.

Det sammensatte utsagnet $p \Rightarrow q$ blir: "Hvis du har stått til eksamen, så får du 100 kroner". Det virker helt rimelig at $p \Rightarrow q$ er sant dersom du står til eksamen og får 100 kroner, og at $p \Rightarrow q$ er usant dersom du står til eksamen, men får ikke 100 kroner. Men hvilken sannhetsverdi er det rimelig å tillegge $p \Rightarrow q$ dersom du *ikke* har stått til eksamen? "Sunn fornuft" gir oss ikke noe svar. Men sannhetsverditabellen viser at $p \Rightarrow q$ da er *sant*. Dette er nærmest et valg man har gjort for å kunne lage enkle og fornuftige regneregler for slike sammensatte utsagn.

Ved hjelp av sannhetsverditabeller kan vi vise at:

$$p \Rightarrow q \equiv \bar{q} \Rightarrow \bar{p}.$$

Uttrykket $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ kalles **den kontrapositive formen** til $p \Rightarrow q$.

Ekvivalensen i ramma ovenfor brukes mye i bevisføring, noe vi skal se etter hvert.

Oppg. 4.4.3.

Eksempel 4.4.4: Vi har fremdeles disse utsagnene:

p : "Du står til eksamen."

q : "Du får 100 kroner."

Vis at ekvivalensen $p \Rightarrow q \equiv \bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ virker fornuftig.

Løsning: Utsagnet $p \Rightarrow q$ betyr "Dersom du står til eksamen, skal du få 100 kroner".

Utsagnet $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ betyr "Dersom du ikke får 100 kroner, så har du ikke stått til eksamen".

Det virker rimelig å si at disse to sammensatte utsagnene er ekvivalente. Hvis vi ikke hadde satt opp sannhetsverditabellen for $p \Rightarrow q$ slik vi gjorde, kunne vi heller ikke satt opp ekvivalensen ovenfor.

Eksempel 4.4.5: Elektro-læreren sier til en student: "Hvis du ikke får godkjent lab.journalen, får du ikke gå opp til eksamen". Studenten satt oppe hele natten og jobbet med journalen, og fikk den godkjent. Likevel fikk ikke studenten gå opp til eksamen. Har læreren brutt løftet?

Løsning: Vi definerer disse to utsagnene:

p : "Du har fått godkjent lab.journalen".

q : "Du får gå opp til eksamen".

Lærerens utsagn kan skrives $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$, som er ekvivalent med $q \Rightarrow p$, d.v.s. "Hvis du får gå opp til eksamen, så har du fått godkjent lab.journalen". Men dette er noe helt annet enn $p \Rightarrow q$, d.v.s. "Hvis du har fått godkjent lab.journalen, så får du gå opp til eksamen". Dette framgår av sannhetsverditabellen nedenfor:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Altså har ikke læreren brutt noe løfte (dersom studenten tror det, må han sette seg bedre inn i reglene for matematisk logikk).

Oppg. 4.4.4.

Eksempel 4.4.6: Vis ved hjelp av sannhetsverditabell at

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\bar{p} \vee q).$$

Løsning: Setter opp sannhetsverditabellen:

p	q	$\bar{p}$	$p \Rightarrow q$	$\bar{p} \vee q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

Vi tar en tøffere oppgave til slutt: [Opppg. 4.4.5.](#)

4.4.3. Logisk algebra.

Ved hjelp av sannhetsverditabeller kan vi undersøke om to sammensatte utsagn er ekvivalente. Men det er ofte lettere å benytte et sett regler som til sammen utgjør grunnreglene for **logisk algebra** (eller Boole'sk algebra):

La p, q og r være utsagn. Da gjelder disse lovene:

$$\begin{array}{ll} p \vee q \equiv q \vee p & \text{Kommutative lover} \\ p \wedge q \equiv q \wedge p & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r & \text{Assosiative lover} \\ p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) & \text{Distributive lover} \\ p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \overline{(p \vee q)} \equiv \bar{p} \wedge \bar{q} & \text{deMorgans lover} \\ \overline{(p \wedge q)} \equiv \bar{p} \vee \bar{q} & \end{array}$$

Alle disse lovene lar seg lett bevise ved hjelp av sannhetsverditabell. Det samme gjelder sammenhengene nedenfor, som du også ofte får bruk for:

$$\begin{array}{ll} \overline{\bar{p}} \equiv p & \\ p \vee p \equiv p & p \wedge p \equiv p \\ p \vee \bar{p} \equiv 1 & p \wedge \bar{p} \equiv 0 \\ p \vee 1 \equiv 1 & p \wedge 1 \equiv p \\ p \vee 0 \equiv p & p \wedge 0 \equiv 0 \end{array}$$

Eksempel 4.4.7: Skriv $(p \vee q) \wedge \overline{(\bar{p} \wedge q)}$ så enkelt som mulig ved hjelp av logisk algebra:

Løsning:

$$\begin{aligned}
 & (p \vee q) \wedge \overline{(\bar{p} \wedge q)} \\
 & \equiv (p \vee q) \wedge (\bar{\bar{p}} \vee \bar{q}) && \text{deMorgans lov} \\
 & \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee \bar{q}) && \text{opphever dobbel negasjon} \\
 & \equiv p \vee (q \wedge \bar{q}) && \text{distributiv lov} \\
 & \equiv p \vee 0 \\
 & \equiv p
 \end{aligned}$$

Altså er $(p \vee q) \wedge \overline{(\bar{p} \wedge q)} \equiv p$.

Oppg. 4.4.6.

4.5. Bevisteknikk.

Vi skal nå se hvordan vi benytter regler fra matematisk logikk når vi fører matematiske bevis. Vi skal se på flere former for bevis, og skal være adskillig mer formell enn vi ellers vil være i et slikt matematikk-kurs. Men først skal vi se hva som kan skje dersom vi slurver. Da kan vi få mange ”morsomme” resultater, noe ”beviset” nedenfor er et eksempel på.

Eksempel 4.5.1: Finn feilen i ”beviset” nedenfor:

Vi starter med å sette

$$a = 2.$$

Så multipliserer vi med a på begge sider:

$$a^2 = 2a.$$

Trekker fra 4 på begge sider:

$$a^2 - 4 = 2a - 4.$$

Bruker kvadratsetning på venstre side, og faktorerer ut 2 på høyre side:

$$(a - 2)(a + 2) = 2(a - 2).$$

Deler med $(a - 2)$ på begge sider, og får:

$$a + 2 = 2.$$

Men siden vi startet med at $a = 2$, har vi ved innsetting at

$$2 + 2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{4 = 2.}}$$

Løsning: Her har vi gjort flere formelle feil. Men den feilen som fører til katastrofen, er at vi deler med $(a - 2)$. For når vi startet med å sette $a = 2$, blir $a - 2 = 2 - 2 = 0$. Og som du sikkert vet, kan vi ikke dele et tall med null.

4.5.1. Direkte bevis.

Den enkleste bevis-formen er det direkte beviset. Det går i korthet ut på å omforme uttrykk ved hjelp av regneregler.

Eksempel 4.5.2: Vis at

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

(første kvadratsetning).

Løsning: Vi bruker kjente regneregler:

$$(a + b)^2 \stackrel{(1)}{=} (a + b)(a + b) \stackrel{(2)}{=} a^2 + ab + ba + b^2 \stackrel{(3)}{=} a^2 + 2ab + b^2.$$

Forklaringer til overgangene:

- 1: Bruker definisjonen på en potens.
- 2: Multipliserer ut.
- 3: Benytter at $ab = ba$ og trekker sammen.

Dersom vi skal være pirkete, bør kvadratsetningen skrives slik:

$$(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2.$$

Symbolet $\equiv$ betyr at $(a + b)^2$ *alltid* skal være lik $a^2 + 2ab + b^2$, uansett verdier av a og b . Vi skal imidlertid ikke være så pirkete, og benytter derfor det vanlige likhetstegnet.

Så tar vi et mer komplisert eksempel, der vi må drive målrettet triksing:

Eksempel 4.5.3: Finn en formel for løsning av andregradslikningen

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

der a , b og c er konstanter, og presiser betingelsene for at formelen er gyldig.

Løsning: Andregradslikningen oppfattes som et utsagn, der vi skal finne eventuelle x -verdier som gjør utsagnet sant. Vi skal nå utføre noen operasjoner som (under visse betingelser) gir oss *ekvivalente* utsagn, som er slik at vi direkte ser hvilke verdier av x som gjør utsagnet sant.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Updownarrow \text{ dersom } a \neq 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Updownarrow \text{ Multipliserer og dividerer andre ledd med } 2$$

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Updownarrow \text{ Gjør klar til å bruke 1. kvadratsetning}$$

$$x^2 + 2 \frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} - \frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

Legger til like mye på
begge sider av likhetstegnet

$$\Updownarrow \text{ Ordner venstre side, og finner fellesnevner for høyre side}$$

$$x^2 + 2 \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c \cdot 4a}{a \cdot 4a}$$

⇕ Bruker 1. kvadratsetning på venstre side, og trekker sammen høyre side

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

⇕ Forutsetter at høyre side er et positivt tall, og trekker kvadratrota

$$\left[x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right] \vee \left[x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right]$$

⇕

$$\left[x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right] \vee \left[x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right]$$

Dermed ser vi at:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

forutsatt at $a \neq 0$ og at $b^2 - 4ac \geq 0$.

Legg merke til at vi hele veien i eksempel 4.5.3 ovenfor var nøye med å benytte ekvivalenssymbolet $\Leftrightarrow$ (eller $\Leftrightarrow$). Dette innebærer at alle x -verdier som gjør at utsagnet på en side av ekvivalenssymbolet er sant, også fører til at utsagnet på den andre siden blir sant.

4.5.2. Bevis ved moteksempel.

Noen ganger ser det ut til at en regel gjelder, men vi klarer ikke å bevise regelen. Da kan det lønne seg å sjekke grundig om regelen virkelig gjelder. Dersom vi kan påvise et eksempel på at regelen *ikke* gjelder, har vi bevist (ved moteksempel) at regelen ikke gjelder generelt.

Eksempel 4.5.3: Undersøk om dette utsagnet stemmer:

”Dersom n er et primtall, er også $2^n - 1$ et primtall.”

Løsning: Du husker sikkert at et *primtall* er et tall som kun er delelig med 1 og med seg selv. Vi setter noen enkle primtall inn i utsagnet:

$n = 1$: $2^n - 1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = \underline{1}$ som er et primtall.

$n = 2$: $2^n - 1 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = \underline{3}$ som er et primtall.

$n = 3$: $2^n - 1 = 2^3 - 1 = 8 - 1 = \underline{7}$ som er et primtall.

$n = 5$: $2^n - 1 = 2^5 - 1 = 32 - 1 = \underline{31}$ som er et primtall.

$n = 7$: $2^n - 1 = 2^7 - 1 = 128 - 1 = \underline{127}$ som er et primtall.

Så langt ser alt vel og bra ut. Men se hva som skjer når vi setter $n = 11$ som er neste aktuelle verdi av n :

$$2^n - 1 = 2^{11} - 1 = 2048 - 1 = 2047 = 23 \cdot 89.$$

Regelen gjelder altså ikke for $n = 11$. Da har vi også vist at regelen ikke gjelder generelt.

4.5.3. Kontrapositivt bevis.

Utsagnet i eksempel 4.5.3 kan skrives:

" n er et primtall $\Rightarrow 2^n - 1$ er et primtall".

Vi kommer ofte over slike utsagn av typen

$$p \Rightarrow q.$$

Men vi vet allerede at

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\bar{q} \Rightarrow \bar{p}).$$

Når vi skal bevise utsagn av typen $p \Rightarrow q$, er det noen ganger lettere å vise at $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$, som kalles den *kontrapositive* formen av $p \Rightarrow q$. Eksemplet nedenfor viser framgangsmåten:

Eksempel 4.5.4: La a og b være hele tall. Bevis påstanden:

"Dersom $a + b \geq 5$, så er enten $a \geq 3$ eller $b \geq 3$ ".

Løsning: Vi definerer disse utsagnene:

$$p: a + b \geq 5 \qquad q: a \geq 3 \qquad r: b \geq 3.$$

Vi skal altså vise implikasjonen

$$p \Rightarrow (q \vee r).$$

Vi setter da opp disse ekvivalensene:

$$p \Rightarrow (q \vee r) \equiv \overline{(q \vee r)} \Rightarrow \bar{p} \equiv \bar{q} \wedge \bar{r} \Rightarrow \bar{p}.$$

I den siste overgangen har vi brukt en av de Morgans lover. Men nå er (husk at a og b er *hele* tall):

$$\bar{p}: a + b \leq 4 \qquad \bar{q}: a \leq 2 \qquad \bar{r}: b \leq 2$$

Og når $a \leq 2$ og $b \leq 2$, må jo $a + b \leq 4$, slik at

$$\bar{q} \wedge \bar{r} \Rightarrow \bar{p}$$

opplagt må være sant. Dermed har vi bevist påstanden.

Dersom vi skal bruke kontrapositiv bevistechnik for å vise ekvivalensen $p \Leftrightarrow q$, må vi bevise begge de to implikasjonene $p \Rightarrow q$ og $q \Rightarrow p$. Eksemplet nedenfor viser teknikken:

Eksempel 4.5.5: Bevis påstanden:

La n være et helt tall. Da gjelder:

$$n \text{ er et partall} \Leftrightarrow n^2 \text{ er et partall}.$$

Løsning: Jeg minner om at et *partall* inneholder 2 som faktor. Tallene 2, 4, 6, 8, ... er alle partall. Generelt har vi at dersom n er et partall, må det eksistere et helt tall a slik at $n = 2a$. Væpnet med denne kunnskapen går vi i gang.

Først skal jeg vise at:

$$n \text{ er et partall} \Rightarrow n^2 \text{ er et partall}.$$

Dette gjøres med direkte regning:

$$n \text{ er et partall} \Leftrightarrow n = 2a \Rightarrow n^2 = 4a^2 \Leftrightarrow n^2 \text{ er et partall}.$$

Merk at vi har en *implikasjon* under veis i beviset.

Så må jeg vise at:

$$n^2 \text{ er et partall} \Rightarrow n \text{ er et partall.}$$

Her vil jeg benytte kontrapositiv teknikk. Jeg viser da at:

$$n \text{ er ikke et partall} \Rightarrow n^2 \text{ er ikke et partall.}$$

Når n ikke er et partall, må n være et oddetall, d.v.s. at det må finnes et helt tall b slik at $n = 2b + 1$. Da får vi:

$$n \text{ er ikke et partall} \Leftrightarrow n = 2b + 1$$

$$\Rightarrow n^2 = (2b + 1)^2 = 4b^2 + 4b + 1 = 4b(b + 1) + 1$$

$$\Leftrightarrow n^2 \text{ er ikke et partall}$$

Nå har jeg bevist begge implikasjonene, slik at jeg har bevist ekvivalensen

$$n \text{ er et partall} \Leftrightarrow n^2 \text{ er et partall.}$$

[Oppg. 4.4.7](#), [Oppg. 4.4.8](#).

4.5.4. Bevis ved selvmotsigelse.

Denne teknikken minner litt om kontrapositiv beviseteknikk. Problemet går nå ut på å vise at en påstand p er sann. Men vi viser isteden at $\bar{p}$ er usann. Metoden illustreres med eksemplet nedenfor. Resultatet var kjent allerede av greske matematikere flere hundre år før Kristi fødsel.

Eksempel 4.5.6: Vis at $\sqrt{2}$ er et irrasjonalt tall.

Løsning: Jeg minner om at et *rasjonalt* tall er et tall som kan skrives som en brøk der teller og nevner er *hele* tall. Vi skal altså vise at det ikke er mulig å skrive $\sqrt{2}$ på formen $\frac{t}{n}$, der t og n er hele tall.

Vi fører beviset slik: Vi *antar* at $\sqrt{2}$ er et rasjonalt tall, d.v.s. at det fins hele, positive tall t og n slik at

$$\sqrt{2} = \frac{t}{n}.$$

Videre forutsetter vi at brøken $\frac{t}{n}$ er forkortet så mye som mulig, slik at t og n ikke har noen felles faktorer. Da kan heller ikke

$$\frac{t}{n} \cdot \frac{t}{n} = \frac{t^2}{n^2}$$

ha noen felles faktorer. Men dersom $\sqrt{2} = \frac{t}{n}$, får vi ved kvadrering at

$$2 = \left(\frac{t}{n}\right)^2 = \frac{t^2}{n^2} \Leftrightarrow t^2 = 2n^2.$$

Men dette innebærer at t^2 er et partall. Vi har allerede i eksempel 4.5.5 vist at da må også t selv være et partall, d.v.s. at det må finnes et tall a slik at $t = 2a$. Nå nøster vi opp:

$$t^2 = 2n^2 \Leftrightarrow (2a)^2 = 2n^2 \Leftrightarrow 4a^2 = 2n^2 \Leftrightarrow 2a^2 = n^2.$$

Dermed er også n^2 et partall, slik at n blir et jamt tall. Men når både t og n må være partall, strider dette mot forutsetningen om at brøken $\frac{t}{n}$ er forkortet så mye som mulig. Vi har dermed vist at antakelsen om at $\sqrt{2}$ er et rasjonalt tall fører til en selvmotsigelse. Vi må derfor slå fast at $\sqrt{2}$ ikke kan være et rasjonalt tall.

Oppg. 4.4.7.

4.6. Digital elektronikk.

Digital elektronikk gikk i utgangspunktet ut på å lage kretser som slår lyspærer, motorer, releer osv. på og av. I dag brukes digitale kretser på en mengde ulike områder, ikke minst innen datateknologien. Innen digital elektronikk er det utviklet en egen terminologi med egne symboler som skiller seg fra terminologi og symbolbruk i matematisk logikk. Eksempler:

$p \wedge q$ kalles p AND q , og skrives $p \bullet q$.

$p \vee q$ kalles p OR q , og skrives $p + q$.

$\neg p$ kalles NOT p , og skrives $\bar{p}$.

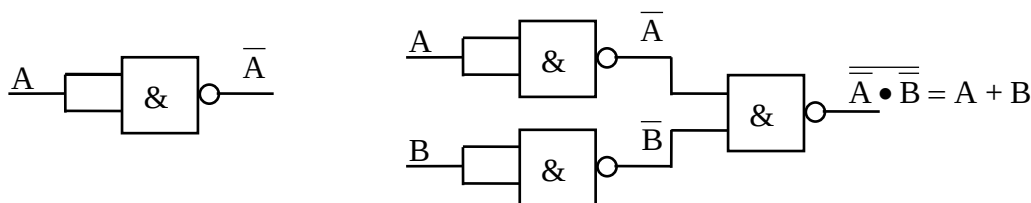
Når elektro-ingeniørene tegner krets-skjemaer, har de tre ulike sett symboler å velge mellom:

- IEEE/ANSI-settet, som brukes i USA. De fleste databøker benytter dette settet.
- DIN-settet, som benyttes mest i Tyskland (og noen andre europeiske land).
- IEC-settet, som er det offisielle standard-settet, men som stort sett bare brukes i lærebøker.

De vanligste IEC-symbolene er:

AND	OR	NOT	NAND	NOR
$X = A \bullet B$	$X = A + B$	$X = \bar{A}$	$X = \overline{A \bullet B}$	$X = \overline{A + B}$

NAND og NOR-kretsene er AND og OR-kretser med invertert utgang. De brukes mye fordi både AND, OR og NOT kan lages på grunnlag av NAND eller NOR. Nedenfor ser du hvordan NOT og OR kan lages av NAND-kretser:



På tilsvarende måte kan du lage NOT og AND av NOR (prøv!).
Du ser vel at det er en av deMorgans lover som benyttes i det siste eksemplet?

Logisk algebra (med bl.a. deMorgans lover) benyttes mye til å forenkle og bygge om krets-skjemaer. Men dersom det er mange variabler (og det er det ofte i digital elektronikk) benyttes gjerne andre metoder (f.eks. Karnaugh-diagram). Slike metoder skal vi ikke ta opp her.

4.7. EDB-programmering.

Mange programmerings-språk har innebygd *logiske variable*, d.v.s. variable som kun kan ha verdiene TRUE eller FALSE. *Pascal* er et slikt språk. Her deklarerer vi logiske variable slik:

```
BOOLEAN positiv, negativ;
```

De to variablene **positiv** og **negativ** er nå to logiske variable.

Logiske variabler kan gis en verdi f. eks. slik:

```
positiv := (x > 0);
```

Her blir **positiv** TRUE dersom variabelen **x** har en verdi større enn null, FALSE ellers.

Vi kan bygge opp logiske strukturer med operatorene **OR**, **AND** og **NOT**. Eks.:

```
negativ := (NOT positiv) AND NOT(x = 0);
```

(men det kan gjøres mye enklere).

De vanligste løkke-strukturene i Pascal er **repeat**-løkka og **while**-løkka. Dersom variabelen **ferdig** er en logisk variabel, er disse løkkestrukturene slik:

<pre>repeat (instruksjoner) until ferdig;</pre>	<pre>while (NOT ferdig) do (instruksjoner)</pre>
---	--

Merk at løkke-betingelsen må negeres (inverteres) når du går fra den ene løkkestrukturen til den andre.

Eksempel 4.7.1: Du skal søke i en database. En logisk variabel **funnet** settes TRUE når du finner søkeordet, og en logisk variabel **data_slutt** settes TRUE når du har søkt gjennom hele databasen. Planlegg et lite program som utfører et slikt søk.

Løsning: Du må starte med å sette begge variablene FALSE:

```
funnet := FALSE;  
data_slutt := FALSE;
```

Ei **repeat**-løkke som søker inntil søkeordet er funnet, eller til databasen er gjennomført, blir da slik:

```
repeat  
    (søk)  
until (funnet OR data_slutt);
```

Ei ekvivalent **while**-løkke blir slik:

```
while NOT (funnet OR data_slutt)  
do (søk);
```

while-løkka kan også utformes slik:

```
while ((NOT funnet) AND (NOT data_slutt))  
do (søk);
```

Du ser vel at du bruker en av deMorgans lover når du går fra den ene **while**-løkka til den andre?

En sløv programmerer kan lett utforme **while**-løkka slik:

```
while ((NOT funnet) OR (NOT data_slutt))  
do (søk);
```

Men dette blir veldig galt, fordi **while**-løkka vil surre og gå så lenge den sammensatte betingelsen **((NOT funnet) OR (NOT data_slutt))** er TRUE, d.v.s. så lenge minst en av de to variablene **NOT funnet** og **NOT data_slutt** er TRUE. For å få stoppet løkka, må *både* **NOT funnet** og **NOT data_slutt** være FALSE, d.v.s. at både **funnet** og **data_slutt** må være TRUE. Dette medfører at dersom søkeordet finnes, fortsetter programmet å søke gjennom databasen helt til slutten. Og dersom søkeordet ikke finnes, vil programmet fortsette søket forbi enden av databasen. Hva som da skjer, er umulig å forutsi. Som regel vil datamaskinen henge seg opp eller programmet vil krasje.

I praksis kommer du ofte ut for mer kompliserte logiske strukturer. Du innser sikkert at det da kan lønne seg å sjekke tankegangen din med en sannhetsverditabell eller ved å benytte reglene for logisk algebra.

4.8. Mengdealgebra.

Dersom du skal jobbe mye med mengder, er det tungvint å tegne Venn-diagram hver gang du skal undersøke sammenhenger mellom mengder. Venn-diagram er heller ikke særlig nyttig dersom du her mer enn tre mengder. Da er det greiere å benytte generelle regneregler som kan bevises en gang for alle. Her er de viktigste reglene:

La A , B og C være tre mengder med samme grunnmengde U . Da gjelder:

$$A \cap A = A$$

$$A \cup A = A$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap \overline{A} = \emptyset$$

$$A \cup \overline{A} = U$$

Kommutative lover:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Assosiative lover:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Distributive lover

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

deMorgans lover:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Disse reglene kan bevises med Venn-diagram. De kan også vises ved hjelp av regneregler for logisk algebra.

Eksemplet nedenfor viser hva vi kan bruke mengdealgebra til:

Eksempel 4.8.1: La $n(A)$ stå for antall elementer i mengden A .

Ta utgangspunkt i ”telleregelen”

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

og vis at

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) \\ &\quad - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) \\ &\quad + n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Løsning: Vi starter med å skrive

$$A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C).$$

Da blir

$$n(A \cup B \cup C) = n(A \cup (B \cup C)) = n(A) + n(B \cup C) - n(A \cap (B \cup C)).$$

Så bruker du den grunnleggende telleregelen til å skrive

$$n(B \cup C) = n(B) + n(C) - n(B \cap C).$$

For å omforme $n(A \cap (B \cup C))$, benytter du at

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

slik at

$$\begin{aligned} n(A \cap (B \cup C)) &= n((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\ &= n(A \cap B) + n(A \cap C) - n((A \cap B) \cap (A \cap C)). \end{aligned}$$

Da gjenstår det bare å bruke mengdealgebraen til å innse at

$$(A \cap B) \cap (A \cap C) = A \cap B \cap C.$$

Ved å samle trådene, får vi nå at

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A \cup (B \cup C)) = n(A) + n(B \cup C) - n(A \cap (B \cup C)) \\ &= n(A) + (n(B) + n(C) - n(B \cap C)) \\ &\quad - (n(A \cap B) + n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C)) \\ &= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) \\ &\quad + n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

4.9. Mer om løsning av likninger.

La oss først slå fast at:

- En likning eller et system av likninger er egentlig et åpent utsagn.
- Å løse en likning eller et system av likninger går ut på å finne den eller de verdiene av den eller de ukjente som gjør utsagnet sant.
- Samlingen av slike verdier kalles *løsningsmengden*.

Eksempel 4.9.1: Formuler disse likningene og likningssystemene som åpne utsagn:

a) $2x - 1 = 3(x + 2)$

b) $3x - y = 4$
 $x + 2y = -1$

c) $x^2 - 4x = 0$

d) $x^2 - xy = 0$
 $2x + y = 3$

Løsning: Benytter p som utsagnsvariabel i alle oppgavene.

a) $p(x): 2x - 1 = 3(x + 2).$

b) $p(x, y): 3x - y = 4 \quad \wedge \quad x + 2y = -1.$

c) $p(x): x^2 - 4x = 0.$

d) $p(x, y): x^2 - xy = 0 \quad \wedge \quad 2x + y = 3$

Hva er det egentlig vi gjør når vi løser en likning:

Vi løser en likning ved å omforme utsagnet til et *ekvivalent* utsagn som er så enkelt at vi direkte ser hvilke verdier av den eller de ukjente som gjør utsagnet sant.

Merk at vi hele tiden må omforme til *ekvivalente* utsagn. Da kan vi benytte at:

Dersom to åpne utsagn p og q er ekvivalente, har utsagnene samme løsningsmengde.

Væpnet med denne kunnskapen går vi i gang med å løse likningene og likningssystemene i eksempel 4.9.1:

Eksempel 4.9.2: Løs likningene og likningssystemene i Eksempel 4.4.1.

Løsning:

a) $p(x): 2x - 1 = 3(x + 2)$

⇕ Multipliserer ut parentesen

$$2x - 1 = 3x + 6$$

⇕ Legger til like mye på begge sider av likhetstegnet

$$2x - 1 - 3x + 1 = 3x + 6 - 3x + 1$$

⇕ Trekker sammen

$$-x = 7$$

⇕ Multipliserer med -1 på begge sider av likhetstegnet

$$q(x): x = -7$$

Vi har vært nøye med å sikre oss at vi hele tiden har ekvivalenser. Vi ser direkte at løsningsmengden til $q(x)$ er $L_q = \{-7\}$. Da er også $L_p = \underline{\underline{\{-7\}}}$.

b) $p(x, y): 3x - y = 4 \quad \wedge \quad x + 2y = -1$

⇕ Multipliserer utsagnet til venstre med 2

$$6x - 2y = 8 \quad \wedge \quad x + 2y = -1$$

⇕ Legger til like mye på begge sider av
likhetstegnet i utsagnene

$$6x - 2y + x + 2y = 8 - 1 \quad \wedge \quad x + 2y - x = -1 - x$$

⇕ Trekker sammen

$$7x = 7 \quad \wedge \quad 2y = -1 - x$$

⇕ Deler venstre likning på 7, og setter inn i høyre likning

⇕ Trekker sammen

$$7x = 7 \quad \wedge \quad 2y = -1 - x$$

⇕ Deler venstre likning på 7, og setter inn i høyre likning

$$x = 1 \quad \wedge \quad 2y = -1 - 1 = -2$$

⇕ Deler høyre likning på 2

$$q(x, y): x = 1 \quad \wedge \quad y = -1$$

Siden vi hele veien har ekvivalenser, blir $L_p = L_q = \underline{\underline{\{(1, -1)\}}}$.

Legg merke til at vi har kun *en* løsning, som består av tallparet $x = 1 \quad \wedge \quad y = -1$.

c) $p(x): x^2 - 4x = 0$

⇕ Faktoriserer ut x

$$(x - 4)x = 0$$

⇕ Når et produkt er lik null, må en av faktorene være lik null

$$x - 4 = 0 \quad \vee \quad x = 0$$

⇕ Legger til like mye på begge sider av venstre likning

$$x - 4 + 4 = 0 + 4 \quad \vee \quad x = 0$$

⇕ Trekker sammen

$$q(x): x = 4 \quad \vee \quad x = 0$$

Siden vi hele veien har ekvivalenser, blir $L_p = L_q = \underline{\underline{\{0, 4\}}}$.

d) $p(x, y): x^2 - xy = 0 \quad \wedge \quad 2x + y = 3$

⇕ Faktoriserer ut x i utsagnet til venstre

$$x(x - y) = 0 \quad \wedge \quad 2x + y = 3$$

⇕ Når et produkt er lik null, er en av faktorene lik null

$$(x = 0 \vee x = y) \quad \wedge \quad 2x + y = 3$$

⇕ Bruker en regel fra logisk algebra

$$(x = 0 \wedge 2x + y = 3) \quad \vee \quad (x = y \wedge 2x + y = 3)$$

⇕ Erstatter x med henholdsvis 0 og y

$$(x = 0 \wedge 2 \cdot 0 + y = 3) \quad \vee \quad (x = y \wedge 2y + y = 3)$$

⇕ Trekker sammen

$$(x = 0 \wedge y = 3) \quad \vee \quad (x = y \wedge 3y = 3)$$

⇕ Ordner

$$q(x, y): (x = 0 \wedge y = 3) \quad \vee \quad (x = y \wedge y = 1)$$

Siden vi hele veien har ekvivalenser, blir $L_p = L_q = \underline{\underline{\{(0, 3), (1, 1)\}}}$.

Vi får altså to løsninger, som hver inneholder et tallpar.

I disse eksemplene har vi vært pinlig nøye med å føre løsningene slik at vi er sikre på at vi har ekvivalenser hele veien. I praksis gjør vi det mindre formelt. Vi benytter da regneteknikker som sikrer at vi har ekvivalenser, selv om vi ikke sier det uttrykkelig hver gang. Et eksempel på en slik regneteknikk er at når vi har en likning, flytter vi ofte ledd over på andre siden av likhetstegnet med motsatt fortegn. Det vi egentlig gjør, er at vi trekker fra eller legger til like mye på begge sider av likhetstegnet.

Hva skjer dersom vi et eller annet sted i våre omforminger har en *implikasjon* istedenfor en ekvivalens? Da må vi benytte regelen nedenfor:

La L_p og L_q være løsningsmengdene til de to åpne utsagnene p og q . Da gjelder:
Dersom $p \Rightarrow q$, så er $L_p \subseteq L_q$.

Dette betyr at L_q kan inneholde elementer som *ikke* er med i L_p , d.v.s. at vi kan få "falske" løsninger.

Noen ganger benytter vi omforminger som fører til at $p \Leftarrow q$. Dette betyr at $L_p \supseteq L_q$, slik at vi risikerer å miste løsninger.

Eksempel 4.9.3: Hva er galt med disse forsøkene på å løse en likning?

a) Vi løser likningen

$$p(x): x^2 - 3x = 0$$

slik:

$$x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x - 3) = 0 \stackrel{\text{forkorter}}{\Leftrightarrow} x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

b) Vi løser likningen

$$p(x): \sqrt{x+2} = x$$

slik:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+2} = x &\stackrel{\text{kvadrerer}}{\Leftrightarrow} x+2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \\ &\stackrel{\text{formel}}{\Leftrightarrow} x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{4}{2} = 2 \quad \vee \quad x = \frac{-2}{2} = -1 \end{aligned}$$

Løsning:

a) Vi kan ikke uten videre forkorte bort en faktor som inneholder en ukjent størrelse, fordi vi da risikerer å dividere på null. Korrekt løsning er altså

$$x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x - 3 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 0 \vee x = 3.}}$$

Slik regningen er utført i eksemplet, ville det vært formelt korrekt å sette

$$x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x - 3) = 0 \Leftarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

Dersom vi nå definerer $q(x): x = 3$, vil implikasjonen midt inne i utregningen fører til at $L_q \subseteq L_p$, noe vi ser stemmer.

b) Vi har ikke ekvivalens når vi kvadrerer. Vi burde ført løsningen slik:

$$\sqrt{x+2} = x \Rightarrow x+2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \text{ osv...}$$

Hvis vi definerer

$$q(x): x^2 - x - 2 = 0$$

blir $L_p \subseteq L_q$. Og dette stemmer, fordi $L_q = \{-1, 2\}$ mens $L_p = \{2\}$. Ved innsetting ser du at når du setter inn $x = -1$ i $p(x)$ får du feil fortegn (prøv!).

8.1. Tallet e

Du har sikkert stusset over den rare definisjonen av tallet e som er grunntall i det naturlige logaritmesystemet. Her skal jeg prøve å gi en (av mange) begrunnelser for at dette tallet er viktig.

Anta at du har satt et beløp K_0 inn i en bank som gir p prosent rente pr år. Det vil si at etter ett år er innskuddet vokst til

$$K_1 = K_0 + K_0 \cdot \frac{p}{100} = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

La oss for enkelhets skyld sette $\frac{p}{100} = r$, slik at

$$K_1 = K_0 (1 + r).$$

Nå får du den lure ideen at du vil ta ut innskuddet *med renter* etter et halvt år, og med en gang sette dette beløpet med renter inn i banken igjen. Det beløpet du kan ta ut etter et halvt år, er

$$K_0 + K_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{100} = K_0 \left(1 + \frac{r}{2}\right).$$

Når dette beløpet forrentes det neste halve året, sitter du igjen med et innskudd på

$$\left(K_0 \left(1 + \frac{r}{2}\right)\right) \left(1 + \frac{r}{2}\right) = K_0 \left(1 + \frac{r}{2}\right)^2.$$

Som den flinke matematiker du er, oppdager du straks at

$$\left(1 + \frac{r}{2}\right)^2 = 1 + 2 \cdot \frac{r}{2} + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = 1 + r + \frac{r^2}{4},$$

slik at du tjener et beløp på $K_0 \cdot \frac{r^2}{4}$ på å ta ut innskuddet og sette det direkte inn igjen etter et halvt år.

Nå får du blod på tann. Hva skjer dersom du tar ut og setter inn beløpet n ganger (med renter) i løpet av ett år? Tilsvarende resonnement som ovenfor viser at da vil beløpet vokse til

$$K_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n.$$

En kombinasjon av grådighet og interesse for matematikk fører til at du vil se hva som skjer når $n \rightarrow \infty$. Da får du

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = K_0 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n.$$

Nå innfører vi

$$x = \frac{n}{r} \Leftrightarrow \begin{cases} n = x \cdot r \\ \frac{r}{n} = \frac{1}{x} \end{cases}$$

Videre ser du at når $n \rightarrow \infty$ vil også $x \rightarrow \infty$. Da blir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = K_0 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = K_0 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x \cdot r} = K_0 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right)^r.$$

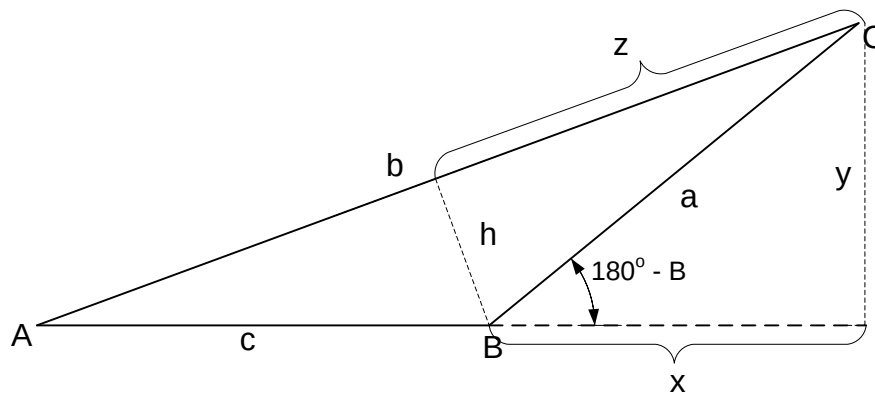
Men $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ er jo nettopp lik tallet e , slik at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = \underline{\underline{K_0 \cdot e^r}}.$$

Nå vil du sikkert innvende at det er umulig å ta ut og sette inn et beløp uendelig mange ganger i løpet av ett år. Men i naturen skjer det mange slike kontinuerlige "forrentninger". For eksempel kan veksten av en bakteriekoloni betraktes som en slik kontinuerlig "forrentning" av den opprinnelige kolonien.

9.6. Setninger for trekantberegninger.

Vi skal nå bevise sinus-setningen, cosinus-setningene og arealsetningen. Vi bruker da figuren nedenfor, der hjelpelinja h står vinkelrett på AC mens hjelpelinja y står vinkelrett på forlengelsen av AB . Merk at to av vinklene er mindre enn 90° , mens den tredje er større enn 90° .



Vi starter med å merke oss at

$$\sin A = \frac{h}{c} \Leftrightarrow h = c \sin A$$

og at

$$\sin C = \frac{h}{a} \Leftrightarrow h = a \sin C.$$

Vi setter disse to uttrykkene for h lik hverandre, og får

$$c \sin A = a \sin C \Leftrightarrow \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}.$$

Videre ser vi at

$$\sin A = \frac{y}{b} \Leftrightarrow y = b \sin A$$

og at

$$\sin(180^\circ - B) = \frac{y}{a} \Leftrightarrow y = a \sin(180^\circ - B) = a \sin B.$$

Vi setter disse to uttrykkene for y lik hverandre, og får

$$b \sin A = a \sin B \Leftrightarrow \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}.$$

Ved å sette disse to resultatene sammen, får vi sinusproporsjonen. Merk at setningen gjelder uavhengig av om vinklene er større enn eller mindre enn 90° .

Så går vi løs på cosinus-setningene. Ved hjelp av Pytagoras får vi at

$$\begin{aligned} b^2 &= (c+x)^2 + y^2 = (c^2 + 2cx + x^2) + y^2 = c^2 + 2cx + (x^2 + y^2) \\ &= c^2 + 2cx + a^2 = c^2 + 2c(a \cos(180^\circ - B)) + a^2 \\ &= c^2 + 2ca(-\cos B) + a^2 = \underline{a^2 + c^2 - 2ac \cos B} \end{aligned}$$

Under veis har vi benyttet at

$$\cos(180^\circ - B) = \frac{x}{a} \Leftrightarrow x = a \cos(180^\circ - B) = a(-\cos B).$$

Vi ser altså at setningen stemmer når vinkelen er større enn 90° . Nå skal vi vise at setningen også stemmer for en vinkel som er mindre enn 90° . På ny benytter vi Pytagoras, og setter opp:

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + (b-z)^2 = h^2 + (b^2 - 2bz + z^2) = (h^2 + z^2) + b^2 - 2bz \\ &= a^2 + b^2 - 2bz = a^2 + b^2 - 2b(a \cos C) = \underline{a^2 + b^2 - 2ab \cos C} \end{aligned}$$

Setningen stemmer altså også for en vinkel som er mindre enn 90° .

Den siste versjonen av setningen er følger direkte ved å bytte om bokstavene på hjørnene A og C, og på sidene a og c.

Til slutt skal vi vise formelen for arealet av en trekant. Vi ser at arealet blir

$$F = \frac{1}{2}c \cdot y = \frac{1}{2}c \cdot a \sin(180^\circ - B) = \underline{\frac{1}{2}c \cdot a \sin B}$$

eller at arealet blir

$$F = \frac{1}{2}b \cdot h = \underline{\frac{1}{2}b \cdot c \sin A}.$$

De andre to versjonene av setningen får vi på tilsvarende måte.

12. Oppgaver.

12.1. Småoppgaver fra teksten.

Du finner løsningsforslag på oppgavene ved å klikke på oppgavenummeret.

Oppgave 1.1.1

Trekk sammen disse uttrykkene:

- a) $(a - 2b)(2a - (a - b))$
- b) $3a - (a - b)(2a + b) - (b^2 + ab)$
- c) $(2x - 3y)(3 - 2(x + 2y)) - (x - y)^2$

Oppgave 1.2.1

I uttrykkene nedenfor skal du sette inn $a = -2$ og $b = -\frac{1}{2}$, og regne ut:

- a) $3 - a^2 + 4b - 1$
- b) $a - 2^3 - (2a^2 + 4)b - 1$

Oppgave 1.3.1

Regn ut disse uttrykkene ved hjelp av kvadratsetningene:

- a) $(2x - 3y)^2$
- b) $(x - 4y)(4y + x)$
- c) $(x + y + z)^2$
- d) $(a + b)^2 - (a - b)^2$

Oppgave 1.4.1

Faktoriser disse uttrykkene:

- a) $x^3y - 2x^2y^2$
- b) $2a^2b + 4ab^2 + 2b^3$
- c) $9x^3y - 16xy^3$
- d) $x^4 - 16$

Oppgave 1.4.2

Faktoriser disse uttrykkene:

- a) $2ab - a - 8b + 4$
- b) $x^3 - 4x^2 + x - 4$
- c) $x^3 - 4x^2 - x + 4$
- d) $x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

Oppgave 2.1.1

Forkort disse brøkene:

a) $\frac{x^2 - 4}{2x + 4}$

b) $\frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{x^2 - 3x}$

Oppgave 2.2.1

Trekk sammen disse brøkene, og firkort om mulig:

a) $2 - \frac{a - 2b}{a + b} + \frac{a}{a - b}$

b) $\frac{2}{x} - 3 + \frac{2x + 1}{x - 1} - \frac{x - 3}{x^2 - x}$

c) $\frac{x}{x - 2} - \frac{3}{2x - 4} + \frac{x - 1}{x^2 - 2x}$

d) $\frac{3x - y}{x + y} - 2 - \frac{1}{x} + \frac{x - y}{x^2 + xy}$

Oppgave 2.3.1

Skriv disse brøkene enklere:

a) $\frac{x - \frac{1}{x}}{1 - x}$

b) $\frac{2 - \frac{3}{x + 1}}{2x - 1}$

c) $\frac{\frac{x - 4}{2x} + \frac{1}{x - 1}}{\frac{x}{x - 1}}$

Oppgave 2.3.2

Trekk sammen brøkene nedenfor. Hint: Det kan lønne seg å forenkle hver "hovedbrøk" for seg før du trekker sammen.

a) $\frac{\frac{2x}{x - 2}}{x + 1} - \frac{\frac{3}{x + 1}}{x}$

b) $\frac{1 - \frac{2}{x + 1}}{\frac{x}{x - 1}} + \frac{\frac{2x}{x + 1}}{2}$

$$\text{c) } \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x}}{\frac{1}{x} + 1} - \frac{2 - \frac{1}{x+1}}{\frac{x+1}{2}}$$

Oppgave 3.1.1

Finn x av disse likningene:

$$\text{a) } 2ax - 6a + x = (a + 2)x$$

$$\text{b) } 3(x - 2) + \frac{x}{2} = \frac{x-1}{2}$$

$$\text{c) } \frac{x - 2a}{3} - \frac{a + 2x}{6} = \frac{3(x - 1)}{2}$$

Oppgave 3.1.2

Finn x av disse likningene:

$$\text{a) } 2 - \frac{1 - x}{x + 2} = 4$$

$$\text{b) } \frac{a + 2x}{a + 3} - \frac{2x + 1}{a - 1} = 2x + 1$$

Oppgave 3.1.3

- a) Når en partikkel A med massen m_A og fart u_A kolliderer rettlinjet med en annen partikkel B som har masse m_B og som ligger i ro, er partiklenes fart v_A og v_B etter kollisjonen gitt ved

$$m_A u_A = m_A v_A + m_B v_B.$$

Finn m_A uttrykt ved de andre størrelsene.

- b) Dersom resistansen i en motstand er R_0 når temperaturen er T_0 , og motstandens temperaturkoeffisient er α , er resistansen R ved temperaturen T gitt ved

$$R = R_0(1 + \alpha(T - T_0)).$$

Finn T uttrykt ved de andre størrelsene.

Oppgave 3.2.1

Finn x av disse likningene:

$$\text{a) } 2x^2 + 4 = 6x$$

$$\text{b) } x^3 - 4x = 0$$

$$\text{c) } x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

$$\text{d) } x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$$

$$\text{e) } x^2 - x - a^2 - a = 0$$

Oppgave 3.3.1

Forkort disse brøkene (om nødvendig etter først å ha løst passe likninger):

- a) $\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 3x + 2}$
b) $\frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1}$
c) $\frac{x^2 - ax - 2a^2}{x^2 - 3ax + 2a^2}$
d) $\frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^2 + x - 2}$

Oppgave 3.4.1

Løs likningssystemene nedenfor. Bruk gjerne flere metoder.

- a) $x - 4y = 11$
 $3x + 2y = 5$
b) $2x + 5y = 1$
 $5x - 3y = -13$

Oppgave 3.5.1

Løs likningssystemene nedenfor.

- a) $x - y^2 = 0$
 $2x + y = 1$
b) $4xy - y^2 = 0$
 $9x^2 + y^2 = 25$

Oppgave 3.6.1

Løs disse ulikhetene:

- a) $(2x - 1) - (x + 3) < 3(x + 2)$
b) $\frac{x-1}{2} - \frac{2x+3}{3} > 2\left(x + \frac{1}{3}\right)$

Oppgave 3.6.2

Løs disse ulikhetene:

- a) $x^2 - 4 > 3x$
b) $x^3 - 4x < x^2 - 4$
c) $\frac{2}{x-1} - 1 < \frac{2}{x}$
d) $\frac{x-4}{x^2-x-2} - \frac{1}{x+1} \leq 1 - \frac{2x}{x-2}$
e) $\frac{4x-2}{x^2+1} < 1$

Oppgave 4.1.1

Avgjør hvilke av formuleringene nedenfor som er utsagn, hvilke som er åpne utsagn og hvilke som ikke er utsagn:

- a) 2 er et negativt tall.
- b) Hvor er jeg?
- c) De er ikke gift.
- d) Han har vært norgesmester.
- e) $2^{89301} + 1$ er et primtall.
- f) Melk er godt.
- g) Melk er sunt.

Oppgave 4.1.2

Hva er negasjonen til disse utsagnene:

- a) $x = 5$.
- b) $a \geq 1$.
- c) $0 < x \leq 1$.

Oppgave 4.1.3

Vi har disse utsagnene:

p : "Jeg får studielån".

q : "Jeg vinner minst 10 000 kroner i tipping".

Formuler med ord disse sammensatte utsagnene:

- a) $p \vee q$
- b) $p \wedge q$
- c) $\overline{(p \vee q)}$
- d) $\overline{(p \wedge q)}$

Oppgave 4.1.4

Setningene nedenfor kan oppfattes som konjunksjoner eller disjunksjoner mellom to utsagn. Definer utsagnene, og sett opp den logiske strukturen.

- a) Jeg har klippet plenen og raket den.
- b) $0 < x < 5$
- c) Du kan ikke få både i pose og sekk.

Oppgave 4.1.5

Vis ved hjelp av sannhetsverditabell at deMorgans lover stemmer:

$$\overline{(p \vee q)} \equiv \bar{p} \wedge \bar{q}$$

$$\overline{(p \wedge q)} \equiv \bar{p} \vee \bar{q}$$

Oppgave 4.2.1

Skriv mengdene nedenfor på listeform:

- a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 10\}$.

- b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 10\}.$
c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 - 9x = 0\}.$

Oppgave 4.2.2

La grunnmengden være

$$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Definer disse mengdene:

$$A = \{1, 3, 5\}.$$

$$B = \{0, 1, 2, 3\}.$$

$$C = \{1, 2, 4, 6\}.$$

- a) Skriv disse mengdene på listeform:

$$A^C, \quad B^C, \quad A \cup B, \quad B - C, \quad A \cap B \cap C, \quad (C - B)^C.$$

- b) Avgjør om utsagnene nedenfor er sanne eller usanne:

$$(A \cap B) \subseteq C, \quad (A - B) \subset C^C.$$

Oppgave 4.2.3

Bruk Venn-diagram til å vise at

$$A^C \cup B^C = (A \cap B)^C.$$

Oppgave 4.2.4

50 studenter blir spurt hva de gjør mens de spiser frokost. 30 svarer at de ser Frokost-TV på NRK, 15 ser God Morgen Norge på TV2, mens 10 lytter på radio. 5 av de som ser Frokost-TV på NRK lytter også på radio, mens 3 av de som ser God Morgen Norge på TV2 også lytter på radio. Ingen ser både Frokost-TV og God Morgen Norge.

La N være mengden av studenter som ser Frokost-TV på NRK, T er mengden av studenter som ser God Morgen Norge på TV2, mens R er mengden av studenter som lytter på radio.

- a) Lag et Venn-diagram over situasjonen.
b) Hvor mange av studentene ser verken på TV eller lytter på radio?

Oppgave 4.3.1

Du husker sikkert at en geometrisk rekke er definert ved at hvert ledd er lik leddet foran multiplisert med et fast tall k . For eksempel er de 5 første leddene i en geometrisk rekke der første ledd er lik 3 og $k = 2$ slik:

$$3 + 6 + 12 + 24 + 48.$$

Generelt er de n første leddene i en geometrisk rekke der første ledd er a_0 slik:

$$a_0 + a_0 \cdot k + a_0 \cdot k^2 + a_0 \cdot k^3 + \cdots + a_0 \cdot k^{n-1}.$$

Vis ved hjelp av induksjon at summen av disse n leddene er

$$a_0 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1} \text{ for alle } n \in \mathbb{N}.$$

Oppgave 4.3.2

Vis at $n^3 - n$ er delelig med 3 for alle hele tall $n \geq 2$.

Oppgave 4.3.3

Du har n forskjellige punkter i et plan. Vis ved hjelp av induksjon at disse punktene kan forbindes med

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

forskjellige rette linjer.

Oppgave 4.4.1

Bruk sannhetsverditabell til å vise:

- a) $\bar{p} \vee (p \wedge q) \equiv \bar{p} \vee q$
- b) $\bar{p} \wedge (p \vee q) \equiv \bar{p} \wedge q$
- c) $p \vee (p \wedge q) \equiv p \wedge (p \vee q) \equiv p$

Oppgave 4.4.2

Vis ved hjelp av sannhetsverditabell at

$$p \sqcup q \equiv (p \vee q) \wedge \overline{(p \wedge q)}.$$

Oppgave 4.4.3

Vis ved hjelp av en sannhetsverditabell at

$$p \Rightarrow q \equiv \bar{q} \Rightarrow \bar{p}.$$

Oppgave 4.4.4

Sett opp sannhetsverditabellene for de logiske strukturene nedenfor.

Er noen av dem tautologier?

- a) $p \Rightarrow (p \wedge q)$
- b) $(p \wedge q) \Rightarrow p$
- c) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
- d) $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

Oppgave 4.4.5

Vi har disse utsagnene:

p : Sola skinner på Mallorca.

q : Per reiser til Mallorca.

r : Per blir solbrent.

- a) Skriv uttrykt ved p og q :
"Hvis sola skinner på Mallorca, så reiser Per til Mallorca".

- b) Hva er den kontrapositive formen til a)?
Formuler resultatet med ord.
- c) Hva blir negasjonen til strukturen i a)?
Bruk bl.a. resultatet i eksempel 4.1. og en av de Morgans lover til å vise at negasjonen til utsagnet i a) kan formuleres slik:
"Sola skinner på Mallorca, og Per reiser ikke til Mallorca."
- d) Uttrykk med ord: $(p \wedge q) \Rightarrow r$.
- e) Hva blir negasjonen til strukturen i d)? Formuler resultatet med ord.
Bruk bl.a. en av de Morgans lover til å vise at negasjonen til utsagnet i a) kan formuleres slik:
"Sola skinner på Mallorca, og Per reiser til Mallorca, og Per blir ikke solbrent."

Oppgave 4.4.6

Skriv de logiske strukturene nedenfor enklere ved hjelp av logisk algebra. Kontroller svarene ved å sette opp sannhetsverditabeller.

- a) $p \wedge (\bar{p} \vee (p \wedge q))$
- b) $\overline{(q \wedge (\overline{p \wedge q}))}$
- c) $\overline{((\overline{(p \vee q) \wedge r}) \vee \bar{q})}$

Oppgave 4.4.7

La m og n være to hele tall.:

- a) Bevis påstanden:
Både m og n er oddetall $\Rightarrow m + n$ er partall.
- b) Kan vi erstatte implikasjonspila i oppgave a) ovenfor med en ekvivalenspil?
- c) Bevis påstanden:
Både m og n er oddetall $\Leftrightarrow m \cdot n$ er et oddetall.

Oppgave 4.4.8

Vis at:

Dersom c er et oddetall, kan likningen

$$x^2 + x = c$$

kun ha partall som løsninger.

Oppgave 5.1.1

Utfør disse polynomdivisjonene.

- a) $(x^3 - 4x^2 + 3x - 6) : (x + 2)$
- b) $(3x^4 + x^2 - 2x - 1) : (x^2 + 3)$
- c) $(x^4 + 2x^3 + x - 6) : (2x^2 - x + 1)$

Oppgave 5.2.1

- a) Vis at $(x^3 - 4x^2 + x + 6)$ er delelig med $x - 2$, og forkort deretter brøken

$$\frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x^2 - 9}.$$

- b) Forkort brøken

$$\frac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{x^2 - 4x + 3}.$$

Oppgave 6.2.1

Delbrøkoppspalt disse brøkene:

a) $\frac{x + 5}{x^2 + x - 2}$

b) $\frac{x + 18}{x(x - 2)(x + 3)}$

c) $\frac{-2x^2 + 14}{(x + 1)(x - 2)(x - 3)}$

Oppgave 6.3.1

Delbrøkoppspalt disse brøkene:

a) $\frac{-x^2 + 4x + 3}{x^3 + x^2}$

b) $\frac{2x^2 + 9x + 7}{(x - 1)(x + 2)^2}$

c) $\frac{-x^2 + 9x - 2}{(x - 3)(x + 1)^2}$

Oppgave 6.4.1

Bruk "tildekkingsmetoden" til å delbrøkoppspalte de samme brøkene som i oppgave 2.1:

a) $\frac{x + 5}{x^2 + x - 2}$

b) $\frac{x + 18}{x(x - 2)(x + 3)}$

c) $\frac{-2x^2 + 14}{(x + 1)(x - 2)(x - 3)}$

Oppgave 6.5.1

Delbrøkoppspalt brøkene nedenfor:

a) $\frac{3x^2 - 4}{x^3 + 4x}.$

b) $\frac{2x^2 - x + 5}{(x^2 + 1)(x - 1)}.$

c) $\frac{3x^2 - 5x - 1}{(x - 2)(x^2 - 4x + 5)}.$

Oppgave 6.6.1

Finn koeffisienter A_1 , A_2 , B_1 og B_2 slik at brøken

$$\frac{-2x^2 + x + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

omformes til

$$\frac{A_1x + B_1}{x^2 + 1} + \frac{A_2x + B_2}{(x^2 + 1)^2}.$$

Oppgave 7.1.1

Skriv disse uttrykkene så enkelt som mulig:

a) $(3x)^2 \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^2$

b) $\frac{(x^2)^4 \cdot (x \cdot y^2)^2}{(x^3y)^3}$

c) $\frac{\left(2\frac{x}{y}\right)^2}{(2x^2)^3 \cdot y^3}$

Oppgave 7.2.1

Vis at:

a) $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$ b) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}$

Oppgave 7.2.2

Skriv disse uttrykkene så enkelt som mulig:

a) $\left(\frac{2x}{y^2}\right)^3 \cdot \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{(2y^{-2})^2}$

b) $\frac{(x^{-2}y)^{-3} \cdot \left(\frac{2x}{y^2}\right)^{-3}}{(xy^{-1})^3}$

c)
$$\frac{(2x^2y^{-3})^{-2} \cdot \left(\frac{x}{2y}\right)^2}{\left(\frac{(2y)^{-1}}{x^2}\right)^3}$$

Oppgave 7.3.1

Hva er:

- a) $\sqrt[3]{27}$
- b) $\sqrt[4]{16}$
- c) $\sqrt[3]{-125}$
- d) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$
- e) $\sqrt[5]{-243}$

Oppgave 7.3.2

Skriv disse rotuttrykkene så enkelt som mulig ved å sette mest mulig utenfor rottegnet:

- a) $\sqrt[3]{81}$
- b) $\sqrt{27x^5}$
- c) $\sqrt[4]{\frac{32x}{81}}$
- d) $\sqrt[3]{-32x^6}$

Oppgave 7.4.1

Skriv disse uttrykkene enklere:

- a) $\frac{\sqrt{2xy^3}}{x} \cdot \frac{\sqrt{y}}{(2x)^{-1}}$
- b) $\frac{(3x)^{-\frac{1}{2}}}{x^2y} \cdot \sqrt{6xy^{-2}}$
- c) $\sqrt{\frac{2x^3}{y}} \cdot (4x\sqrt{y})^{-1}$
- d) $\frac{\sqrt[3]{xy^{-1}}}{\sqrt{x^{-1}y^3}} \cdot \sqrt[6]{\frac{x}{y}}$
- e) $\sqrt{\frac{\sqrt[3]{x^2y}}{\left(\frac{y^{-1}}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}}} \cdot \sqrt[6]{\frac{x}{y}}$

Oppgave 7.5.1

Trekk sammen uttrykkene nedenfor:

- a) $(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1) - (\sqrt{x} - 2)\sqrt{x}$
- b) $(\sqrt{x} + 2\sqrt{y})^2 + (2\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$
- c) $2\sqrt{y}(x - \sqrt{y}) - \sqrt{x}(\sqrt{xy} - \sqrt{y}) + \sqrt{y}(2\sqrt{y} - x)$

Oppgave 7.5.2

Trekk sammen brøkene nedenfor:

- a) $\frac{\sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} + \frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$
- b) $\sqrt{2x} + \frac{(x - 2)\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{2}}$
- c) $\frac{(1 - \sqrt{x})^2}{1 + \sqrt{x}} - \frac{x + 1}{\sqrt{x}}$

Oppgave 7.5.3

Skriv disse uttrykkene så enkelt som mulig:

- a) $\sqrt{4x^2y - x^3}$
- b) $\frac{\sqrt{x^3 - 4xy^2}}{\sqrt{x^2 - 2xy}}$
- c) $\sqrt{\frac{1}{x} + 2 + x}$

Oppgave 7.5.4

Skriv disse uttrykkene så enkelt som mulig:

- a) $\sqrt{\frac{4x^3 - x}{2x + 1}}$
- b) $\frac{\sqrt{x^2y - 2x^3}}{\sqrt{y^2 - 4x^2}}$
- c) $\frac{x^2 + 2xy}{\sqrt{x^4 - 4x^2y^2}}$
- d) $\frac{x\sqrt{3x^2y + 6xy^2 + 3y^3}}{\sqrt{xy^3 - x^3y}}$

Oppgave 7.5.5

Skriv disse uttrykkene så enkelt som mulig:

a) $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

b) $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$

c) $\frac{x}{\sqrt{x^2-2x}} - \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x}$

Oppgave 8.1.1

Finn disse logaritmene ut fra definisjonen av logaritmer:

a) $\log_{10} 10$.

b) $\log_2 \left(\frac{1}{2}\right)$.

c) $\log_5 125$.

d) $\log_2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Oppgave 8.2.1

Vis at disse omformingene er riktige:

a) $\log_2 (8x^3) = 3(1 + \log_2 x)$.

b) $\log_{10} \sqrt{\frac{10}{x^3}} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \log_{10} x$.

c) $\ln(x^2 - 4) - \ln(x + 2) = \ln(x - 2)$.

d) $\ln(3\sqrt{e}) = \ln 3 + \frac{1}{2}$.

Oppgave 8.3.1

Vis at

$$\log_a u = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln u.$$

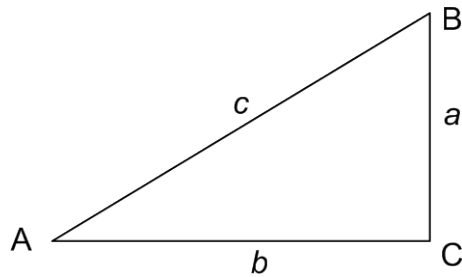
Oppgave 8.3.2

I denne oppgaven forutsetter jeg at du har en kalkulator som kan beregne naturlige logaritmer.

a) Finn $\log_{10} 861$.

b) Finn $\log_{16} 2.44$, og benytt resultatet til å beregne $\log_2 2.44$.

Oppgave 9.1.1

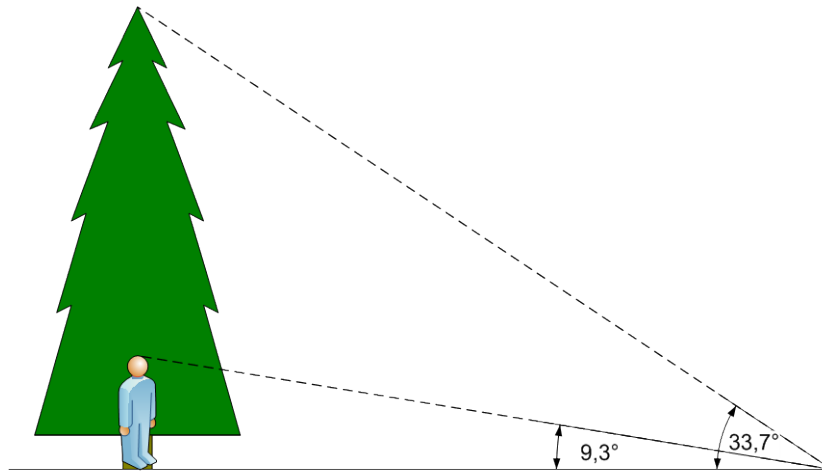


Vi har den rettvinklede trekanten ABC til venstre, der C er den rette vinkelen.

- a) I trekanten ABC er siden $c = 0.14\text{m}$ og $\angle A = 38.6^\circ$. Finn de andre sidene og vinkel $\angle B$.
- b) I trekanten ABC er siden $b = 0.84\text{m}$ og $\angle B = 53.1^\circ$. Finn de andre sidene og vinkel $\angle A$.
- c) I trekanten ABC er siden $a = 0.84\text{m}$ og $\angle B = 28.4^\circ$. Finn de andre sidene og vinkel $\angle A$.

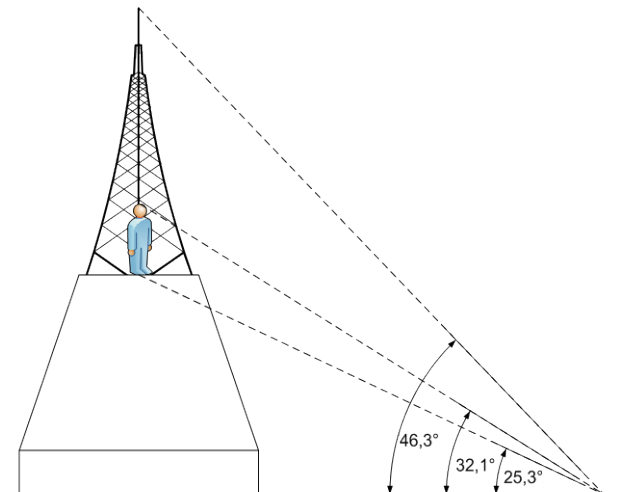
Oppgave 9.1.2

a)



Du har funnet et fint tre, og vil gjerne vite hvor høyt det er. Du plasserer derfor din venn Petter (som er 1.84 m høy) ved siden av treet, og finner at vinkelen mellom bakken og siktelinja til toppen av Petters hode er 9.3° . Den tilsvarende vinkelen til treetopp er 33.7° . Vi antar at bakken horisontal. Hvor høyt er treet?

b)



Nå klatrer Petter opp i et tårn som vist på figuren. Du måler de tre vinklene som er vist på figuren. Vi antar fremdeles at bakken er horisontal. Hvor høyt er tårnet?

Oppgave 9.2.1

I denne oppgaven skal vi forutsette at $\angle A$ ligger mellom 0° og 90° .

- a) Finn $\sin A$ og $\tan A$ når du vet at $\cos A = 0.6$ uten å finne $\angle A$ først.
- b) Finn $\sin A$ og $\cos A$ når du vet at $\tan A = 2$ uten å finne $\angle A$ først.
- c) Finn $\cos A$ og $\tan A$ når du vet at $\sin A = \frac{1}{4}\sqrt{7}$ uten å finne $\angle A$ først.

Oppgave 9.5.1

Bestem:

- a) $\arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$
- b) $\arccos(0)$
- c) $\arctan(0)$
- d) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$
- e) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$
- f) $\arctan(-\sqrt{3})$

Oppgave 9.6.1

I oppgavene nedenfor er a , b og c motstående sider til hjørnene A, B og C.

- a) I trekanten ABC er $\angle A = 50.2^\circ$, $\angle B = 71.6^\circ$, og siden $c = 7.00$. Finn de ukjente sidene i trekanten.
- b) I trekanten ABC er $\angle A = 50.8^\circ$, siden $a = 5.58$, og siden $c = 7.00$. Finn siden b og de ukjente vinklene i trekanten.

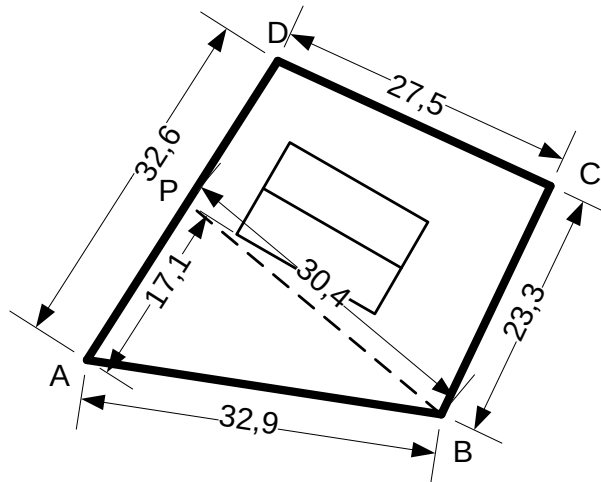
Oppgave 9.6.2

I disse oppgavene a , b og c motstående sider til hjørnene A, B og C i trekanten ABC.

- a) I trekanten ABC er siden $a = 5.00$, $c = 6.00$ og $\angle B = 126.9^\circ$. Bestem siden b og de ukjente vinklene.
- b) I trekanten ABC er siden $a = 5.62$, $b = 3.80$ og $c = 7.00$. Bestem vinklene i trekanten.

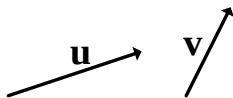
Oppgave 9.6.3

- a) I en firkant ABCD er sidene $AB = 63.0$, $BC = 60.8$, $CD = 51.0$ og $AD = 36.1$. Dessuten er diagonalen $BD = 64.0$. Finn arealet av trekanten.
- b) Figuren nedenfor viser målene til ei tomt. På grunn av huset som står på tomten, er det ikke mulig å måle diagonalene. Du merker derfor av punktet P, og måler avstandene AP og BP. Bruk de oppgitte målene til å finne arealet av tomten.



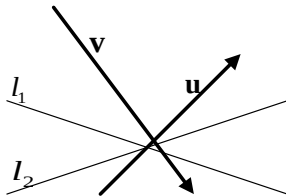
Oppgave 10.3.1

Nedenfor til venstre finner du to vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$. Konstruer disse vektorene:



- $2\mathbf{u} + \mathbf{v}$
- $\mathbf{v} - \mathbf{u}$

Oppgave 10.4.1



Til venstre finner du to retninger gitt ved linjene l_1 og l_2 , samt to vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$. Dekomponer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ langs l_1 og l_2 .

Oppgave 10.5.1

Vi har gitt to vektorer $\mathbf{u} = -\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}$ og $\mathbf{v} = -3\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}$.

- Regn ut $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$.
- Tegn inn $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i et koordinatsystem, og bruk figuren til å kontrollere resultatet fra a).

Oppgave 10.5.2

Finn koordinatene til $\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$ når $\mathbf{u}$ har lengde 2 og danner en vinkel $\theta_1 = 30^\circ$ med positiv x -akse, mens $\mathbf{v}$ har lengde 3 og danner en vinkel $\theta_2 = 240^\circ$ med positiv x -akse.

Oppgave 10.6.1

Finn $|\mathbf{u}|$, $|\mathbf{v}|$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ og vinkelen mellom $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ når:

- $\mathbf{u} = [2, 3]$, $\mathbf{v} = [-1, -1]$
- $\mathbf{u} = [-1, 1, 3]$, $\mathbf{v} = [-3, 2, 1]$.

Oppgave 10.6.2

Bestem a slik at disse vektorene står vinkelrett på hverandre:

- a) $[2, 1]$ og $[-1, a]$.
- b) $[a, 1]$ og $[-1, 2a^2]$.
- c) $[a, -a, 1]$ og $[2a, 1, -1]$.

Oppgave 10.6.3

- a) Finn en vektor i xy -planet med lengde 5 som står vinkelrett på vektoren $[2, 1]$.
- b) Finn en vektor xy -planet med lengde 4 som står vinkelrett på vektoren $[1, -1]$.

Oppgave 10.7.1

Finn $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ når:

- a) $\mathbf{v}_1 = \hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}$ og $\mathbf{v}_2 = \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}$.
- b) $\mathbf{v}_1 = 3\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}}$ og $\mathbf{v}_2 = \hat{\mathbf{k}}$.

Illustrer løsningene med en figur.

Oppgave 10.7.2

Finn en enhetsvektor som står vinkelrett på både $\vec{u}$ og $\vec{v}$ når:

- a) $\mathbf{u} = [1, -2, 0]$ og $\mathbf{v} = [3, 1, -1]$.
- b) $\mathbf{u} = [0, 2, 1]$ og $\mathbf{v} = [-1, 3, 2]$.
- c) $\mathbf{u} = [1, 2, -1]$ og $\mathbf{v} = [0, 2, 3]$.

12.2. Løsninger på småoppgaver.

Oppgave 1.1.1

a)

$$\begin{aligned}(a - 2b)(2a - (a - b)) &= (a - 2b)(2a - a + b) \\ &= (a - 2b)(a + b) \\ &= a(a + b) - 2b(a + b) \\ &= a^2 + ab - 2ab - 2b^2 \\ &= \underline{\underline{a^2 - ab - 2b^2}}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 3a - (a - b)(2a + b) - (b^2 + ab) &= 3a - (a(2a + b) - b(2a + b)) - b^2 - ab \\ &= 3a - \left(2a^2 + \underbrace{ab - 2ab}_{=-ab} - b^2 \right) - b^2 - ab \\ &= 3a - 2a^2 + ab + b^2 - b^2 - ab \\ &= \underline{\underline{3a - 2a^2}} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} (2x - 3y)(3 - 2(x + 2y)) - (x - y)^2 &= (2x - 3y)(3 - 2x - 4y) - (x^2 - 2xy + y^2) \\ &= 2x(3 - 2x - 4y) - 3y(3 - 2x - 4y) - x^2 + 2xy - y^2 \\ &= 6x - 4x^2 - 8xy - 9y + 6xy + 12y^2 - x^2 + 2xy - y^2 \\ &= \underline{\underline{-5x^2 + 6x + 11y^2 - 9y}} \end{aligned}$$

Oppgave 1.2.1

Setter inn $a = -2$ og $b = -\frac{1}{2}$, og får:

a) $3 - a^2 + 4b - 1 = 3 - (-2)^2 + 4(-\frac{1}{2}) - 1 = 3 - 4 - 2 - 1 = \underline{\underline{-4}}.$

b)
$$\begin{aligned} a - 2^3 - (2a^2 + 4)b - 1 &= (-2) - 2^3 - (2(-2)^2 + 4)(-\frac{1}{2}) - 1 \\ &= -2 - 8 - (2 \cdot 4 + 4)(-\frac{1}{2}) - 1 \\ &= -10 - 12(-\frac{1}{2}) - 1 = -10 + 6 - 1 = \underline{\underline{-5}} \end{aligned}$$

Oppgave 1.3.1

a) $(2x - 3y)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = \underline{\underline{4x^2 - 12xy + 9y^2}}.$

b) $(x - 4y)(4y + x) = (x - 4y)(x + 4y) = x^2 - (4y)^2 = \underline{\underline{x^2 - 16y^2}}$

c)
$$\begin{aligned} (x + y + z)^2 &= ((x + y) + z)^2 = (x + y)^2 + 2(x + y)z + z^2 \\ &= x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2 \\ &= \underline{\underline{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz}} \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} (a + b)^2 - (a - b)^2 &= (a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2) \\ &= a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 = \underline{\underline{4ab}} \end{aligned}$$

Eller: Vi kan også oppfatte oppgaven som en differens mellom to ledd, og bruke 3. kvadratsetning:

$$\begin{aligned} (a + b)^2 - (a - b)^2 &= ((a + b) - (a - b))((a + b) + (a - b)) \\ &= (2b)(2a) = \underline{\underline{4ab}} \end{aligned}$$

Oppgave 1.4.1

- a) $x^3y - 2x^2y^2 = \underline{\underline{x^2y(x - 2y)}}.$
- b) $2a^2b + 4ab^2 + 2b^3 = 2b(a^2 + 2ab + b^2) = \underline{\underline{2b(a + b)^2}}.$
- c) $9x^3y - 16xy^3 = xy(9x^2 - 16y^2) = xy((3x)^2 - (4y)^2) = \underline{\underline{xy(3x + 4y)(3x - 4y)}}.$
- d) $x^4 - 16 = (x^2)^2 - 4^2 = (x^2 + 4)(x^2 - 4) = (x^2 + 4)(x^2 - 2^2) = \underline{\underline{(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)}}$

Oppgave 1.4.2

- a) $2ab - a - 8b + 4 = (2ab - a) - (8b - 4) = a(2b - 1) - 4(2b - 1) = \underline{\underline{(2b - 1)(a - 4)}}$
- b) $x^3 - 4x^2 + x - 4 = (x^3 - 4x^2) + (x - 4) = x^2(x - 4) + (x - 4) = \underline{\underline{(x - 4)(x^2 + 1)}}.$
- c) $x^3 - 4x^2 - x + 4 = (x^3 - 4x^2) - (x - 4) = x^2(x - 4) - (x - 4)$
 $= (x - 4)(x^2 - 1) = \underline{\underline{(x - 4)(x + 1)(x - 1)}}$
- d) $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = (x^3 + 2x^2) - (4x + 8) = x^2(x + 2) - 4(x + 2)$
 $= (x + 2)(x^2 - 4) = (x + 2)((x + 2)(x - 2))$
 $= \underline{\underline{(x + 2)^2(x - 2)}}$

Oppgave 2.1.1

- a) $\frac{x^2 - 4}{2x + 4} = \frac{\cancel{(x + 2)}(x - 2)}{2\cancel{(x + 2)}} = \underline{\underline{\frac{x - 2}{2}}}.$
- b) $\frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{x^2 - 3x} = \frac{x(x^2 - 6x + 9)}{x(x - 3)} = \frac{\cancel{x}(x - 3)^2}{\cancel{x}(x - 3)} = \underline{\underline{x - 3}}.$

Oppgave 2.2.1

- a) Bruker $(a + b)(a - b)$ som fellesnevner.

$$\begin{aligned} 2 - \frac{a - 2b}{a + b} + \frac{a}{a - b} &= 2 \cdot \frac{(a + b)(a - b)}{(a + b)(a - b)} - \frac{a - 2b}{a + b} \cdot \frac{a - b}{a - b} + \frac{a}{a - b} \cdot \frac{a + b}{a + b} \\ &= \frac{2(a^2 - b^2) - (a - 2b)(a - b) + a(a + b)}{(a + b)(a - b)} \\ &= \frac{2a^2 - 2b^2 - (a^2 - ab - 2ab + 2b^2) + a^2 + ab}{(a + b)(a - b)} \\ &= \underline{\underline{\frac{2a^2 + 4ab - 4b^2}{(a + b)(a - b)}}} \end{aligned}$$

b) Ser at

$$x^2 - x = x(x-1)$$

som også blir fellesnevner. Da blir

$$\begin{aligned} \frac{2}{x} - 3 + \frac{2x+1}{x-1} - \frac{x-3}{x^2-x} &= \frac{2}{x} \cdot \frac{x-1}{x-1} - 3 \cdot \frac{x^2-x}{x^2-x} + \frac{2x+1}{x-1} \cdot \frac{x}{x} - \frac{x-3}{x^2-x} \\ &= \frac{2(x-1) - 3(x^2-x) + (2x+1)x - (x-3)}{x^2-x} \\ &= \frac{2x-2-3x^2+3x+2x^2+x-x+3}{x^2-x} \\ &= \frac{-x^2+5x+1}{x^2-x} \end{aligned}$$

c) Faktoriserer:

$$2x-4 = 2(x-2)$$

$$x^2 - 2x = x(x-2)$$

Fellesnevner:

$$2x(x-2).$$

Da blir

$$\begin{aligned} \frac{x}{x-2} - \frac{3}{2x-4} + \frac{x-1}{x^2-2x} &= \frac{x}{x-2} \cdot \frac{2x}{2x} - \frac{3}{2(x-2)} \cdot \frac{x}{x} + \frac{x-1}{x(x-2)} \cdot \frac{2}{2} \\ &= \frac{2x^2-3x+2x-2}{2x(x-2)} = \frac{2x^2-x-2}{2x(x-2)} \end{aligned}$$

d) Ser at

$$x^2 + xy = x(x+y)$$

som også blir fellesnevner. Da blir

$$\begin{aligned} \frac{3x-y}{x+y} - 2 - \frac{1}{x} + \frac{x-y}{x^2+xy} &= \frac{3x-y}{x+y} \cdot \frac{x}{x} - 2 \cdot \frac{x^2+xy}{x^2+xy} - \frac{1}{x} \cdot \frac{x+y}{x+y} + \frac{x-y}{x^2+xy} \\ &= \frac{3x^2-xy-2x^2-2xy-x-y+x-y}{x^2+xy} \\ &= \frac{x^2-3xy-2y}{x^2+xy} \end{aligned}$$

Oppgave 2.3.1

$$a) \frac{x - \frac{1}{x}}{1-x} = \frac{(x - \frac{1}{x}) \cdot x}{(1-x) \cdot x} = \frac{x^2 - 1}{x - x^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{-x(x-1)} = \frac{-x-1}{x}$$

$$b) \frac{2 - \frac{3}{x+1}}{2x-1} = \frac{\left(2 - \frac{3}{x+1}\right)(x+1)}{(2x-1)(x+1)} = \frac{2(x+1) - \frac{3}{x+1}(x+1)}{(2x-1)(x+1)} = \frac{2x+2-3}{2x^2+2x-x-1} = \frac{2x-1}{2x^2+x-1}$$

som kan forkortes videre til

$$\frac{1}{x+1},$$

fordi $2x^2 + x - 1 = (2x - 1)(x + 1)$.

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{\frac{x-4}{2x} + \frac{1}{x-1}}{\frac{x}{x-1}} &= \frac{\left(\frac{x-4}{2x} + \frac{1}{x-1}\right) \cdot 2x(x-1)}{\left(\frac{x}{x-1}\right) 2x(x-1)} = \frac{\frac{x-4}{\cancel{2x}} \cdot \cancel{2x}(x-1) + \frac{1}{\cancel{x-1}} \cdot 2x(\cancel{x-1})}{2x^2} \\ &= \frac{(x-4)(x-1) + 2x}{2x^2} = \frac{x^2 - x - 4x + 4 + 2x}{2x^2} = \frac{x^2 - 3x + 4}{2x^2} \end{aligned}$$

Oppgave 2.3.2

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\frac{2x}{x-2} - \frac{3}{x+1}}{\frac{x}{x-1}} &= \frac{\frac{2x}{\cancel{x-2}} \cdot \frac{\cancel{x-2}}{x-2} - \frac{3}{x+1} \cdot \frac{x}{\cancel{x}}}{\frac{x}{x-1}} = \frac{2x}{(x+1)(x-2)} - \frac{3x}{x+1} \cdot \frac{x-2}{x-2} \\ &= \frac{2x - 3x(x-2)}{(x+1)(x-2)} = \frac{2x - 3x^2 + 6x}{x^2 - 2x + x - 2} = \frac{-3x^2 + 8x}{x^2 - x - 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{1 - \frac{2}{x+1}}{\frac{x}{x-1}} + \frac{2x}{x+1} &= \frac{1 \cdot \frac{x+1}{x+1} - \frac{2}{x+1}}{\frac{x}{x-1}} + \frac{2x}{x+1} = \frac{\frac{x+1-2}{x+1}}{\frac{x}{x-1}} + \frac{2x}{x+1} \\ &= \frac{\frac{x-1}{\cancel{x+1}} \cdot \frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{(x+1)(\cancel{x-1})} + \frac{2x}{x+1} \cdot \frac{2}{2}}{\frac{x}{x-1}} = \frac{(x-1)(x-1)}{x(x+1)} + \frac{4x}{x+1} \cdot \frac{x}{x} \\ &= \frac{x^2 - 2x + 1 + 4x^2}{x(x+1)} = \frac{5x^2 - 2x + 1}{x(x+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x}}{\frac{1}{x} + 1} - \frac{2 - \frac{1}{x+1}}{\frac{x+1}{2}} &= \frac{\frac{1}{x+1} \cdot \frac{x}{x} - \frac{2}{x} \cdot \frac{x+1}{x+1}}{\frac{1}{x} + 1 \cdot \frac{x}{x}} - \frac{2 \cdot \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1}}{\frac{x+1}{2}} \\
 &= \frac{\frac{x-2(x+1)}{x(x+1)}}{\frac{1+x}{x}} - \frac{\frac{2(x+1)-1}{x+1}}{\frac{x+1}{2}} = \frac{\frac{x-2x-2}{x(x+1)}}{\frac{1+x}{x}} - \frac{\frac{2x+2-1}{x+1}}{\frac{x+1}{2}} \\
 &= \frac{\frac{-x-2}{x(x+1)}}{\frac{1+x}{x}} - \frac{\frac{2x+1}{x+1}}{\frac{x+1}{2}} = \frac{-x-2}{(1+x)(x+1)} - \frac{(2x+1) \cdot 2}{(x+1)(x+1)} = \frac{-x-2-4x-2}{x^2+2x+1} \\
 &= \frac{-5x-4}{x^2+2x+1}
 \end{aligned}$$

Oppgave 3.1.1

$$\begin{aligned}
 \text{a) } 2ax - 6a + x &= (a+2)x \Leftrightarrow 2ax - 6a + x = ax + 2x \\
 &\Leftrightarrow 2ax + x - ax - 2x = 6a \Leftrightarrow ax - x = 6a \\
 &\Leftrightarrow (a-1)x = 6a \Leftrightarrow x = \frac{6a}{a-1} \\
 \text{b) } 3(x-2) + \frac{x}{2} &= \frac{x-1}{2} \Leftrightarrow 3x - 6 + \frac{x}{2} = \frac{x-1}{2} \Leftrightarrow 6x - 12 + x = x - 1 \\
 &\Leftrightarrow 6x + x - x = 12 - 1 \Leftrightarrow 6x = 11 \Leftrightarrow x = \frac{11}{6} \\
 \text{c) } \frac{x-2a}{3} - \frac{a+2x}{6} &= \frac{3(x-1)}{2} \Leftrightarrow \frac{x-2a}{\cancel{3}} \cdot \cancel{2} - \frac{a+2x}{\cancel{6}} \cdot \cancel{3} = \frac{3(x-1)}{\cancel{2}} \cdot \cancel{3} \\
 &\Leftrightarrow (x-2a) \cdot 2 - (a+2x) = 3(x-1) \cdot 3 \\
 &\Leftrightarrow 2x - 4a - a - 2x = 9x - 9 \\
 &\Leftrightarrow 2x - 2x - 9x = 4a + a - 9 \\
 &\Leftrightarrow -9x = 5a - 9 \Leftrightarrow x = \frac{-5a+9}{9} = \frac{-5}{9}a + 1
 \end{aligned}$$

Oppgave 3.1.2

$$\begin{aligned}
 \text{a) } 2 - \frac{1-x}{x+2} &= 4 \Leftrightarrow 2(x+2) - \frac{1-x}{x+2} (x+2) = 4(x+2) \\
 &\Leftrightarrow 2x + 4 - 1 + x = 4x + 8 \Leftrightarrow 2x + x - 4x = -4 + 1 + 8 \\
 &\Leftrightarrow -x = 5 \Leftrightarrow x = \underline{\underline{-5}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad & \frac{a+2x}{a+3} - \frac{2x+1}{a-1} = 2x+1 \\
 \Leftrightarrow & \frac{a+2x}{\cancel{a+3}} (\cancel{a+3})(a-1) - \frac{2x+1}{\cancel{a-1}} (a+3)(\cancel{a-1}) = (2x+1)(a+3)(a-1) \\
 \Leftrightarrow & (a^2 - a + 2ax - 2x) - (2ax + 6x + a + 3) = (2x+1) \left(a^2 - \underbrace{a+3a}_{=2a} - 3 \right) \\
 \Leftrightarrow & a^2 - a + 2ax - 2x - 2ax - 6x - a - 3 = 2a^2x + 4ax - 6x + a^2 + 2a - 3 \\
 \Leftrightarrow & 2ax - 2x - 2ax - 6x - 2a^2x - 4ax + 6x = -a^2 + a + a + 3 + a^2 + 2a - 3 \\
 \Leftrightarrow & (-2a^2 - 4a - 2)x = 4a \\
 \Leftrightarrow & x = \frac{4a}{-2a^2 - 4a - 2} = \frac{4a}{-2(a^2 + 2a + 1)} = \underline{\underline{\frac{-2a}{(a+1)^2}}}
 \end{aligned}$$

Oppgave 3.1.3

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & m_A u_A = m_A v_A + m_B v_B \Leftrightarrow m_A u_A - m_A v_A = m_B v_B \\
 & \Leftrightarrow m_A (u_A - v_A) = m_B v_B \Leftrightarrow m_A = \frac{m_B v_B}{\underline{\underline{u_A - v_A}}} \\
 \text{b)} \quad & R = R_0 (1 + \alpha(T - T_0)) \Leftrightarrow \frac{R}{R_0} = 1 + \alpha(T - T_0) \Leftrightarrow \alpha(T - T_0) = \frac{R}{R_0} - 1 \\
 & \Leftrightarrow T - T_0 = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{R}{R_0} - 1 \right) \Leftrightarrow T = T_0 + \underline{\underline{\frac{1}{\alpha} \left(\frac{R}{R_0} - 1 \right)}}
 \end{aligned}$$

Oppgave 3.2.1

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & 2x^2 + 4 = 6x \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 4 = 0 \\
 & x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{2 \cdot 2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{4} = \frac{6 \pm 2}{4} = \begin{cases} \frac{6+2}{4} = \underline{\underline{2}} \\ \frac{6-2}{4} = \underline{\underline{1}} \end{cases} \\
 \text{b)} \quad & x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x(x+2)(x-2) = 0. \\
 & \text{Tre løsninger: } x = \underline{\underline{0}}, x+2=0 \Leftrightarrow x = \underline{\underline{-2}}, x-2=0 \Leftrightarrow x = \underline{\underline{2}}. \\
 \text{c)} \quad & x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 5x^2 + 4 = 0 \\
 & x^2 = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{5+3}{2} = 4 \\ \frac{5-3}{2} = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Men når $x^2 = 4$, er $x = \underline{\underline{\pm 2}}$.

Og når $x^2 = 1$, er $x = \underline{\underline{\pm 1}}$.

Likningen har altså 4 løsninger.

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0 &\Leftrightarrow (x^3 + 3x^2) - (x + 3) = 0 \Leftrightarrow x^2(x + 3) - (x + 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + 3)(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x + 1)(x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 = 0 &\Leftrightarrow x = \underline{\underline{-3}} \\ x + 1 = 0 &\Leftrightarrow x = \underline{\underline{-1}} \\ x - 1 = 0 &\Leftrightarrow x = \underline{\underline{1}} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{e)} \quad x^2 - x - a^2 - a = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-a^2 - a)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4a^2 + 4a}}{2}.$$

For å komme videre, må vi se at under rottegnet står det

$$4a^2 + 4a + 1 = (2a)^2 + 2(2a) + 1^2 = (2a + 1)^2$$

der vi har brukt 1. kvadratsetning. Da blir

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4a^2 + 4a}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{(2a + 1)^2}}{2} = \frac{1 \pm (2a + 1)}{2} = \begin{cases} \frac{1 + (2a + 1)}{2} = \frac{2a + 2}{2} = \underline{\underline{a + 1}} \\ \frac{1 - (2a + 1)}{2} = \frac{-2a}{2} = \underline{\underline{-a}} \end{cases}$$

Oppgave 3.3.1

$$\text{a)} \quad \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 3x + 2}.$$

Faktoriserer telleren:

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-3)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{-2 + 4}{2} = 1 \\ \frac{-2 - 4}{2} = -3 \end{cases}$$

Da er

$$x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x - (-3)) = (x - 1)(x + 3).$$

Faktoriserer nevneren:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3 + 1}{2} = 2 \\ \frac{3 - 1}{2} = 1 \end{cases}$$

Da er

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1).$$

Dermed har vi at

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 3x + 2} = \frac{\cancel{(x - 1)}(x + 3)}{(x - 2)\cancel{(x - 1)}} = \frac{x + 3}{x - 2}.$$

$$\text{b)} \quad \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1}$$

Faktoriserer telleren:

$$2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} \frac{3+1}{4} = 1 \\ \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Da er

$$2x^2 - 3x + 1 = 2(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x-1)(2x-1).$$

Faktoriserer nevneren med 3. kvadratsetning:

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1).$$

Dermed har vi at

$$\frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1} = \frac{\cancel{(x-1)}(2x-1)}{(x+1)\cancel{(x-1)}} = \frac{2x-1}{x+1}.$$

c)
$$\frac{x^2 - ax - 2a^2}{x^2 - 3ax + 2a^2}$$

Faktoriserer telleren:

$$x^2 - ax - 2a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(-a) \pm \sqrt{(-a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2a^2)}}{2 \cdot 1} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 8a^2}}{2} = \frac{a \pm 3a}{2} = \begin{cases} \frac{a+3a}{2} = 2a \\ \frac{a-3a}{2} = -a \end{cases}$$

Da er

$$x^2 - ax - 2a^2 = (x-2a)(x-(-a)) = (x-2a)(x+a).$$

Faktoriserer nevneren:

$$x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(-3a) \pm \sqrt{(-3a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2a^2}}{2 \cdot 1} = \frac{3a \pm \sqrt{9a^2 - 8a^2}}{2} = \frac{3a \pm a}{2} = \begin{cases} \frac{3a+a}{2} = 2a \\ \frac{3a-a}{2} = a \end{cases}$$

Da er

$$x^2 - 3ax + 2a^2 = (x-2a)(x-a).$$

Dermed har vi at

$$\frac{x^2 - ax - 2a^2}{x^2 - 3ax + 2a^2} = \frac{\cancel{(x-2a)}(x+a)}{\cancel{(x-2a)}(x-a)} = \frac{x+a}{x-a}.$$

d)
$$\frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^2 + x - 2}$$

Faktoriserer telleren:

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - 4x + 4 &= (x^3 - x^2) - (4x - 4) = x^2(x-1) - 4(x-1) = (x-1)(x^2 - 4) \\ &= (x-1)(x+2)(x-2) \end{aligned}$$

Faktoriserer nevneren:

$$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 \\ \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

Da er

$$x^2 + x - 2 = (x-1)(x-(-2)) = (x-1)(x+2).$$

Dermed har vi at

$$\frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^2 + x - 2} = \frac{\cancel{(x-1)} \cancel{(x+2)} (x-2)}{\cancel{(x-1)} \cancel{(x+2)}} = \underline{\underline{x-2}}.$$

Oppgave 3.4.1

a) $x - 4y = 11$

$3x + 2y = 5$

Innsettingsmetoden: Løser ut x av den første likningen:

$x - 4y = 11 \Leftrightarrow x = 4y + 11.$

Setter inn i den andre:

$3x + 2y = 5 \Leftrightarrow 3(4y + 11) + 2y = 5 \Leftrightarrow 12y + 33 + 2y = 5$

$\Leftrightarrow 14y = -28 \Leftrightarrow y = \underline{\underline{-2}}$

Da er

$x = 4y + 11 = 4(-2) + 11 = -8 + 11 = \underline{\underline{3}}.$

Løsningen er da tallparet

$(x, y) = (\underline{\underline{3}}, \underline{\underline{-2}}).$

Addisjonsmetoden: Multipliserer andre likning med 2 og legger sammen likningene:

$$\begin{array}{rcl} x - 4y = 11 & & x - 4y = 11 \\ (3x + 2y) \cdot 2 = 5 \cdot 2 & \Leftrightarrow & 6x + 4y = 10 \end{array}$$

Får etter addisjon likningen

$7x = 21 \Leftrightarrow x = \underline{\underline{3}}.$

Setter inn i den øverste likningen:

$x - 4y = 11 \Leftrightarrow 3 - 4y = 11 \Leftrightarrow -4y = 8 \Leftrightarrow y = \underline{\underline{-2}}.$

Dette er samme løsning som før.

b) $2x + 5y = 1$

$5x - 3y = -13$

Innsettingsmetoden: Løser ut x av den første likningen:

$2x + 5y = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}y + \frac{1}{2}.$

Setter inn i den andre:

$5x - 3y = -13 \Leftrightarrow 5\left(-\frac{5}{2}y + \frac{1}{2}\right) - 3y = -13 \Leftrightarrow -\frac{25}{2}y + \frac{5}{2} - 3y = -13$

$\Leftrightarrow -\frac{31}{2}y = -\frac{31}{2} \Leftrightarrow y = \underline{\underline{1}}$

Da er

$x = -\frac{5}{2}y + \frac{1}{2} = -\frac{5}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} = \underline{\underline{-2}}.$

Løsningen er da tallparet

$(x, y) = (\underline{\underline{-2}}, \underline{\underline{1}}).$

Addisjonsmetoden: Multipliserer første likning med 3 og andre likning med 5, og legger sammen likningene:

$$\begin{array}{rcl} (2x + 5y) \cdot 3 = 1 \cdot 3 & & 6x + 15y = 3 \\ (5x - 3y) \cdot 5 = -13 \cdot 5 & \Leftrightarrow & 25x - 15y = -65 \end{array}$$

Får etter addisjon likningen

$$31x = -62 \Leftrightarrow x = \underline{-2}.$$

Setter inn i den øverste likningen:

$$6x + 15y = 3 \Leftrightarrow 6 \cdot (-2) + 15y = 3 \Leftrightarrow -12 + 15y = 3 \Leftrightarrow 15y = 15 \Leftrightarrow y = \underline{1}.$$

Dette er samme løsning som før.

Oppgave 3.5.1

a) $x - y^2 = 0$

$$2x + y = 1$$

Av den første likningen får vi

$$x = y^2.$$

Dette setter vi inn i den andre likningen:

$$2 \cdot y^2 + y = 1 \Leftrightarrow 2y^2 + y - 1 = 0$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \begin{cases} \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \\ \frac{-1-3}{4} = -1 \Leftrightarrow x = y^2 = (-1)^2 = 1 \end{cases}$$

Løsningene blir derfor

$$(x, y) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \text{ og } (x, y) = \underline{(1, -1)}.$$

b) $4xy + y^2 = 0$

$$9x^2 + y^2 = 25$$

Starter med å faktorisere den første likningen:

$$4xy + y^2 = 0 \Leftrightarrow y(4x + y) = 0$$

som har løsningene

$$y = 0 \text{ eller } 4x + y = 0 \Leftrightarrow y = -4x.$$

Setter disse mulighetene inn i den andre likningen:

Dersom $y = 0$, får vi

$$9x^2 + 0^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 = \frac{25}{9} \Leftrightarrow x = \pm \frac{5}{3}.$$

Dersom $y = -4x$, får vi

$$9x^2 + (-4x)^2 = 25 \Leftrightarrow 9x^2 + 16x^2 = 25 \Leftrightarrow 25x^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Deretter blir

$$y = -4x = -4 \cdot (\pm 1) = \mp 4 \text{ (pass på fortegnene!)}$$

Vi får 4 løsninger:

$$(x, y) = \left(\frac{5}{3}, 0\right), (x, y) = \left(-\frac{5}{3}, 0\right), (x, y) = \underline{(1, -4)}, \text{ og } (x, y) = \underline{(-1, 4)}.$$

Oppgave 3.6.1

a) $(2x - 1) - (x + 3) < 3(x + 2) \Leftrightarrow 2x - 1 - x - 3 < 3x + 6$

$$\Leftrightarrow 2x - x - 3x < 1 + 3 + 6 \Leftrightarrow -2x < 10 \Leftrightarrow \underline{\underline{x > -5}}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \frac{x-1}{2} - \frac{2x+3}{3} &> 2\left(x + \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \frac{x-1}{2} \cdot 6 - \frac{2x+3}{3} \cdot 6 > 2\left(x + \frac{1}{3}\right) \cdot 6 \\ &\Leftrightarrow 3(x-1) - 2(2x+3) > 12x+4 \Leftrightarrow 3x-3-4x-6 > 12x+4 \\ &\Leftrightarrow 3x-4x-12x > 3+6+4 \Leftrightarrow -13x > 13 \Leftrightarrow \underline{\underline{x < -1}} \end{aligned}$$

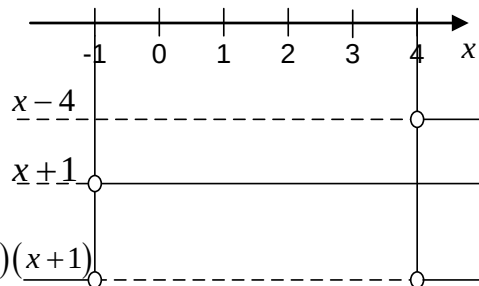
Oppgave 3.6.2

$$\text{a)} \quad x^2 - 4 > 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 > 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \begin{cases} \frac{3+5}{2} = 4 \\ \frac{3-5}{2} = -1 \end{cases}$$

$$(x-4)(x+1) > 0.$$

Av fortegnsskjemaet til høyre ser vi løsningen: $x < -1$ eller $x > 4$.



$$\text{b)} \quad x^3 - 4x < x^2 - 4 \Leftrightarrow x^3 - 4x - (x^2 - 4) < 0$$

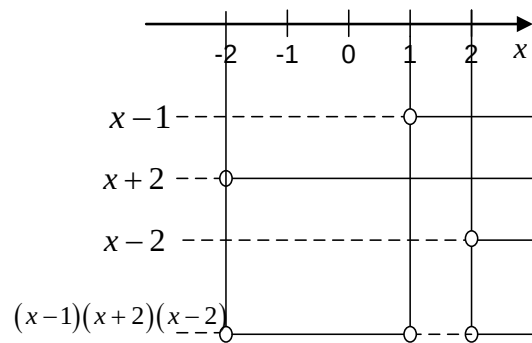
$$\Leftrightarrow x(x^2 - 4) - (x^2 - 4) < 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 4) < 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+2)(x-2) < 0$$

Av fortegnsskjemaet til høyre ser vi at løsningen blir:

$$\underline{\underline{x < -2}} \text{ eller } \underline{\underline{1 < x < 2}}.$$



$$\text{c)} \quad \frac{2}{x-1} - 1 < \frac{2}{x}.$$

Samler alt på venstre side av ulikhetstegnet, og setter alt på en brøkstrek.

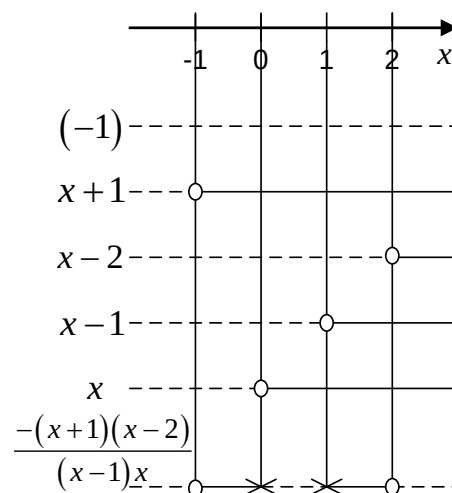
$$\frac{2 \cdot x - 1 \cdot x(x-1) - 2 \cdot (x-1)}{(x-1)x} < 0$$

$$\frac{2x - x^2 + x - 2x + 2}{(x-1)x} < 0$$

$$\frac{-x^2 + x + 2}{(x-1)x} < 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 8}}{-2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{-2} = -1 \\ \frac{-1-3}{-2} = 2 \end{cases}$$

$$\frac{-(x+1)(x-2)}{(x-1)x} < 0$$



Fortegnsskjemaet viser at løsningen blir:

$$\underline{\underline{x < -1}} \text{ eller } \underline{\underline{0 < x < 1}} \text{ eller } \underline{\underline{x > 2}}.$$

$$d) \quad \frac{x-4}{x^2-x-2} - \frac{1}{x+1} \leq 1 - \frac{2x}{x-2}$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 \\ \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

Samler alt på venstre side av ulikhetstegnet, og setter alt på en brøkstrek:

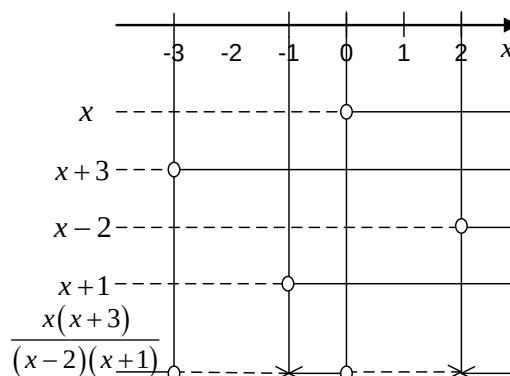
$$\frac{x-4}{(x-2)(x+1)} - \frac{1}{x+1} \cdot \frac{(x-2)}{(x-2)} - 1 \cdot \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+1)} + \frac{2x}{x-2} \cdot \frac{(x+1)}{(x+1)} \leq 0$$

$$\frac{x-4-x+2-x^2-x+2x+2+2x^2+2x}{(x-2)(x+1)} \leq 0$$

$$\frac{x^2+3x}{(x-2)(x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x(x+3)}{(x-2)(x+1)} \leq 0$$

Av fortegnsskjemaet til høyre ser vi at løsningen blir:

$$-3 \leq x < -1 \text{ eller } 0 \leq x < 2.$$



$$e) \quad \frac{4x-2}{x^2+1} < 1.$$

Her vet vi at x^2+1 er positiv siden x^2 aldri kan bli negativ. Altså kan vi multiplisere begge sider av ulikheten med x^2+1 :

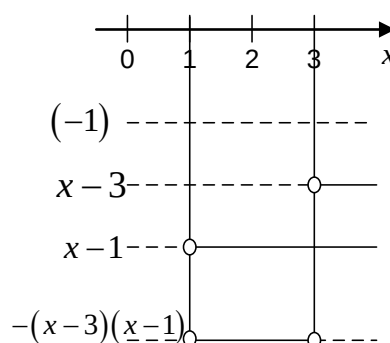
$$\frac{4x-2}{x^2+1} < 1 \Leftrightarrow 4x-2 < x^2+1$$

$$\Leftrightarrow -x^2+4x-3 < 0$$

$$\Leftrightarrow -(x-3)(x-1) < 0$$

Av fortegnsskjemaet ovenfor til høyre får vi løsningen

$$\underline{\underline{x < 1}} \text{ eller } \underline{\underline{x > 3}}.$$



Oppgave 4.1.1

- Utsagn (galt).
- Ikke utsagn.
- Åpent utsagn. Sannhetsverdien kan avgjøres så snart vi vet hvem "de" er. (I dagligtalen kan formuleringen tolkes på to måter: "De er ikke gift med hverandre" eller "Begge er ugifte". At det fins ulike tolkninger har ingen betydning i denne sammenhengen, så lenge alle tolkningene tilhører samme kategori).
- Åpent utsagn. Sannhetsverdien kan avgjøres så snart vi vet hvem "han" er.
- Utsagn - men bare spesialister kan avgjøre sannhetsverdien (det er sant).
- Ikke utsagn. Avhenger av subjektive vurderinger.
- Dersom begrepet "sunt" er definert så presist at vi uten tvil kan avgjøre om påstanden er sann, er dette et utsagn. I dagligtalen er dette neppe tilfelle, og formuleringen er da ikke et utsagn.

Oppgave 4.2.1

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 10\} = \underline{\underline{\{1, 2, 3\}}}.$

b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 10\} = \underline{\underline{\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}}}.$

c) Her må vi først løse likningen

$$\begin{aligned} x^3 - 9x = 0 &\Leftrightarrow x(x^2 - 9) = 0 \Leftrightarrow x(x-3)(x+3) = 0 \\ &\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 0 \vee x = 3 \vee x = -3}} \end{aligned}$$

Men verken $x = 0$ eller $x = -3$ er elementer i $\mathbb{N}$. Da står vi igjen med at:

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 - 9x = 0\} = \underline{\underline{\{3\}}}.$$

Oppgave 4.2.2

$$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

$$A = \{1, 3, 5\}.$$

$$B = \{0, 1, 2, 3\}.$$

$$C = \{1, 2, 4, 6\}.$$

a) $\underline{\underline{A^C = \{0, 2, 4, 6\}}}, \quad \underline{\underline{B^C = \{4, 5, 6\}}}, \quad \underline{\underline{A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 5\}}}, \quad \underline{\underline{B - C = \{0, 3\}}},$
 $\underline{\underline{A \cap B \cap C = \{1\}}}$

Vi ser at $C - B = \{4, 6\}$, slik at

$$\underline{\underline{(C - B)^C = \{0, 1, 2, 3, 5\}}}.$$

b) $(A \cap B) = \{1, 3\}$. Siden $3 \notin C$, er det ikke sant at $(A \cap B) \subseteq C$.

Eller:

$$(A \cap B) \not\subseteq C.$$

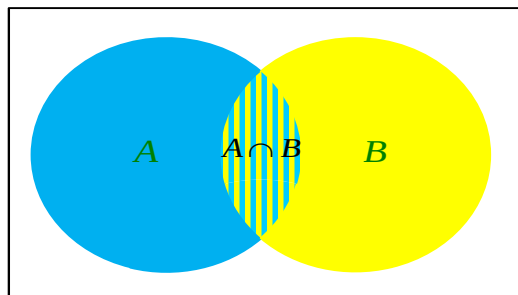
$$A - B = \{5\}, \text{ mens } C^C = \{0, 3, 5\}.$$

Vi ser at det er sant at

$$(A - B) \subset C^C.$$

Oppgave 4.2.3

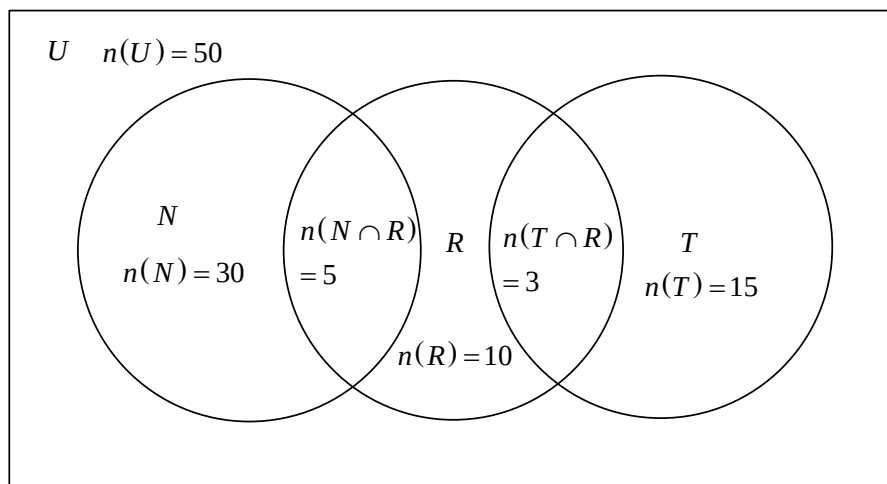
Vi tar utgangspunkt i figuren nedenfor:



Da er A^C alt som ligger utenfor den blå A -sirkelen, mens B^C er alt som ligger utenfor den gule B -sirkelen. Unionen av disse to mengdene må da bli hele grunnmengden unntatt det dobbeltskraverte området $A \cap B$, fordi dette området ligger *innenfor* både A og B . Dermed har vi vist at $A^C \cup B^C = (A \cap B)^C$.

Oppgave 4.2.4

Siden ingen ser både Frokost-TV og God Morgen Norge, får vi dette Venn-diagrammet:



Av dette Venn-diagrammet ser vi at:

- Det er $30 - 5 = 25$ studenter som kun ser Frokost-TV på NRK uten å høre på radio.
- Det er $15 - 3 = 12$ studenter som kun ser God Morgen Norge på TV2 uten å høre på radio.
- Det er $10 - 5 - 3 = 2$ studenter som kun hører på radio uten å se på TV.

Da summerer vi opp antall studenter som enten ser TV eller hører på radio eller begge deler:

$$25 + 5 + 2 + 3 + 12 = \underline{47}.$$

Siden vi har spurt i alt 50 studenter, er det $50 - 47 = \underline{\underline{3}}$ studenter som verken ser på TV eller lytter på radio.

Oppgave 4.3.1

Vi skal altså vise påstanden:

$$U(n) = a_0 + a_0 \cdot k + a_0 \cdot k^2 + a_0 \cdot k^3 + \cdots + a_0 \cdot k^{n-1} \equiv a_0 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1} \text{ for alle } n \in \mathbb{N}.$$

Vi starter med å etablere induksjonsgrunnlaget:

$n = 1$:

Venstre side blir bare a_0 .

Høyre side blir

$$a_0 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1} = a_0 \cdot \frac{k^1 - 1}{k - 1} = a_0 \cdot \frac{k - 1}{k - 1} = a_0.$$

Vi ser at $U(1)$ stemmer.

Strengt tatt er det nå unødvendig å se hva som skjer når $n = 2$. For treningens skyld sjekker vi likevel for denne n -verdien:

$n = 2$:

Venstre side blir

$$a_0 + a_0 \cdot k = a_0(1 + k).$$

Høyre side blir

$$a_0 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1} = a_0 \cdot \frac{k^2 - 1}{k - 1} = a_0 \cdot \frac{\cancel{(k - 1)}(k + 1)}{\cancel{k - 1}} = a_0(k + 1).$$

Vi ser at $U(2)$ stemmer.

Nå er det på tide å sjekke induksjonstrinnet. Vi antar da at påstanden stemmer for en tilfeldig n -verdi $n = t$. Dersom dette stemmer, blir

$$U(t) = a_0 \cdot \frac{k^t - 1}{k - 1}$$

og

$$U(t + 1) = a_0 \cdot \frac{k^{t+1} - 1}{k - 1}.$$

Dersom påstanden stemmer, blir summen av de $t + 1$ første leddene i rekka slik:

$$\begin{aligned} & \underbrace{a_0 + a_0 \cdot k + a_0 \cdot k^2 + a_0 \cdot k^3 + \dots + a_0 \cdot k^{t-1} + a_0 \cdot k^t}_{= a_0 \cdot \frac{k^t - 1}{k - 1}} \\ &= a_0 \cdot \frac{k^t - 1}{k - 1} + a_0 \cdot k^t = a_0 \cdot \left(\frac{k^t - 1}{k - 1} + k^t \right) \\ &= a_0 \cdot \left(\frac{k^t - 1}{k - 1} + \frac{k^t(k - 1)}{k - 1} \right) = a_0 \cdot \frac{k^t - 1 + k^t \cdot k - k^t}{k - 1} \\ &= a_0 \cdot \frac{-1 + k^t \cdot k}{k - 1} = a_0 \cdot \frac{k^{t+1} - 1}{k - 1} \end{aligned}$$

Og det er nettopp det uttrykket vi skal fram til, slik at vi har vist at dersom $U(n)$ stemmer for en verdi $n = t$, må den også stemme for neste verdi $n = t + 1$. Sammen med induksjonsgrunnlaget har vi nå vist at påstanden stemmer for alle $n \in \mathbb{N}$.

Oppgave 4.3.2

Vi skal nå vise at $n^3 - n$ er delelig med 3 for alle hele tall $n \geq 2$.

Vi starter med å etablere induksjonsgrunnlaget. For $n = 2$ blir

$$n^3 - n = 2^3 - 2 = 8 - 2 = 6 = \underline{3 \cdot 2}.$$

Vi ser at $n^3 - n$ inneholder 3 som faktor, og er følgelig delelig med 3.

Før vi går i gang med å sjekke induksjonstrinnet, merker vi oss at et tall er delelig med 3 hvis og bare hvis det kan skrives på formen $a \cdot 3$ der a er et helt tall. Vi har da at:

$$U(n): \text{ Det må eksistere et helt tall } a \text{ slik at } n^3 - n = 3a.$$

Anta at påstanden stemmer for en verdi $n = t$. Neste n -verdi blir da $n = t + 1$. For denne n -verdien får vi:

$$\begin{aligned} n^3 - n &= n(n^2 - 1) = (t+1)((t+1)^2 - 1) = (t+1)(t^2 + 2t + 1 - 1) \\ &= (t+1)(t^2 + 2t) = t^3 + 2t^2 + t^2 + 2t = \underline{t^3 + 3t^2 + 2t} \end{aligned}$$

Tilsynelatende fører ikke dette noe sted hen. Men se hva som skjer når vi *antar* at $U(t)$ er sann, d.v.s. at det fins et helt tall a slik at $t^3 - t = 3a$. Da legger vi til og trekker fra t i uttrykket ovenfor, og får:

$$t^3 + 3t^2 + 2t = \underbrace{t^3 - t}_{=3a} + 3t^2 + 2t + t = 3a + 3t^2 + 3t = \underline{3(a + t^2 + t)}.$$

Her ser vi at dersom $n^3 - n$ delelig med 3 når $n = t$, må uttrykket også være delelig med 3 når $n = t + 1$. Og siden vi vet at påstanden er sann for $n = 2$, må påstanden være sann for alle hele tall $n \geq 2$.

Oppgave 4.3.3

Vi skal altså vise at når vi har n forskjellige punkter i et plan, kan disse punktene forbindes med

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

forskjellige rette linjer.

Vi starter med å etablere induksjonsgrunnlaget. Det er åpenbart riktig for $n = 1$ (ett punkt). Da blir det ingen forbindelseslinjer, og formelen gir da også

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{1(1-1)}{2} = 0.$$

For sikkerhetsskyld sjekker vi også for $n = 2$. Det er innlysende at når vi har to punkter, kan disse forbindes med kun en rett linje. Formelen gir

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{2(2-1)}{2} = 1.$$

Så var det den generelle situasjonen. Vi starter med $n = p$ punkter, og *antar* at disse punktene er forbundet med

$$\frac{p(p-1)}{2}$$

forbindelseslinjer.

Så føyer vi til ett punkt, slik at $n = p + 1$. Fra dette nye punktet kan vi nå trekke linje til hvert av de p opprinnelige punktene, slik at antall linjer blir

$$\frac{p(p-1)}{2} + p = \frac{p^2 - p}{2} + \frac{2p}{2} = \frac{p^2 - p + 2p}{2} = \frac{p^2 + p}{2} = \underline{\underline{\frac{p(p+1)}{2}}}.$$

Dersom vi setter inn $n = p + 1$ i den antatte formelen, får vi

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{(p+1)((p+1)-1)}{2} = \frac{(p+1)p}{2}.$$

Men dette er jo nøyaktig det samme som vi fikk da vi antok at formelen stemte for $n = p$. Vi har altså vist at dersom formelen stemmer for $n = p$, må den stemme for $n = p + 1$. Og siden formelen stemmer for $n = 1$ og for $n = 2$, må den stemme for $n = 3$, for $n = 4$, osv. for alle heltallige verdier av n .

Oppgave 4.4.1

a)

p	q	$\bar{p}$	$p \wedge q$	$\bar{p} \vee (p \wedge q)$	$\bar{p} \vee q$
0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1

Vi ser at $\bar{p} \vee (p \wedge q)$ har samme sannhetsverdier som $\bar{p} \vee q$. Da er $\bar{p} \vee (p \wedge q) \equiv \bar{p} \vee q$.

b)

p	q	$\bar{p}$	$p \vee q$	$\bar{p} \wedge (p \vee q)$	$\bar{p} \wedge q$
0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	0	0

Vi ser at $\bar{p} \wedge (p \vee q)$ har samme sannhetsverdier som $\bar{p} \wedge q$. Da er $\bar{p} \wedge (p \vee q) \equiv \bar{p} \wedge q$.

c)

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$
0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Vi ser at $p \vee (p \wedge q)$ har samme sannhetsverdier som $p \wedge (p \vee q)$ og som p . Da er $p \vee (p \wedge q) \equiv p \wedge (p \vee q) \equiv p$.

Oppgave 4.4.2

p	q	$p \sqcup q$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\overline{(p \wedge q)}$	$(p \vee q) \wedge \overline{(p \wedge q)}$
0	0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	0

Vi ser at tabellen at $p \sqcup q \equiv (p \vee q) \wedge \overline{(p \wedge q)}$.

Oppgave 4.4.3

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \Rightarrow q$	$\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1

Vi ser av tabellen at $p \Rightarrow q \equiv \bar{q} \Rightarrow \bar{p}$.

Oppgave 4.4.4

a) og b)

p	q	$p \wedge q$	$p \Rightarrow (p \wedge q)$	$(p \wedge q) \Rightarrow p$
0	0	0	1	1
0	1	0	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

$(p \wedge q) \Rightarrow p$ er en tautologi.

c)

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

d)

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \wedge (p \Rightarrow q)$	$p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

$p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ er en tautologi.

Oppgave 4.4.5

a) $p \Rightarrow q$.

b) $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$

”Hvis sola ikke skinner på Mallorca, så reiser ikke Per til Mallorca.”

c) $\overline{(p \Rightarrow q)} \equiv (\bar{p} \vee q) \equiv (\bar{\bar{p}} \wedge \bar{q}) \equiv \underline{p \wedge \bar{q}}$.

- d) "Sola skinner på Mallorca, og Per reiser ikke til Mallorca."
 "Hvis sola skinner på Mallorca, og Per reiser til Mallorca, så blir Per solbrent."
- e) $\overline{((p \wedge q) \Rightarrow r)} \equiv \overline{((p \wedge q) \vee r)} \equiv \overline{((\overline{p \wedge q}) \wedge \bar{r})} \equiv \underline{(p \wedge q) \wedge \bar{r}}.$
 "Sola skinner på Mallorca, og Per reiser til Mallorca, og Per blir ikke solbrent."

Oppgave 4.4.6

a) $p \wedge (\bar{p} \vee (p \wedge q))$
 $\equiv p \wedge ((\bar{p} \vee p) \wedge (\bar{p} \vee q))$
 $\equiv p \wedge (1 \wedge (\bar{p} \vee q))$
 $\equiv p \wedge (\bar{p} \vee q)$
 $\equiv (p \wedge \bar{p}) \vee (p \wedge q)$
 $\equiv 0 \vee (p \wedge q)$
 $\equiv p \wedge q$

Forklaring:

Distributiv lov

$$\bar{p} \vee p \equiv 1$$

$$1 \wedge p \equiv p$$

Distributiv lov

$$p \wedge \bar{p} \equiv 0$$

$$0 \vee p \equiv p$$

p	q	$\bar{p}$	$p \wedge q$	$\bar{p} \vee (p \wedge q)$	$p \wedge (\bar{p} \vee (p \wedge q))$
0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1

b) $\overline{(q \wedge (\overline{p \wedge q}))}$
 $\equiv \overline{(q \wedge (\bar{p} \vee \bar{q}))}$
 $\equiv \overline{((q \wedge \bar{p}) \vee (q \wedge \bar{q}))}$
 $\equiv \overline{((q \wedge \bar{p}) \vee 0)}$
 $\equiv \overline{(q \wedge \bar{p})}$
 $\equiv \bar{q} \vee p$

Starter med å løse opp den innerste parentesen:

deMorgans teorem

Distributive lov

$$q \wedge \bar{q} \equiv 0$$

$$p \vee 0 \equiv p$$

deMorgans teorem, og opphever dobbel negasjon.

Du kan også starte med å løse opp den ytterste parentesen med deMorgans teorem (muligens lettere i denne oppgaven).

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \wedge q$	$\overline{(p \wedge q)}$	$q \wedge \overline{(p \wedge q)}$	$\overline{(q \wedge \overline{(p \wedge q)})}$	$\bar{q} \vee p$
0	0	1	1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1	1

c) $\overline{\overline{((p \vee q) \wedge r) \vee \bar{q}}}$
 $\equiv ((p \vee q) \wedge r) \wedge q$
 $\equiv (p \vee q) \wedge r \wedge q$
 $\equiv ((p \vee q) \wedge q) \wedge r$
 $\equiv q \wedge r$

Oppløser den ytre parentesen:

deMorgans lov, og opphever dobbel negasjon.

Assosiativ lov.

Kommutativ lov.

"Absorbsjons-lov".

p	q	r	$\bar{q}$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$	$\overline{((p \vee q) \wedge r)}$	$\overline{((p \vee q) \wedge r)} \vee \bar{q}$	$q \wedge r$
0	0	0	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0	1	1	0
1	1	1	0	1	1	0	0	1

Vi ser at når nest siste kolonne inverteres, får vi samme verdier som i siste kolonne.

Oppgave 4.4.7

- a) Når både m og n er oddetall, må det finnes to hele tall a og b slik at

$$m = 2a + 1 \text{ og } n = 2b + 1.$$

Da blir

$$m + n = (2a + 1) + (2b + 1) = 2a + 2b + 2 = 2(a + b + 1).$$

Vi ser at $m + n$ har 2 som faktor. Da har vi vist påstanden:

$$\text{”Både } m \text{ og } n \text{ er oddetall} \Rightarrow m + n \text{ er partall.}”$$

- b) Dersom vi ønsker å erstatte implikasjonspila i oppgave a) ovenfor med en ekvivalenspil, må vi undersøke om påstanden nedenfor er riktig:

$$”m + n \text{ er partall} \Rightarrow \text{Både } m \text{ og } n \text{ er oddetall.}”$$

Men hvis både m og n er partall, bli jo $m + n$ et partall. Dette ser vi formelt slik:

Dersom m og n er partall, må det eksistere hele tall a og b slik at $m = 2a$ og $n = 2b$. Da er

$$m + n = 2a + 2b = 2(a + b)$$

som er et partall. Altså kan vi ikke slutte at dersom $m + n$ er et partall, må både m og n være oddetall. Implikasjonen i oppgave a) kan derfor ikke erstattes med en ekvivalens.

- c) Når vi skal bevise påstanden:

$$”\text{Både } m \text{ og } n \text{ er oddetall} \Leftrightarrow m \cdot n \text{ er et oddetall},”$$

må vi gjennomføre beviset i to trinn. Først viser vi ekvivalensen

$$”\text{Både } m \text{ og } n \text{ er oddetall} \Rightarrow m \cdot n \text{ er et oddetall}.”$$

Dette gjør vi slik: Når både m og n er oddetall, må det finnes to hele tall a og b slik at

$$m = 2a + 1 \text{ og } n = 2b + 1.$$

Da blir

$$m \cdot n = (2a + 1) \cdot (2b + 1) = 4ab + 2a + 2b + 1 = 2(2ab + a + b) + 1.$$

Dette viser at $m \cdot n$ blir et oddetall.

Så skal jeg bevise implikasjonen

$$”m \cdot n \text{ er et oddetall} \Rightarrow \text{både } m \text{ og } n \text{ er oddetall}.”$$

Jeg bruker da kontrapositiv bevisteknikk. Da må jeg legge merke til at negasjonen av

”både m og n er oddetall” blir ”enten m eller n eller begge er like tall”. Eller enklere sagt:

”Minst ett av tallene m og n er et like tall”. Da går jeg i gang med å bevise at:

$$”\text{Minst ett av tallene } m \text{ og } n \text{ er et like tall} \Rightarrow ”m \cdot n \text{ er et like tall}.”$$

Anta at m er et like tall. Da må det eksistere et tall a slik at $m = 2a$, og vi får:

$$”m \text{ er et like tall} \Rightarrow m \cdot n = 2a \cdot n”$$

som åpenbart er et like tall uansett om n er like eller odde. Vi får helt tilsvarende resultat derom n er et like tall. Altså har vi vist at:

$$”\text{Minst ett av tallene } m \text{ og } n \text{ er et like tall}” \Rightarrow ”m \cdot n \text{ er et like tall}”.$$

Vi har nå bevist begge implikasjonene i ekvivalensen.

” $m \cdot n$ er et oddetall $\Rightarrow$ både m og n er oddetall”,
og ekvivalensen er dermed bevist.

Oppgave 4.4.8

Istedenfor å bevise at den oppgitte påstanden er sann, skal jeg bevise at negasjonen av påstanden er usann. Den gitte påstanden kan skrives slik:

$$”c \text{ er et oddetall} \Rightarrow \text{likningen } x^2 + x = c \text{ kan kun ha partall som løsninger.}”$$

Negasjonen av dette utsagnet blir:

$$”c \text{ er et oddetall} \Rightarrow \text{likningen } x^2 + x = c \text{ kan ha et oddetall som løsning.}”$$

Dersom likningen har et oddetall x som løsning, kan vi skrive

$$x = 2a + 1$$

der a er et eller annet helt tall. Da får vi:

$$x^2 + x = c$$

$$\Downarrow$$

$$(2a + 1)^2 + (2a + 1) = c$$

$$\Downarrow$$

$$(4a^2 + 4a + 1) + (2a + 1) = c$$

$$\Downarrow$$

$$4a^2 + 6a + 2 = c$$

$$\Downarrow$$

$$2(2a^2 + 3a + 1) = c$$

Men nå må c være et partall, i strid med forutsetningen om at c skal være et oddetall.

Oppgave 5.1.1

$$\begin{array}{r} \text{a)} \quad (x^3 - 4x^2 + 3x - 6) : (x + 2) = x^2 - 6x + 15 - \frac{36}{x + 2} \\ \hline \hline \underline{-(x^3 + 2x^2)} \\ -6x^2 + 3x - 6 \\ \underline{-(-6x^2 - 12x)} \\ 15x - 6 \\ \underline{-(15x + 30)} \\ -36 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad & (3x^4 + 0x^3 + x^2 - 2x - 1) : (x^2 + 0x + 3) = 3x^2 - 8 + \frac{-2x + 23}{x^2 + 3} \\
 & \underline{-(3x^4 + 0x^3 + 9x^2)} \\
 & \quad -8x^2 - 2x - 1 \\
 & \quad \underline{-(-8x^2 - 0x - 24)} \\
 & \quad \quad -2x + 23 \\
 \\
 \text{c)} \quad & (x^4 + 2x^3 + 0x^2 + x - 6) : (2x^2 - x + 1) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{3}{8} + \frac{\frac{1}{8}x - \frac{51}{8}}{2x^2 - x + 1} \\
 & \underline{-(x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2)} \\
 & \quad \frac{5}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 6 \\
 & \quad \underline{-(\frac{5}{2}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{5}{4}x)} \\
 & \quad \quad \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - 6 \\
 & \quad \quad \underline{-(\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{8}x + \frac{3}{8})} \\
 & \quad \quad \quad \frac{1}{8}x - \frac{51}{8}
 \end{aligned}$$

Oppgave 5.2.1

a) Setter inn $x = 2$, og får

$$2^3 - 4 \cdot 2^2 + 2 + 6 = 8 - 16 + 2 + 6 = 0$$

som viser at $(x^3 - 4x^2 + x + 6)$ er delelig med $x - 2$.

Utfører da polynomdivisjonen

$$\begin{aligned}
 & (x^3 - 4x^2 + x + 6) = (x - 2) = \underline{x^2 - 2x - 3} \\
 & \underline{-(x^3 - 2x^2)} \\
 & \quad -2x^2 + x + 6 \\
 & \quad \underline{-(-2x^2 + 4x)} \\
 & \quad \quad -3x + 6 \\
 & \quad \quad \underline{-(-3x + 6)} \\
 & \quad \quad \quad 0
 \end{aligned}$$

Faktoriserer $x^2 - 2x - 3$ ved hjelp av formel for løsning av andregradslikninger:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \begin{cases} \frac{2+4}{2} = 3 \\ \frac{2-4}{2} = -1 \end{cases}$$

Nevneren faktoriseres med 3. kvadratsetning. Da blir

$$\frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x^2 - 9} = \frac{(x-2)\cancel{(x-3)}(x-(-1))}{(x+3)\cancel{(x-3)}} = \frac{(x-2)(x+1)}{x+3} = \underline{\underline{\frac{x^2 - x - 2}{x+3}}}.$$

b) Beste strategi er å starte med å faktorisere nevneren med formel for andreggradslikning:

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

slik at nevneren kan skrives $(x-3)(x-1)$.

Ser at når jeg setter inn $x=1$ i telleren, får jeg

$$1^3 + 4 \cdot 1^2 + 1 - 6 = 1 + 4 + 1 - 6 = 0$$

slik at $x-1$ er faktor i telleren, mens når jeg setter inn $x=3$ i telleren, får jeg

$$3^3 + 4 \cdot 3^2 + 3 - 6 = 27 + 36 + 3 - 6 = 60$$

slik at $x-3$ ikke er faktor i telleren. Utfører da polynomdivisjonen

$$(x^3 + 4x^2 + x - 6) : (x-1) = \underline{x^2 + 5x + 6}$$

$$\underline{-(x^3 - x^2)}$$

$$5x^2 + x - 6$$

$$\underline{-(5x^2 - 5x)}$$

$$6x - 6$$

$$\underline{-(6x + 6)}$$

$$0$$

Dermed er

$$\frac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(x^2 + 5x + 6) \cancel{(x-1)}}{(x-3) \cancel{(x-1)}} = \underline{\underline{\frac{x^2 + 5x + 6}{x-3}}}.$$

Oppgave 6.2.1

a) $\frac{x+5}{x^2+x-2}.$

Starter med å faktorisere nevneren ved hjelp av formel for løsning av andreggradslikninger:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 \\ \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}.$$

$$\frac{x+5}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{(A+B)x + (2A-B)}{(x-1)(x+2)}.$$

Siden dette er en identitet, må vi ha

$$A+B=1$$

$$2A-B=5$$

Legger sammen likningene, og får

$$3A=6 \Leftrightarrow A=\underline{2}.$$

Deretter blir

$$A+B=1 \Leftrightarrow B=1-A=1-2=\underline{-1}.$$

Delbrøkoppspaltingen blir derfor

$$\frac{x+5}{x^2+x-2} = \underline{\underline{\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}}}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad \frac{x+18}{x(x-2)(x+3)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3} \\
 &= \frac{A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x+3)} \\
 &= \frac{A(x^2+x-6) + B(x^2+3x) + C(x^2-2x)}{x(x-2)(x+3)} \\
 &= \frac{(A+B+C)x^2 + (A+3B-2C)x - 6A}{x(x-2)(x+3)}
 \end{aligned}$$

Siden dette er en identitet, må vi ha

$$A + B + C = 0$$

$$A + 3B - 2C = 1$$

$$-6A = 18$$

Den siste likningen gir direkte at $A = \underline{-3}$. Setter dette inn i de andre to likningene, multipliserer den øverste likningen med 2 og legger sammen:

$$3 \cdot (-3) + 5B = 1 \Leftrightarrow 5B = 10 \Leftrightarrow B = \underline{2}.$$

Til slutt gir den øverste likningen

$$C = -A - B = -(-3) - 2 = \underline{1}.$$

Dermed har vi delbrøkkoppstillingen

$$\frac{x+18}{x(x-2)(x+3)} = \frac{-3}{x} + \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+3}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{c)} \quad \frac{-2x^2+14}{(x+1)(x-2)(x-3)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} \\
 &= \frac{A(x-2)(x-3) + B(x+1)(x-3) + C(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)(x-3)} \\
 &= \frac{A(x^2-5x+6) + B(x^2-2x-3) + C(x^2-x-2)}{(x+1)(x-2)(x-3)} \\
 &= \frac{(A+B+C)x^2 + (-5A-2B-C)x + (6A-3B-2C)}{(x+1)(x-2)(x-3)}
 \end{aligned}$$

Siden dette er en identitet, må vi ha

$$A + B + C = -2$$

$$-5A - 2B - C = 0$$

$$6A - 3B - 2C = 14$$

Skifter fortegn på den midterste likningen og legger dem sammen. Får da

$$12A = 12 \Leftrightarrow A = \underline{1}.$$

Legger sammen de to øverste likningene, og får

$$-4A - B = -2 \Leftrightarrow B = 2 - 4A = 2 - 4 \cdot 1 = \underline{-2}.$$

Til slutt gir den øverste likningen

$$C = -2 - A - B = -2 - 1 - (-2) = \underline{-1}.$$

Dermed har vi delbrøkkoppstillingen

$$\frac{-2x^2 + 14}{(x+1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x-3}.$$

Oppgave 6.3.1

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{-x^2 + 4x + 3}{x^3 + x^2} &= \frac{-x^2 + 4x + 3}{x^2(x+1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A_1x(x+1) + A_2(x+1) + Bx^2}{x^2(x+1)} \\ &= \frac{A_1x^2 + A_1x + A_2x + A_2 + Bx^2}{x^2(x+1)} = \frac{(A_1 + B)x^2 + (A_1 + A_2)x + A_2}{x^2(x+1)} \end{aligned}$$

Siden dette skal være en identitet, må vi ha at

$$A_1 + B = -1$$

$$A_1 + A_2 = 4$$

$$A_2 = \underline{3}$$

Vi nøster oppover, og finner

$$A_1 = 4 - A_2 = 4 - 3 = \underline{1}.$$

$$B = -1 - A_1 = -1 - 1 = \underline{-2}.$$

Dermed har vi delbrøkkoppstillingen

$$\frac{-x^2 + 4x + 3}{x^3 + x^2} = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x+1}.$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \frac{2x^2 + 9x + 7}{(x-1)(x+2)^2} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B_1}{x+2} + \frac{B_2}{(x+2)^2} = \frac{A(x+2)^2 + B_1(x+2)(x-1) + B_2(x-1)}{(x+1)(x+2)^2} \\ &= \frac{Ax^2 + 4Ax + 4A + B_1x^2 + B_1x - 2B_1 + B_2x - B_2}{(x+1)(x+2)^2} \\ &= \frac{(A + B_1)x^2 + (4A + B_1 + B_2)x + (4A - 2B_1 - B_2)}{(x+1)(x+2)^2} \end{aligned}$$

Siden dette skal være en identitet, må vi ha at

$$A + B_1 = 2$$

$$4A + B_1 + B_2 = 9$$

$$4A - 2B_1 - B_2 = 7$$

Legger sammen alle tre likningene, og får

$$9A = 18 \Leftrightarrow A = \underline{2}.$$

Da gir den øverste likningen

$$B_1 = 2 - A = 2 - 2 = \underline{0}.$$

Til slutt gir den nederste likningen

$$B_2 = 4A - 2B_1 - 7 = 4 \cdot 2 - 2 \cdot 0 - 7 = \underline{1}.$$

Dermed har vi delbrøkkoppstillingen

$$\frac{2x^2 + 9x + 7}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+2)^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad \frac{-x^2 + 9x - 2}{(x-3)(x+1)^2} &= \frac{A}{x-3} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + B_1(x-3)(x+1) + B_2(x-3)}{(x-3)(x+1)^2} \\ &= \frac{Ax^2 + 2Ax + A + B_1x^2 - 2B_1x - 3B_1 + B_2x - 3B_2}{(x-3)(x+1)^2} \\ &= \frac{(A+B_1)x^2 + (2A-2B_1+B_2)x + (A-3B_1-3B_2)}{(x-3)(x+1)^2} \end{aligned}$$

Siden dette skal være en identitet, må vi ha at

$$A + B_1 = -1$$

$$2A - 2B_1 + B_2 = 9$$

$$A - 3B_1 - 3B_2 = -2$$

Skifter fortegn på den midterste likningen, og legger sammen alle likningene. Får da

$$-4B_2 = -12 \Leftrightarrow B_2 = \underline{3}.$$

Trekker den øverste likningen fra den nederste, og får

$$-4B_1 - 3B_2 = -1 \Leftrightarrow 4B_1 = 1 - 3B_2 = 1 - 3 \cdot 3 = -8 \Leftrightarrow B_1 = \underline{-2}.$$

Da blir

$$A = -1 - B_1 = -1 - (-2) = \underline{1}.$$

Dermed har vi delbrøkopspaltingen

$$\frac{-x^2 + 9x - 2}{(x-3)(x+1)^2} = \frac{1}{x-3} - \frac{2}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}.$$

Oppgave 6.4.1

$$\text{a)} \quad \frac{x+5}{x^2+x-2} = \frac{x+5}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}.$$

Finner A ved å "dekke til" den brøken som ikke har $x-1$ i nevneren, og sette inn $x=1$:

$$\frac{1+5}{\cancel{(x-1)}(1+2)} = \frac{A}{\cancel{x-1}} + \frac{\cancel{B}}{x+2} \Leftrightarrow A = \frac{6}{3} = \underline{2}.$$

Finner B ved å "dekke til" den brøken som ikke har $x+2$ i nevneren, og sette inn $x=-2$:

$$\frac{-2+5}{(-2-1)\cancel{(x+2)}} = \frac{\cancel{A}}{x-1} + \frac{B}{\cancel{x+2}} = \frac{3}{-3} = \underline{-1}.$$

Dermed har vi delbrøkopspaltingen

$$\frac{x+5}{x^2+x-2} = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}.$$

$$\text{b)} \quad \frac{x+18}{x(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$$

Finner A ved å "dekke til" de brøkene som ikke har x i nevneren, og sette inn $x=0$:

$$\frac{0+18}{\cancel{x}(0-2)(0+3)} = \frac{A}{\cancel{x}} + \frac{\cancel{B}}{x-2} + \frac{\cancel{C}}{x+3} = \frac{18}{-6} = \underline{-3}.$$

Finner B ved å "dekke til" de brøkene som ikke har $x-2$ i nevneren, og sette inn $x=2$:

$$\frac{2+18}{2(\cancel{x-2})(2+3)} = \frac{\cancel{A}}{\cancel{x}} + \frac{B}{\cancel{x-2}} + \frac{\cancel{C}}{\cancel{x+3}} \Leftrightarrow B = \frac{20}{10} = \underline{2}.$$

Finner C ved å "dekke til" de brøkene som ikke har $x+3$ i nevneren, og sette inn $x = -3$:

$$\frac{-3+18}{-3(-3-2)(\cancel{x+3})} = \frac{\cancel{A}}{\cancel{x}} + \frac{\cancel{B}}{\cancel{x-2}} + \frac{C}{\cancel{x+3}} \Leftrightarrow C = \frac{15}{15} = \underline{1}.$$

Dermed har vi delbrøkkoppstillingen

$$\frac{x+18}{x(x-2)(x+3)} = \frac{-3}{x} + \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+3}.$$

c)
$$\frac{-2x^2+14}{(x+1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

Finner A ved å "dekke til" de brøkene som ikke har $x+1$ i nevneren, og sette inn $x = -1$:

$$\frac{-2(-1)^2+14}{(\cancel{x+1})(-1-2)(-1-3)} = \frac{A}{\cancel{x+1}} + \frac{\cancel{B}}{\cancel{x-2}} + \frac{\cancel{C}}{\cancel{x-3}} \Leftrightarrow A = \frac{12}{12} = \underline{1}.$$

Finner B ved å "dekke til" de brøkene som ikke har $x-2$ i nevneren, og sette inn $x = 2$:

$$\frac{-2 \cdot 2^2+14}{(2+1)(\cancel{x-2})(2-3)} = \frac{\cancel{A}}{\cancel{x+1}} + \frac{B}{\cancel{x-2}} + \frac{\cancel{C}}{\cancel{x-3}} \Leftrightarrow B = \frac{6}{-3} = \underline{-2}.$$

Finner C ved å "dekke til" de brøkene som ikke har $x-3$ i nevneren, og sette inn $x = 3$:

$$\frac{-2 \cdot 3^2+14}{(3+1)(3-2)(\cancel{x-3})} = \frac{\cancel{A}}{\cancel{x+1}} + \frac{\cancel{B}}{\cancel{x-2}} + \frac{C}{\cancel{x-3}} \Leftrightarrow C = \frac{-4}{4} = \underline{-1}.$$

Dermed har vi delbrøkkoppstillingen

$$\frac{-2x^2+14}{(x+1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x-3}.$$

Oppgave 6.5.1

a)
$$\begin{aligned} \frac{3x^2-4}{x^3+4x} &= \frac{3x^2-4}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4} = \frac{A(x^2+4) + (Bx+C)x}{x(x^2+4)} \\ &= \frac{Ax^2+4A+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)} = \frac{(A+B)x^2+Cx+4A}{x(x^2+1)} \end{aligned}$$

Siden dette er en identitet, må vi ha

$$A+B=3$$

$$C=0$$

$$4A=-4 \Leftrightarrow A=\underline{-1}.$$

Da gir den øverste likningen at

$$B=3-A=3-(-1)=\underline{4}.$$

Delbrøkkoppstillingen blir derfor

$$\frac{3x^2-4}{x^3+4x} = \frac{4x}{x^2+4} - \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \frac{2x^2 - x + 5}{(x^2 + 1)(x - 1)} &= \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x - 1} = \frac{(Ax + B)(x - 1) + C(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x - 1)} \\ &= \frac{Ax^2 - Ax + Bx - B + Cx^2 + C}{(x^2 + 1)(x - 1)} = \frac{(A + C)x^2 + (-A + B)x + (-B + C)}{(x^2 + 1)(x - 1)} \end{aligned}$$

Siden dette er en identitet, må vi ha

$$A + C = 2$$

$$-A + B = -1$$

$$-B + C = 5$$

Legger sammen alle likningene, og får

$$2C = 6 \quad \Leftrightarrow \quad C = \underline{3}.$$

Nøster opp:

$$A = 2 - C = 2 - 3 = \underline{-1}.$$

$$B = -1 + A = -1 + (-1) = \underline{-2}.$$

Delbrøkoppspaltingen blir derfor

$$\frac{2x^2 - x + 5}{(x^2 + 1)(x - 1)} = \frac{-x - 2}{x^2 + 1} + \frac{3}{x - 1} = \underline{\underline{\frac{3}{x - 1} - \frac{x + 2}{x^2 + 1}}}.$$

$$\text{c)} \quad \frac{3x^2 - 3x - 1}{(x - 2)(x^2 - 4x + 5)}.$$

Ser at

$$x^2 - 4x + 5 = (x^2 - 4x + 4) + 1 = (x - 2)^2 + 1$$

som alltid er positivt, og som derfor ikke kan faktoriseres videre. Må derfor benytte delbrøkoppspaltingen

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 - 5x - 1}{(x - 2)(x^2 - 4x + 5)} &= \frac{A}{x - 2} + \frac{Bx + C}{x^2 - 4x + 5} = \frac{A(x^2 - 4x + 5) + (Bx + C)(x - 2)}{(x - 2)(x^2 - 4x + 5)} \\ &= \frac{Ax^2 - 4Ax + 5A + Bx^2 - 2Bx + Cx - 2C}{(x - 2)(x^2 - 4x + 5)} \\ &= \frac{(A + B)x^2 + (-4A - 2B + C)x + (5A - 2C)}{(x - 2)(x^2 - 4x + 5)} \end{aligned}$$

Siden dette er en identitet, må vi ha

$$A + B = 3$$

$$-4A - 2B + C = -5$$

$$5A - 2C = -1$$

Multipliserer den øverste likningen med 2 og legger til den midterste. Får da

$$-2A + C = 1.$$

Multipliserer dette med 2 og legger til den nederste. Får da $A = \underline{1}$.

Deretter blir

$$B = 3 - A = 3 - 1 = \underline{2},$$

$$C = 1 + 2A = 1 + 2 \cdot 1 = \underline{3}.$$

Delbrøkoppspaltingen blir derfor

$$\frac{3x^2 - 5x - 1}{(x-2)(x^2 - 4x + 5)} = \frac{1}{x-2} + \frac{2x+3}{x^2 - 4x + 5}.$$

Oppgave 6.6.1

$$\begin{aligned} \frac{-2x^2 + x + 1}{(x^2 + 1)^2} &= \frac{A_1x + B_1}{x^2 + 1} + \frac{A_2x + B_2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(A_1x + B_1)(x^2 + 1) + A_2x + B_2}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{A_1x^3 + A_1x + B_1x^2 + B_1 + A_2x + B_2}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{A_1x^3 + B_1x^2 + (A_1 + A_2)x + (B_1 + B_2)}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

Siden dette er en identitet, må vi ha

$$A_1 = \underline{0}.$$

$$B_1 = \underline{-2}.$$

$$A_1 + A_2 = 1 \Leftrightarrow A_2 = 1 - A_1 = 1 - 0 = \underline{1}.$$

$$B_1 + B_2 = 1 \Leftrightarrow B_2 = 1 - B_1 = 1 - (-2) = \underline{3}.$$

Dermed har vi delbrøkkoppspaltingen

$$\frac{-2x^2 + 4x + 3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2}{x^2 + 1} + \frac{x + 3}{(x^2 + 1)^2}.$$

Oppgave 7.1.1

$$\text{a) } (3x)^2 \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 3^2 \cancel{x^2} \cdot \frac{2^2}{\cancel{x^2}} = 9 \cdot 4 = \underline{\underline{36}}.$$

$$\text{b) } \frac{(x^2)^4 \cdot (x \cdot y^2)^2}{(x^3y)^3} = \frac{x^8 \cdot x^2 \cdot (y^2)^2}{(x^3)^3 \cdot y^3} = \frac{x^{8+2} \cdot y^{2 \cdot 2}}{x^{3 \cdot 3} \cdot y^3} = \frac{x^{10}y^4}{x^9y^3} = x^{10-9}y^{4-3} = x^1 \cdot y^1 = \underline{\underline{xy}}.$$

$$\text{c) } \frac{\left(2\frac{x}{y}\right)^2}{(2x^2)^3 \cdot y^3} = \frac{2^2 \cdot \frac{x^2}{y^2}}{2^3 \cdot (x^2)^3 \cdot y^3} = \frac{4 \frac{x^2}{\cancel{y^2}} \cdot \cancel{y^2}}{8x^6y^3 \cdot y^2} = \frac{x^2}{2x^6y^{3+2}} = \underline{\underline{\frac{1}{2x^4y^5}}}.$$

Oppgave 7.2.1

$$\text{a) } \frac{1}{a^{-n}} = a^{-(-n)} = \underline{\underline{a^n}}.$$

$$\text{b) } \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}} = a^{-n} \cdot b^{-(-n)} = \frac{1}{a^n} \cdot b^n = \underline{\underline{\frac{b^n}{a^n}}}.$$

Oppgave 7.2.2

$$a) \left(\frac{2x}{y^2}\right)^3 \cdot \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{(2y^{-2})^2} = \frac{2^3 x^3}{y^6} \cdot \frac{x^{-2}}{2^2 y^{-4}} = 2^{3-2} \cdot x^{3-2} \cdot y^{-6-(-4)} = 2^1 \cdot x^1 \cdot y^{-2} = \underline{\underline{\frac{2x}{y^2}}}$$

$$b) \frac{(x^{-2}y)^{-3} \cdot \left(\frac{2x}{y^2}\right)^{-3}}{(xy^{-1})^3} = \frac{x^{(-2)(-3)} \cdot y^{-3} \cdot 2^{-3} \cdot x^{-3} \cdot y^{(-2)(-3)}}{x^3 \cdot y^{-3}} = x^{6-3-3} \cdot 2^{-3} \cdot y^{-3+6-(-3)} \\ = x^0 \cdot \frac{1}{2^3} \cdot y^6 = \underline{\underline{\frac{y^6}{8}}}$$

$$c) \frac{(2x^2y^{-3})^{-2} \cdot \left(\frac{x}{2y}\right)^2}{\left(\frac{(2y)^{-1}}{x^2}\right)^3} = \frac{2^{-2} \cdot x^{2(-2)} \cdot y^{(-3)(-2)} \cdot x^2 \cdot 2^{-2} \cdot y^{-2}}{(2y)^{(-1) \cdot 3} \cdot x^{(-2) \cdot 3}} = \frac{2^{-2} \cdot x^{-4} \cdot y^6 \cdot x^2 \cdot 2^{-2} \cdot y^{-2}}{2^{-3} \cdot y^{-3} \cdot x^{-6}} \\ = 2^{-2-2-(-3)} \cdot x^{-4+2-(-6)} \cdot y^{6-2-(-3)} = 2^{-1} \cdot x^4 \cdot y^7 = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^4y^7}}$$

Oppgave 7.3.1

$$a) \sqrt[3]{27} = 3 \text{ fordi } 3^3 = 27.$$

$$b) \sqrt[4]{16} = 2 \text{ fordi } 2^4 = 16.$$

$$c) \sqrt[3]{-125} = -5 \text{ fordi } (-5)^3 = -125.$$

$$d) \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3} \text{ fordi } \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}.$$

$$e) \sqrt[5]{-243} = -3 \text{ fordi } (-3)^5 = -243.$$

Oppgave 7.3.2

$$a) \sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^4} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 3} = 3 \cdot \sqrt[3]{3}.$$

$$b) \sqrt{27x^5} = \sqrt{3^3 \cdot x^5} = \sqrt{3^2 \cdot 3 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot x} = 3 \cdot \sqrt{3} \cdot x \cdot x \cdot \sqrt{x} = \underline{\underline{3x^2 \cdot \sqrt{3x}}}.$$

$$c) \sqrt[4]{\frac{32x}{81}} = \sqrt[4]{\frac{2^5 \cdot x}{3^4}} = \frac{\sqrt[4]{2^4 \cdot 2 \cdot x}}{\sqrt[4]{3^4}} = \underline{\underline{\frac{2 \cdot \sqrt[4]{2x}}{3}}}.$$

$$d) \sqrt[3]{-32x^6} = \sqrt[3]{(-1) \cdot 2^5 \cdot x^6} = \sqrt[3]{(-1) \cdot \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^2} \cdot \sqrt[3]{x^3 \cdot x^3}} = -2 \cdot \sqrt[3]{2^2} \cdot x \cdot x = \underline{\underline{-2x^2 \cdot \sqrt[3]{4}}}.$$

Oppgave 7.4.1

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \frac{\sqrt{2xy^3}}{x} \cdot \frac{\sqrt{y}}{(2x)^{-1}} = \frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot (y^3)^{\frac{1}{2}}}{x^1} \cdot \frac{y^{\frac{1}{2}}}{2^{-1} \cdot x^{-1}} = 2^{\frac{1}{2}-(-1)} \cdot x^{\frac{1}{2}-1-(-1)} \cdot y^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot y^2 \\
 & = (2^3)^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot y^2 = \underline{\underline{\sqrt{8x} \cdot y^2}} \\
 \text{b)} \quad & \frac{(3x)^{-\frac{1}{2}}}{x^2 y} \cdot \sqrt{6xy^{-2}} = \frac{3^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}}}{x^2 y^1} \cdot (2 \cdot 3)^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} (y^{-2})^{\frac{1}{2}} = 3^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}-2+\frac{1}{2}} \cdot y^{-1+(-2)\frac{1}{2}} \\
 & = 3^0 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-2} \cdot y^{-2} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{x^2 y^2}}} \\
 \text{c)} \quad & \sqrt{\frac{2x^3}{y}} \cdot (4x\sqrt{y})^{-1} = \left(\frac{2x^3}{y}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (2^2 \cdot x \cdot y^{\frac{1}{2}})^{-1} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot y^{-\frac{1}{2}} \cdot 2^{-2} \cdot x^{-1} \cdot y^{-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}-2} \cdot x^{\frac{3}{2}-1} \cdot y^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \\
 & = 2^{-\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{-1} = (2^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{2^3}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{y} = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{2} \cdot y} = \underline{\underline{\frac{1}{2y} \sqrt{\frac{x}{2}}}} \\
 \text{d)} \quad & \frac{\sqrt[3]{xy^{-1}}}{\sqrt{x^{-1}y^3}} \cdot \sqrt[6]{\frac{x}{y}} = \frac{(xy^{-1})^{\frac{1}{3}}}{(x^{-1}y^3)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{6}}}{y^{\frac{1}{6}}} = x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{-\frac{1}{3}} \cdot x^{-(-\frac{1}{2})} \cdot y^{-\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{1}{6}} \cdot y^{-\frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}} \cdot y^{-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}-\frac{1}{6}} \\
 & = x^1 \cdot y^{-2} = \underline{\underline{\frac{x}{y^2}}} \\
 \text{e)} \quad & \sqrt{\frac{3x^2y}{\left(\frac{y^{-1}}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}}} \cdot \sqrt[6]{\frac{x}{y}} = \left(\frac{(x^2y)^{\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^{-2})^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{6}}}{y^{\frac{1}{6}}} = \left(x^{\frac{2}{3}} \cdot y^{\frac{1}{3}} \cdot y^{-(-\frac{1}{2})} \cdot x^{-(-1)}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{6}} \cdot y^{-\frac{1}{6}} \\
 & = \left(x^{\frac{2}{3}+1} \cdot y^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{6}} \cdot y^{-\frac{1}{6}} = \left(x^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(y^{\frac{5}{6}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{6}} \cdot y^{-\frac{1}{6}} \\
 & = x^{\frac{5}{6}+\frac{1}{6}} \cdot y^{\frac{5}{12}-\frac{1}{6}} = x^1 \cdot y^{\frac{1}{4}} = \underline{\underline{x \cdot \sqrt[4]{y}}}
 \end{aligned}$$

Oppgave 7.5.1

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}-2)\sqrt{x} = (\sqrt{x}^2 - 1^2) - \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} + 2 \cdot \sqrt{x} = x - 1 - x + 2\sqrt{x} = \underline{\underline{2\sqrt{x} - 1}} \\
 \text{b)} \quad & (\sqrt{x} + 2\sqrt{y})^2 + (2\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \\
 & = \sqrt{x}^2 + 2 \cdot \sqrt{x} \cdot 2\sqrt{y} + (2\sqrt{y})^2 + (2\sqrt{x})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} - \sqrt{y}^2 \\
 & = x + 4\sqrt{xy} + 4y + 4x - 4\sqrt{xy} + y = \underline{\underline{5x + 5y}} = \underline{\underline{5(x + y)}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & 2\sqrt{y}(x - \sqrt{y}) - \sqrt{x}(\sqrt{xy} - \sqrt{y}) + \sqrt{y}(2\sqrt{y} - x) \\ &= 2x\sqrt{y} - 2\sqrt{y}^2 - \sqrt{x^2y} + \sqrt{xy} + 2\sqrt{y}^2 - \sqrt{y} \cdot x \\ &= 2x\sqrt{y} - 2y - x\sqrt{y} + \sqrt{xy} + 2y - x\sqrt{y} = \underline{\underline{\sqrt{xy}}} \end{aligned}$$

Oppgave 7.5.2

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} + \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}^2 + (1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} \\ &= \frac{x + (1-\sqrt{x}^2)}{\sqrt{x}-\sqrt{x}^2} = \frac{x+1-x}{\sqrt{x}-x} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{x}-x}}} \\ \text{b)} \quad & \sqrt{2x} + \frac{(x-2)\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = \sqrt{2x} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} + \frac{x\sqrt{x}-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2x^2} + \sqrt{2^2x} + x\sqrt{x} - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2} \cdot x + 2\sqrt{x} + x\sqrt{x} - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot x + x\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = \frac{x(\sqrt{2}+\sqrt{x})}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = \underline{\underline{x}} \\ \text{c)} \quad & \frac{(1-\sqrt{x})^2}{1+\sqrt{x}} - \frac{x+1}{\sqrt{x}} = \frac{1-2\sqrt{x}+\sqrt{x}^2}{1+\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{x+1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \\ &= \frac{(1-2\sqrt{x}+x)\sqrt{x} - (x+1)(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} \\ &= \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt{x}^2 + x\sqrt{x} - x - x\sqrt{x} - 1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} \\ &= \frac{-2x - x - 1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}^2} = \underline{\underline{\frac{-3x-1}{\sqrt{x}+x}}} \end{aligned}$$

Oppgave 7.5.3

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \sqrt{4x^2y - x^3} = \sqrt{x^2(4y-x)} = \underline{\underline{x\sqrt{4y-x}}} \\ \text{b)} \quad & \frac{\sqrt{x^3 - 4xy^2}}{\sqrt{x^2 - 2xy}} = \frac{\sqrt{x(x^2 - 4y^2)}}{\sqrt{x(x-2y)}} = \sqrt{\frac{x(\cancel{x-2y})(x+2y)}{x(\cancel{x-2y})}} = \underline{\underline{\sqrt{x+2y}}} \\ \text{c)} \quad & \sqrt{\frac{1}{x} + 2 + x} = \sqrt{\frac{1+2x+x^2}{x}} = \sqrt{\frac{(1+x)^2}{x}} = \frac{1+x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}^2}{\sqrt{x}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}}} \end{aligned}$$

Oppgave 7.5.4

$$\text{a)} \quad \sqrt{\frac{4x^3 - x}{2x+1}} = \sqrt{\frac{x(4x^2-1)}{2x+1}} = \sqrt{\frac{x(\cancel{2x+1})(2x-1)}{\cancel{2x+1}}} = \underline{\underline{\sqrt{x(2x-1)}}} = \underline{\underline{\sqrt{2x^2-x}}}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad & \frac{\sqrt{x^2 y - 2x^3}}{\sqrt{y^2 - 4x^2}} = \frac{\sqrt{x^2(y-2x)}}{\sqrt{(y-2x)(y+2x)}} = \frac{\cancel{x} \sqrt{\cancel{y-2x}}}{\cancel{\sqrt{y-2x}} \cdot \sqrt{y+2x}} = \frac{x}{\sqrt{y+2x}} \\
 \text{c)} \quad & \frac{x^2 + 2xy}{\sqrt{x^4 - 4x^2 y^2}} = \frac{x(x+2y)}{\sqrt{x^2(x^2 - (2y)^2)}} = \frac{x(x+2y)}{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{(x+2y)(x-2y)}} \\
 & = \frac{x(\sqrt{x+2y})^2}{x\sqrt{x+2y}\sqrt{x-2y}} = \frac{\sqrt{x+2y}}{\sqrt{x-2y}} \\
 \text{d)} \quad & \frac{x\sqrt{3x^2 y + 6xy^2 + 3y^3}}{\sqrt{xy^3 - x^3 y}} = \frac{x\sqrt{3y(x^2 + 2xy + y^2)}}{\sqrt{xy(y^2 - x^2)}} = \frac{x\sqrt{3y}\sqrt{(x+y)^2}}{\sqrt{xy}\sqrt{(y-x)(y+x)}} \\
 & = \sqrt{\frac{x^2 \cdot 3y}{xy}} \cdot \sqrt{\frac{(x+y)^2}{(y-x)(x+y)}} = \sqrt{3x} \cdot \sqrt{\frac{x+y}{y-x}}
 \end{aligned}$$

Oppgave 7.5.5

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} - \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} = \frac{(x-1) - (x+1)}{\sqrt{(x-1)(x+1)}} = \frac{-2}{\sqrt{x^2-1}} \\
 \text{b)} \quad & \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} = \frac{x}{\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-1}} - \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} = \frac{x - (x-1)}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \\
 \text{c)} \quad & \frac{x}{\sqrt{x^2-2x}} - \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x} = \frac{x}{\sqrt{x^2-2x}} \cdot \frac{x}{x} - \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2-2x}}{\sqrt{x^2-2x}} = \frac{x^2 - \sqrt{x^2-2x}^2}{x\sqrt{x^2-2x}} \\
 & = \frac{x^2 - (x^2 - 2x)}{x\sqrt{x^2-2x}} = \frac{2x}{x\sqrt{x^2-2x}} = \frac{2}{\sqrt{x^2-2x}}
 \end{aligned}$$

Oppgave 8.1.1

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \log_{10} 10 = \underline{1} \text{ fordi } 10^1 = 10. \\
 \text{b)} \quad & \log_2 \left(\frac{1}{2}\right) = \underline{-1} \text{ fordi } 2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}. \\
 \text{c)} \quad & \log_5 125 = \underline{3} \text{ fordi } 5^3 = 125. \\
 \text{d)} \quad & \log_2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \underline{-\frac{1}{2}} \text{ fordi } 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.
 \end{aligned}$$

Oppgave 8.2.1

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \log_2 (8x^3) = \log_2 8 + \log_2 (x^3) = \log_2 (2^3) + \log_2 (x^3) = 3\log_2 2 + 3\log_2 x \\
 & = 3 \cdot 1 + 3\log_2 x = \underline{\underline{3(1 + \log_2 x)}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \log_{10} \sqrt{\frac{10}{x^3}} &= \log_{10} \left(\frac{10}{x^3} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_{10} \left(\frac{10}{x^3} \right) = \frac{1}{2} (\log_{10}(10) - \log_{10}(x^3)) \\ &= \frac{1}{2} (1 - 3 \log_{10} x) = \underline{\underline{\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \log_{10} x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \ln(x^2 - 4) - \ln(x + 2) &= \ln((x - 2)(x + 2)) - \ln(x + 2) \\ &= (\ln(x - 2) + \ln(x + 2)) - \ln(x + 2) \\ &= \underline{\underline{\ln(x - 2)}} \end{aligned}$$

Eller:

$$\ln(x^2 - 4) - \ln(x + 2) = \ln\left(\frac{x^2 - 4}{x + 2}\right) = \ln\left(\frac{(x - 2)\cancel{(x + 2)}}{\cancel{x + 2}}\right) = \underline{\underline{\ln(x - 2)}}$$

$$\text{d) } \ln(3\sqrt{e}) = \ln 3 + \ln(\sqrt{e}) = \ln 3 + \ln(e^{\frac{1}{2}}) = \ln 3 + \frac{1}{2} \ln e = \ln 3 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \underline{\underline{\ln 3 + \frac{1}{2}}}$$

Oppgave 8.3.1

$$u = a^{\log_a u} \Leftrightarrow \ln u = \ln(a^{\log_a u}) = \log_a u \cdot \ln a \Leftrightarrow \log_a u = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln u$$

Oppgave 8.3.2

I begge deloppgavene skal jeg benytte at

$$\log_a u = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln u.$$

$$\text{a) } \log_{10} 861 = \frac{1}{\ln 10} \cdot \ln 861 = \frac{1}{2.3026} \cdot 6.7581 = \underline{\underline{2.9350}}.$$

$$\text{Kontroll: } 10^{2.9350} = 861.0.$$

$$\text{b) } \log_{16} 2.44 = \frac{1}{\ln 16} \cdot \ln 2.44 = \frac{1}{2.7726} \cdot 0.8920 = \underline{\underline{0.3217}}.$$

$$\text{Kontroll: } 16^{0.3217} = 2.440.$$

Vet nå at

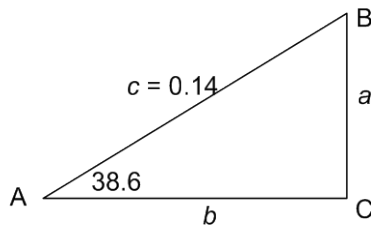
$$16^{0.3217} = 2.440 \Leftrightarrow (2^4)^{0.3217} = 2.440 \Leftrightarrow 2^{4 \cdot 0.3217} = 2.440.$$

Da er

$$\log_2 2.44 = 4 \cdot 0.3217 = \underline{\underline{1.2868}}.$$

Oppgave 9.1.1

a)



$$\sin A = \frac{a}{c}$$

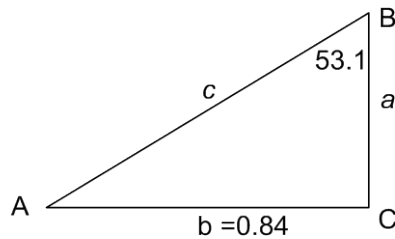
$$\Leftrightarrow a = c \sin A = 0.14 \cdot \sin 38.6^\circ = \underline{\underline{0.087}}$$

$$\cos A = \frac{b}{c}$$

$$\Leftrightarrow b = c \cos A = 0.14 \cdot \cos 38.6^\circ = \underline{\underline{0.11}}$$

$$\angle B = 90^\circ - \angle A = 90^\circ - 38.6^\circ = \underline{\underline{51.4^\circ}}.$$

b)



$$\tan B = \frac{b}{a}$$

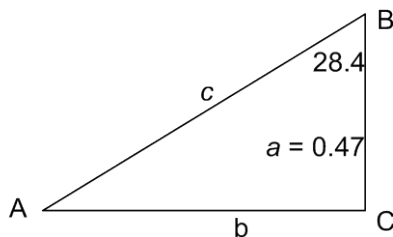
$$\Leftrightarrow a = \frac{b}{\tan B} = \frac{0.84}{\tan 53.1^\circ} = \underline{\underline{0.63}}$$

$$\sin B = \frac{b}{c}$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{b}{\sin B} = \frac{0.84}{\sin 53.1^\circ} = \underline{\underline{1.05}}$$

$$\angle A = 90^\circ - \angle B = 90^\circ - 53.1^\circ = \underline{\underline{36.9^\circ}}.$$

c)



$$\tan B = \frac{b}{a}$$

$$\Leftrightarrow b = a \tan B = 0.47 \cdot \tan 28.4^\circ = \underline{\underline{0.254}}$$

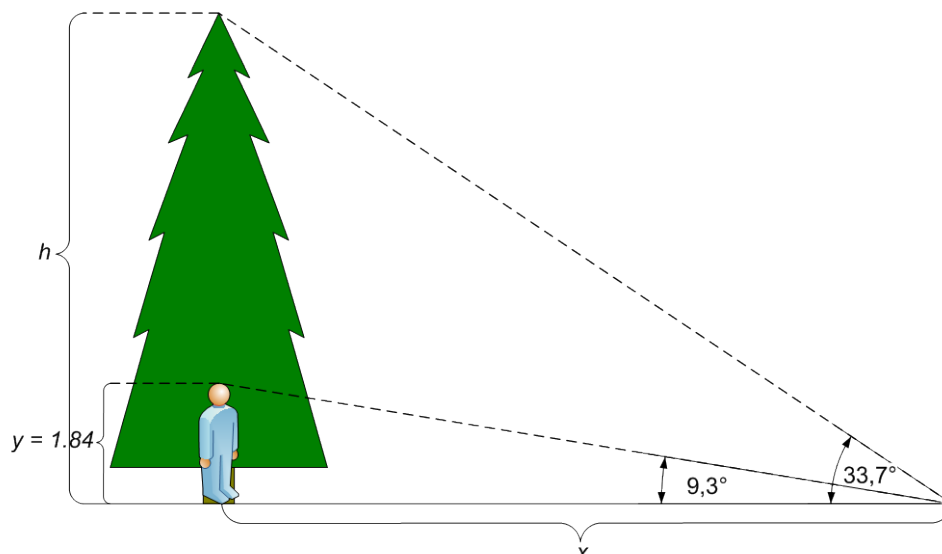
$$\cos B = \frac{a}{c}$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{a}{\cos B} = \frac{0.47}{\cos 28.4^\circ} = \underline{\underline{0.534}}$$

$$\angle A = 90^\circ - \angle B = 90^\circ - 28.4^\circ = \underline{\underline{61.6^\circ}}.$$

Oppgave 9.1.2

a)



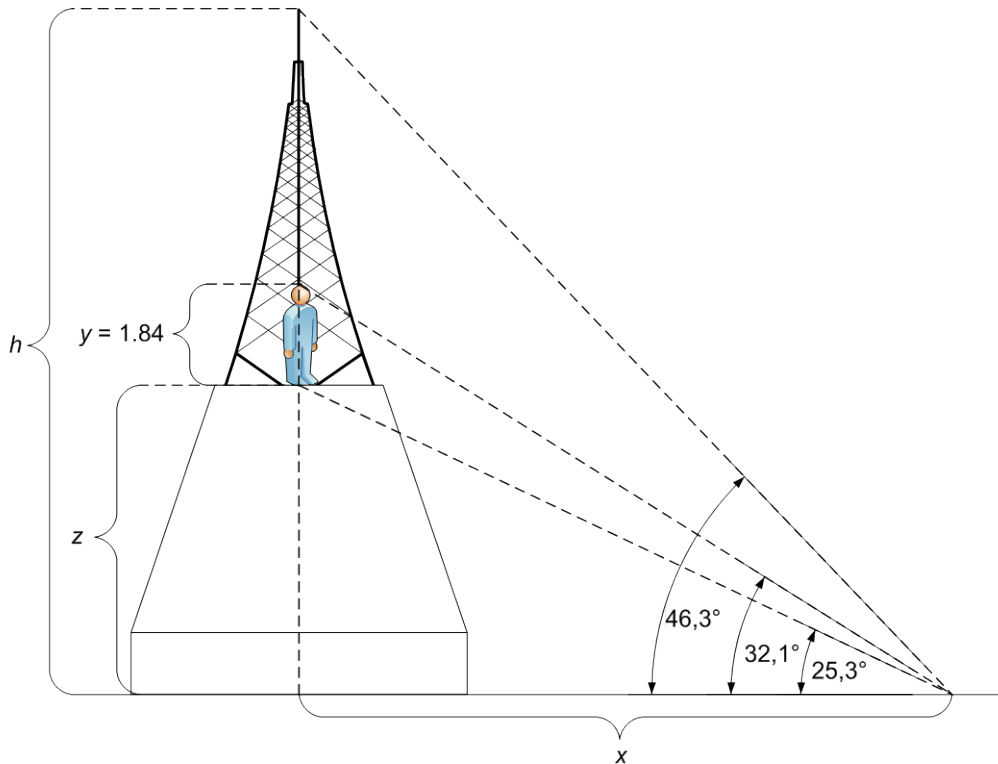
Av figuren ser vi at:

$$\tan 9.3^\circ = \frac{y}{x} \Leftrightarrow x = \frac{y}{\tan 9.3^\circ}.$$

$$\tan 33.7^\circ = \frac{h}{x}$$

$$\Leftrightarrow h = x \cdot \tan 33.7^\circ = \frac{y}{\tan 9.3^\circ} \cdot \tan 33.7^\circ = 1.84 \text{ m} \cdot \frac{\tan 33.7^\circ}{\tan 9.3^\circ} = \underline{\underline{7.49 \text{ m}}}$$

b)



Vi kan nå sette opp disse likningene:

$$(1) \quad \tan 25.3^\circ = \frac{z}{x}$$

$$(2) \quad \tan 32.1^\circ = \frac{z + 1.84 \text{ m}}{x}$$

$$(3) \quad \tan 46.3^\circ = \frac{h}{x}$$

Planen er å finne x av (1) og (2), og deretter finne h av (3). Vi går i gang:

$$(1) \quad \tan 25.3^\circ = \frac{z}{x} \Leftrightarrow z = x \cdot \tan 25.3^\circ.$$

Setter inn i (2):

$$(2) \quad \tan 32.1^\circ = \frac{x \cdot \tan 25.3^\circ + 1.84 \text{ m}}{x} \Leftrightarrow x \cdot \tan 32.1^\circ = x \cdot \tan 25.3^\circ + 1.84 \text{ m}$$

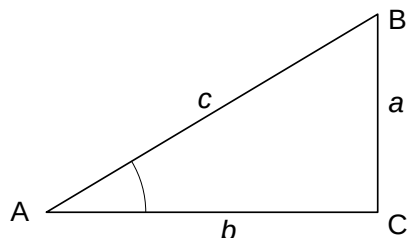
$$x(\tan 32.1^\circ - \tan 25.3^\circ) = 1.84 \text{ m}$$

$$x = \frac{1.84 \text{ m}}{\tan 32.1^\circ - \tan 25.3^\circ} = \underline{\underline{11.90 \text{ m}}}$$

Nå får vi av (3):

$$(3) \quad \tan 46.3^\circ = \frac{h}{x} \Leftrightarrow h = x \cdot \tan 46.3^\circ = 11.90 \text{ m} \cdot \tan 46.3^\circ = \underline{\underline{12.45 \text{ m}}}.$$

Oppgave 9.2.1



I dette løsningsforslaget vil jeg referere til en trekant som vist til venstre.

- a) Når $\cos A = 0.6 = \frac{b}{c}$, kan vi velge enheter slik at $c = 1$ og $b = 0.6$. Da blir

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{1^2 - 0.6^2} = \sqrt{1 - 0.36} = \sqrt{0.64} = \underline{\underline{0.8}}.$$

Da blir

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{0.8}{1} = \underline{\underline{0.8}}.$$

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{0.8}{0.6} = \underline{\underline{1.333}}$$

- b) Når $\tan A = 2 = \frac{a}{b}$, kan vi velge enheter slik at $a = 2$ og $b = 1$. Da blir

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \underline{\underline{\sqrt{5}}}.$$

Da blir

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \underline{\underline{\frac{2}{5}\sqrt{5}}}.$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \underline{\underline{\frac{1}{5}\sqrt{5}}}.$$

- c) Når $\sin A = \frac{1}{4}\sqrt{7} = \frac{a}{c}$, kan vi velge enheter slik at $a = \sqrt{7}$ og $c = 4$. Da blir

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{4^2 - \sqrt{7}^2} = \sqrt{16 - 7} = \sqrt{9} = \underline{\underline{3}}.$$

Da blir

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{3}{4}.$$

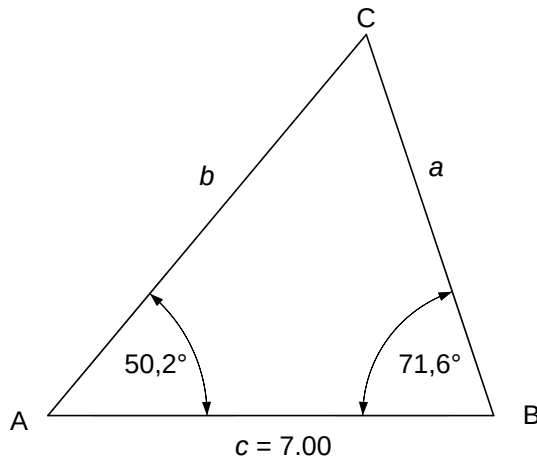
$$\tan A = \frac{a}{b} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{7}}{3}}}.$$

Oppgave 9.5.1

- a) $\arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 60^\circ$ fordi $\sin(60^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
 b) $\arccos(0) = 90^\circ$ fordi $\cos(90^\circ) = 0$.
 c) $\arctan(0) = 0$ fordi $\tan 0 = 0$.
 d) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 120^\circ$ fordi $\cos(120^\circ) = -\frac{1}{2}$.
 e) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -30^\circ$ fordi $\sin(-30^\circ) = -\frac{1}{2}$.
 f) $\arctan(-\sqrt{3}) = -60^\circ$ fordi $\tan(-60^\circ) = -\sqrt{3}$.

Oppgave 9.6.1

a)



Vi får direkte at

$$\begin{aligned}\angle C &= 180^\circ - 50.2^\circ - 71.6^\circ \\ &= \underline{58.2^\circ}\end{aligned}$$

Da gir sinus-setningen:

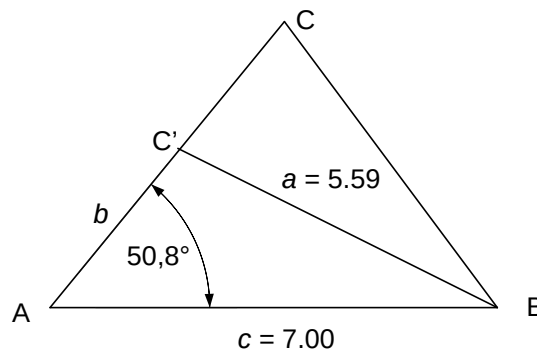
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$$

$$a = \frac{\sin A}{\sin C} \cdot c = \frac{\sin 50.2^\circ}{\sin 58.2^\circ} \cdot 7.00 = \underline{\underline{6.33}}$$

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$b = \frac{\sin B}{\sin C} \cdot c = \frac{\sin 71.6^\circ}{\sin 58.2^\circ} \cdot 7.00 = \underline{\underline{7.82}}$$

b)



Når vi tegner opp trekanten, ser vi at den har to løsninger. Vi starter med å finne $\angle C$ ved hjelp av sinus-setningen:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$$

$$\begin{aligned}\sin C &= \frac{c}{a} \cdot \sin A = \frac{7.00}{5.59} \cdot \sin 50.8^\circ \\ &= \underline{0.970}\end{aligned}$$

Kalkulatoren gir nå at

$$\angle C = \arcsin(0.970) = \underline{\underline{75.9^\circ}}.$$

Men vi kan også bruke

$$\angle C' = 180^\circ - 75.9^\circ = \underline{\underline{104.1^\circ}}.$$

Dermed får vi to alternativer for siden b .

- Dersom vi bruker $\angle C = 75.9^\circ$, blir
 $\angle B = 180^\circ - 50.8^\circ - 75.9^\circ = \underline{53.3^\circ}.$

Da blir

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a} \Leftrightarrow b = \frac{\sin B}{\sin A} \cdot a = \frac{\sin 53.3^\circ}{\sin 50.8^\circ} \cdot 7.00 = \underline{\underline{7.24}}.$$

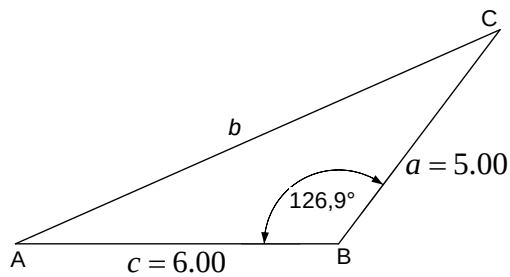
- Dersom vi bruker $\angle C = 104.1^\circ$, blir
 $\angle B = 180^\circ - 50.8^\circ - 104.1^\circ = \underline{25.1^\circ}.$

Da blir

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a} \Leftrightarrow b = \frac{\sin B}{\sin A} \cdot a = \frac{\sin 25.1^\circ}{\sin 50.8^\circ} \cdot 7.00 = \underline{\underline{3.83}}.$$

Oppgave 9.6.2

a)



Vi starter med å finne siden b :

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ &= 5.00^2 + 6.00^2 - 2 \cdot 5.00 \cdot 6.00 \cdot \cos 126.9^\circ \\ &= \underline{97.0} \\ b &= \sqrt{97.0} = \underline{\underline{9.85}}. \end{aligned}$$

Her er det åpenbart at de to ukjente vinklene er mindre enn 90° . Det er derfor helt trygt å bruke sinus-setningen:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \Leftrightarrow \sin A = \frac{a}{b} \cdot \sin B = \frac{5.00}{9.85} \cdot \sin 126.9^\circ = \underline{0.406}.$$

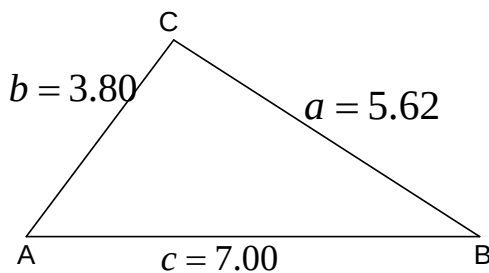
Da er

$$\angle A = \arcsin(0.406) = \underline{\underline{23.9^\circ}}.$$

Til slutt blir

$$\angle C = 180^\circ - 23.9^\circ - 126.9^\circ = \underline{\underline{29.2^\circ}}.$$

b)



Her bruker vi cosinus-setningen til å finne en av vinklene. Deretter er det enklest å bruke sinus-setningen til å finne en av de andre, dersom det ikke kan oppstå tvil om den vinkelen som vi finner med sinus-setningen er mindre enn eller større enn 90° . Vi ser av figuren at det kan være slik tvil om $\angle C$. Vi starter derfor med å finne $\angle C$ med cosinus-setningen:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \\ \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{5.62^2 + 3.80^2 - 7.00^2}{2 \cdot 5.62 \cdot 3.80} = \underline{-0.0697} \end{aligned}$$

Da blir

$$\angle C = \arccos(-0.0697) = \underline{\underline{94.0^\circ}}.$$

Nå finner vi $\angle B$ med sinus-setningen:

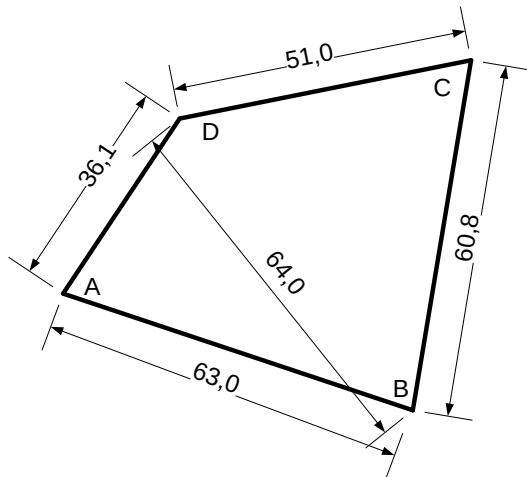
$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \Leftrightarrow \sin B = \frac{b}{c} \cdot \sin C = \frac{3.80}{7.00} \cdot \sin 94.0^\circ = \underline{0.542}.$$

$$\angle B = \arcsin(0.542) = \underline{\underline{32.8^\circ}}.$$

$$\angle A = 180^\circ - 94.0^\circ - 32.8^\circ = \underline{\underline{53.2^\circ}}.$$

Oppgave 9.6.3

a)



Finner først $\angle A$:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos A$$

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2 \cdot AB \cdot AD} \\ &= \frac{63.0^2 + 36.1^2 - 64.0^2}{2 \cdot 63.0 \cdot 36.1} \\ &= \underline{0.259} \end{aligned}$$

Da blir

$$\angle A = \arccos(0.259) = \underline{75.0^\circ}.$$

Finner $\angle C$ på samme måte:

$$BD^2 = BC^2 + DC^2 - 2 \cdot BC \cdot DC \cdot \cos C$$

$$\cos C = \frac{BC^2 + DC^2 - BD^2}{2 \cdot BC \cdot DC} = \frac{60.8^2 + 51.0^2 - 64.0^2}{2 \cdot 60.8 \cdot 51.0} = \underline{0.355}.$$

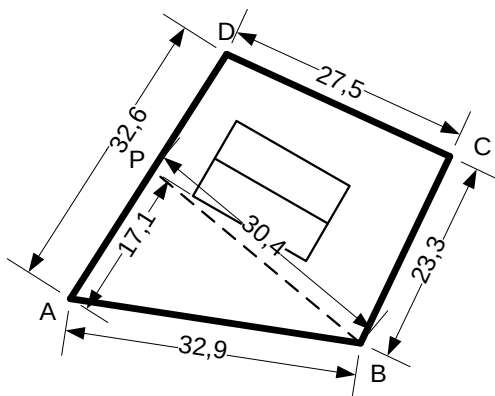
Da blir

$$\angle C = \arccos(0.355) = \underline{69.2^\circ}.$$

Arealet av firkanten blir summen av arealene av de to trekantene:

$$\begin{aligned} \text{Areal} &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin A + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot DC \cdot \sin C \\ &= \frac{1}{2} \cdot 63.0 \cdot 36.1 \cdot \sin 75.0^\circ + \frac{1}{2} \cdot 60.8 \cdot 51.0 \cdot \sin 69.2^\circ \\ &= \underline{\underline{2548}} \end{aligned}$$

b)



Planen er å finne vinklene i trekant ABP. Deretter kan jeg finne diagonalen BD, og fortsette på samme måte som i oppgave a.

Jeg er usikker på om $\angle APB$ er større enn eller mindre enn 90° , og starter derfor med å finne denne vinkelen med cosinus-setningen:

$$AB^2 = AP^2 + BP^2 - 2 \cdot AP \cdot BP \cdot \cos \angle APB$$

$$\cos \angle APB = \frac{AP^2 + BP^2 - AB^2}{2 \cdot AP \cdot BP} = \frac{17.1^2 + 30.4^2 - 32.9^2}{2 \cdot 17.1 \cdot 30.4} = \underline{0.129}.$$

Da blir

$$\angle APB = \arccos(0.129) = \underline{82.6^\circ}.$$

Nå nøster jeg opp i henhold til planen:

$$\frac{\sin A}{BP} = \frac{\sin \angle APB}{AB} \Leftrightarrow \sin A = \frac{BP}{AB} \cdot \sin \angle APB = \frac{30.4}{32.9} \cdot \sin 82.6^\circ = \underline{0.916}.$$

$$\angle A = \arcsin(0.916) = \underline{66.3^\circ}.$$

$$\angle BPD = 180^\circ - \angle APB = 180^\circ - 82.6^\circ = \underline{97.4^\circ}.$$

$$PD = 32.6 - 17.1 = \underline{15.5}.$$

$$\begin{aligned} BD^2 &= PD^2 + BP^2 - 2 \cdot PD \cdot BP \cdot \cos \angle BPD \\ &= 15.5^2 + 30.4^2 - 2 \cdot 15.5 \cdot 30.4 \cdot \cos 97.4^\circ = \underline{1286} \end{aligned}$$

$$BD = \sqrt{1286} = \underline{35.9}.$$

Nå gjenstår det bare å finne $\angle C$ før vi kan beregne arealet:

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2 \cdot BC \cdot CD \cdot \cos C$$

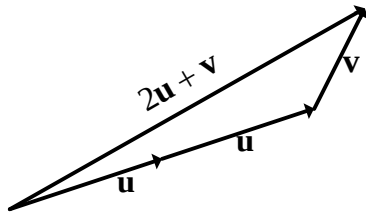
$$\cos C = \frac{BC^2 + CD^2 - BD^2}{2 \cdot BC \cdot CD} = \frac{23.2^2 + 27.5^2 - 35.9^2}{2 \cdot 23.2 \cdot 27.5} = \underline{0.0045}$$

$$\angle C = \arccos(0.0045) = \underline{89.7^\circ}$$

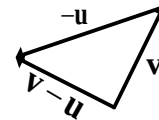
$$\begin{aligned} \text{Areal} &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin A + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot DC \cdot \sin C \\ &= \frac{1}{2} \cdot 32.9 \cdot 17.1 \cdot \sin 66.3^\circ + \frac{1}{2} \cdot 23.3 \cdot 27.5 \cdot \sin 89.7^\circ \\ &= \underline{577.9} \end{aligned}$$

Oppgave 10.3.1

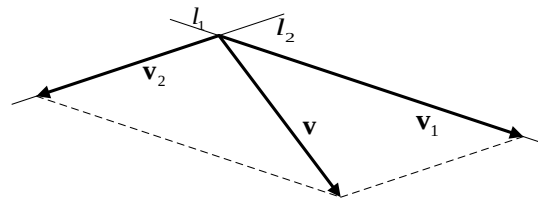
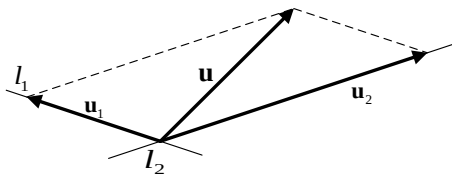
a)



b)



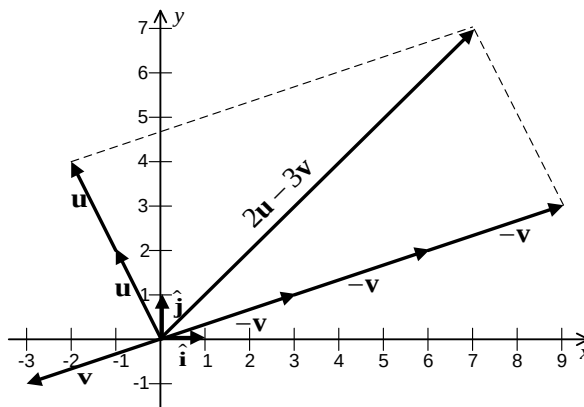
Oppgave 10.4.1



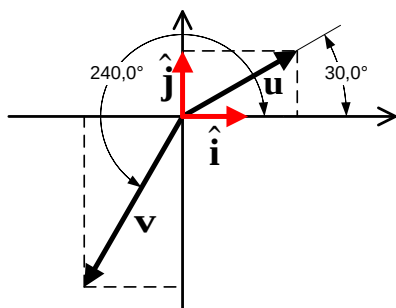
Oppgave 10.5.1

$$\text{a) } 2\mathbf{u} - 3\mathbf{v} = 2(-\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}) - 3(-3\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}) = -2\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} + 9\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} = \underline{\underline{7\hat{\mathbf{i}} + 7\hat{\mathbf{j}}}}.$$

b)



Oppgave 10.5.2



Av figuren til venstre ser vi at:

$$u_x = |u| \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} = \sqrt{3},$$

$$u_y = |u| \sin 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

$$v_x = |v| \cos 240^\circ = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2},$$

$$v_y = |v| \sin 240^\circ = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2} \sqrt{3}\right) = -\frac{3}{2} \sqrt{3}.$$

Da blir

$$\mathbf{u} = u_x \hat{\mathbf{i}} + u_y \hat{\mathbf{j}} = \sqrt{3} \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}},$$

$$\mathbf{v} = v_x \hat{\mathbf{i}} + v_y \hat{\mathbf{j}} = -\frac{3}{2} \hat{\mathbf{i}} - \frac{3}{2} \sqrt{3} \hat{\mathbf{j}}.$$

Dermed blir

$$\mathbf{u} - 2\mathbf{v} = (\sqrt{3} \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}) - 2\left(-\frac{3}{2} \hat{\mathbf{i}} - \frac{3}{2} \sqrt{3} \hat{\mathbf{j}}\right) = \sqrt{3} \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 3 \hat{\mathbf{i}} + 3\sqrt{3} \hat{\mathbf{j}} = \underline{\underline{(\sqrt{3} + 3) \hat{\mathbf{i}} + (1 + 3\sqrt{3}) \hat{\mathbf{j}}}}.$$

Oppgave 10.6.1

a) $\mathbf{u} = [2, 3] \Leftrightarrow |\mathbf{u}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \underline{\underline{\sqrt{13}}}.$

$$\mathbf{v} = [-1, -1] \Leftrightarrow |\mathbf{v}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}.$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = [2, 3] \cdot [-1, -1] = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) = -2 - 3 = \underline{\underline{-5}}.$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos \theta \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|} = \frac{-5}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{2}} \approx \underline{\underline{-0.9806}} \Leftrightarrow \theta \approx \underline{\underline{169^\circ}}.$$

b) $\mathbf{u} = [-1, 1, 3] \Leftrightarrow |\mathbf{u}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 3^2} = \underline{\underline{\sqrt{11}}}.$

$$\mathbf{v} = [-3, 2, 1] \Leftrightarrow |\mathbf{v}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 1^2} = \underline{\underline{\sqrt{14}}}.$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = [-1, 1, 3] \cdot [-3, 2, 1] = (-1) \cdot (-3) + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 3 + 2 + 3 = \underline{\underline{8}}.$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos \theta \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|} = \frac{8}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{14}} \approx \underline{\underline{0.6447}} \Leftrightarrow \theta \approx \underline{\underline{50^\circ}}.$$

Oppgave 10.6.2

a) $[2, 1] \cdot [-1, a] = 0 \Leftrightarrow -2 + a = 0 \Leftrightarrow a = \underline{\underline{2}}.$

b) $[a, 1] \cdot [-1, 2a^2] = 0 \Leftrightarrow -a + 2a^2 = 0 \Leftrightarrow a(-1 + 2a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$

c) $[a, -a, 1] \cdot [2a, 1, -1] = 0 \Leftrightarrow 2a^2 - a - 1 = 0$

$$a = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \begin{cases} \frac{1+3}{4} = 1 \\ \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Oppgave 10.6.3

a) Kaller vektoren $\mathbf{v} = [x, y]$. Da vet jeg:

$$|\mathbf{v}| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 5 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 25.$$

$$\mathbf{v} \text{ står vinkelrett på } [2, 1] \Leftrightarrow [x, y] \cdot [2, 1] = 0 \Leftrightarrow 2x + y = 0 \Leftrightarrow y = -2x.$$

Da blir

$$x^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 + (-2x)^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 + 4x^2 = 25 \Leftrightarrow 5x^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$$

Får to løsninger:

$$[x, y] = [\underline{\underline{\sqrt{5}}}, \underline{\underline{-2\sqrt{5}}}], \quad [x, y] = [\underline{\underline{-\sqrt{5}}}, \underline{\underline{2\sqrt{5}}}].$$

b) Kaller vektoren $\mathbf{v} = [x, y]$. Da vet jeg:

$$|\mathbf{v}| = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 16.$$

$$\mathbf{v} \text{ står vinkelrett på } [1, -1] \Leftrightarrow [x, y] \cdot [1, -1] = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow y = x.$$

Da blir

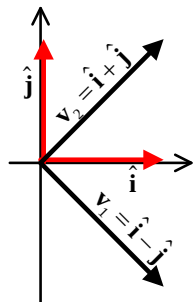
$$x^2 + y^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 + x^2 = 16 \Leftrightarrow 2x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}.$$

Får to løsninger:

$$[x, y] = [\underline{\underline{2\sqrt{2}}}, \underline{\underline{2\sqrt{2}}}], \quad [x, y] = [\underline{\underline{-2\sqrt{2}}}, \underline{\underline{-2\sqrt{2}}}].$$

Oppgave 10.7.1

a)



$$\mathbf{v}_1 = \hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} \text{ og } \mathbf{v}_2 = \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}.$$

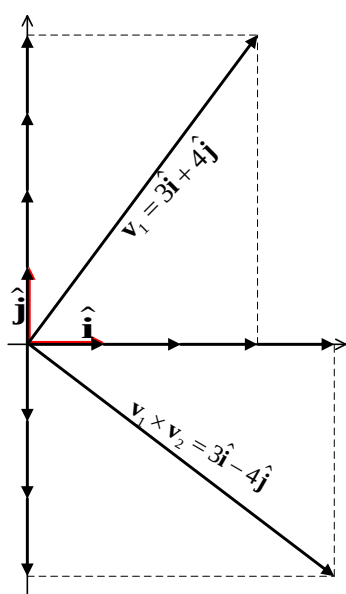
$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \hat{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \hat{\mathbf{k}} = \underline{\underline{2\hat{\mathbf{k}}}}.$$

$$\text{Vi ser at } |\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

$$\text{Da blir } |\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2| = |\mathbf{v}_1| \cdot |\mathbf{v}_2| \cdot \sin \theta = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin 90^\circ = 2 \cdot 1 = 2.$$

Høyrehåndsregelen gir at $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ må komme mot oss ut av papirplanet.

b)



$$\mathbf{v}_1 = 3\hat{i} + 4\hat{j} \text{ og } \mathbf{v}_2 = \hat{k}.$$

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \hat{k} = \underline{\underline{4\hat{i} - 3\hat{j}}}.$$

Vi ser at $|\mathbf{v}_1| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$ mens $|\mathbf{v}_2| = 1$.

Siden $\mathbf{v}_1$ ligger i xy -planet mens $\mathbf{v}_2$ står vinkelrett ut av dette planet, blir vinkel θ mellom $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ lik 90° .

Dermed blir $|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2| = |\mathbf{v}_1| \cdot |\mathbf{v}_2| \cdot \sin \theta = 5 \cdot 1 \cdot \sin 90^\circ = 5$.

Videre skal $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ stå vinkelrett på både $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ slik at høyrehåndsregelen er oppfylt. Da må $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ være den vektoren som er vist på figuren.

Oppgave 10.7.2

a) En vektor som står vinkelrett på både $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er

$$\begin{aligned} \mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \hat{k} \\ &= (-2 - 0)\hat{i} - (1 - 0)\hat{j} + (1 + 6)\hat{k} = \underline{\underline{-2\hat{i} - \hat{j} + 7\hat{k}}} \end{aligned}$$

En enhetsvektor i denne retningen er

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \frac{-2\hat{i} - \hat{j} + 7\hat{k}}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 7^2}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{54}}(-2\hat{i} - \hat{j} + 7\hat{k})}}$$

b) En vektor som står vinkelrett på både $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er

$$\begin{aligned} \mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \hat{k} \\ &= (4 - 3)\hat{i} - (0 + 1)\hat{j} + (0 + 2)\hat{k} = \underline{\underline{\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}}} \end{aligned}$$

En enhetsvektor i denne retningen er

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \frac{\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{6}}(\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})}}.$$

c) En vektor som står vinkelrett på både $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er

$$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \hat{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \hat{\mathbf{k}}$$

$$= (6 + 2)\hat{\mathbf{i}} - (3 - 0)\hat{\mathbf{j}} + (2 - 0)\hat{\mathbf{k}} = \underline{8\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}}$$

En enhetsvektor i denne retningen er

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \frac{8\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{8^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{77}}(8\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}})}}.$$