

Bjørn Davidsen

MATEMATIKK FOR

INGENIØRER

**Integrasjon med
anvendelser**

Innhold:

FORORD	3
1. INTEGRASJON	4
1.1. DE GRUNNLEGGENDE DEFINISJONENE	4
1.2. GRUNNLEGGENDE INTEGRASJONSREGLER	6
1.2.1. Generelle regler for bestemte integral	6
1.2.2. Generelle regler for ubestemte integral	7
1.2.3. Integrasjon av enkle funksjoner	7
1.3. SUBSTITUSJON	10
1.4. INTEGRASJON MED DELBRØKKOPPSPALTING	13
1.5. DELVIS INTEGRASJON	18
1.6. MER AVANSERTE INTEGRASJONSTEKNIKKER	20
1.6.1. Integrasjon av rasjonale funksjoner	20
1.6.2. Integralet kan løses av en likning	23
1.6.3. Trigonometriske integral	24
1.6.4. Trigonometrisk substitusjon	26
1.7. UEGENTLIGE INTEGRAL	27
1.7.1. Integral der en integrasjonsgrense går mot uendelig	28
1.7.2. Integral der integranden går mot uendelig	29
1.8. NUMERISK INTEGRASJON	30
1.8.1. Innledning	30
1.8.2. Rektangel-metoden	31
1.8.3. Trapez-metoden	32
1.8.4. Simpsons formel	32
2. BRUK AV INTEGRASJON	34
2.1. AREALBEREGNING	34
2.2. VOLUMBEREGNING	38
2.2.1. Skivemetoden	38
2.2.2. SYLINDERSKALL-METODEN	43
2.3. BEREGNING AV BUELENGDE	46
2.4. AREAL AV ROTASJONSFLATER	48
2.4.1. Rotasjon om x-aksen	49
2.4.2. Rotasjon om y-aksen	50
2.5. BEREGNING AV MASSESENTER	51
2.5.1. Definisjoner	51
2.5.2. Massesenter for rotasjons-symmetriske legemer	52
2.5.3. Massesenter for plane legemer	54
2.5.4. MASSESENTER FOR KRUMME LINJER	57
2.5.5. OPPDELING I DEL-LEGEMER	58
2.6. BEREGNING AV TREGHETSMOMENT	60
2.6.1. Definisjoner	60
2.6.2. Tregghetsmomentet for en linje i et plan	61
2.6.3. Tregghetsmoment for plant legeme	63
2.6.4. Tregghetsmoment for rotasjonssymmetrisk legeme	64
2.6.5. Sammensatte legemer	67
2.6.6. Steiners setning (parallellakse-setningen)	69

3. BLANDEDE OPPGAVER.....	71
3.1. OPPGAVER	71
3.2. LØSNINGER.....	77
4. TILLEGG	95
<i>Utleddning av Simpsons formel.</i>	95
<i>Bevis for Steiners setning.</i>	96
5. SMÅOPPGAVER I TEKSTEN	97
5.1. OPPGAVER	97
5.2. LØSNING PÅ SMÅOPPGAVER.....	106

Forord.

Kjære student!

Ved siden av derivasjon er *integrasjon* den matematiske disiplinen som du får mest nytte av i ditt ingeniørstudium. Du benytter integrasjon til å beregne areal, volumer, massesenter, treghetsmoment og mange andre størrelser som du trenger i fag som fysikk, mekanikk osv. Dessuten må du beherske integrasjon når du løser differensiallikninger.

Nå sies det at mens derivasjon er handverk, er integrasjon en kunst. Som alle andre kunstarter baserer integrasjon seg på et sett grunnleggende regler. Men deretter kreves det både fantasi og kreativitet for å lykkes når du skal bryne deg på vanskelige integral. I mange tilfeller fins det flere metoder som fører til målet. Da bør du ha litt erfaring for å velge den metoden som er raskest og sikrest.

Første del av dette heftet er viet integrasjonsteknikker. Selv om det i dag fins dataverktøy som kan løse integral, vil jeg sterkt anbefale at du driller integrasjonsteknikk for hand slik at du ser hvordan et integral skal løses når du senere treffer på et.

Andre del er viet noen av de mange anvendelsene. Her har jeg lagt hovedvekten på å vise hvordan vi går fram for å sette opp de integralene som må løses. Du må nemlig være svært forsiktig med å bruke formler fra formelsamlinger ukritisk. Den eneste sikre veien mot suksess er å *forstå* hvordan integralene settes opp.

Til slutt har jeg tatt med en samling større oppgaver. Mange av disse oppgavene inneholder flere problemer enn bare integrasjon. De kan derfor oppfattes som en oppsummering av hele funksjonslæra. Jeg vil derfor sterkt anbefale at du løser flest mulig av disse oppgavene.

Med hilsen

Bjørn Davidsen

1. Integrasjon.

1.1. De grunnleggende definisjonene.

La oss starte med følgende problem:

Gitt en kontinuerlig funksjon $y = f(x)$ der $f(x) \geq 0$ for $x \in [a, b]$.

Beregn arealet A som er avgrenset av grafen til f , x -aksen, og de to vertikale linjene $x = a$ og $x = b$.

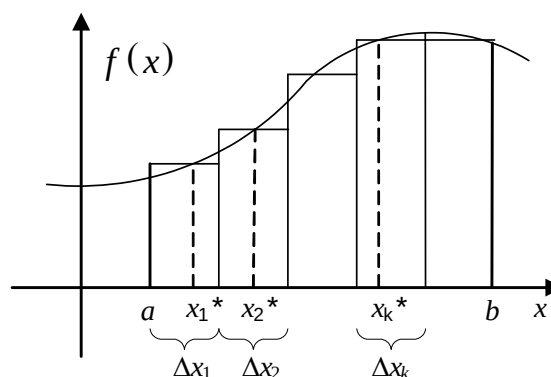
Vi kan finne en *tilnærmet* verdi for arealet A ved følgende prosedyre (se figuren til høyre):
Del opp x -aksen i n korte stykker med lengder

$$\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_k, \dots, \Delta x_n.$$

La x_k^* være en *vilkårlig* x -verdi i Δx_k .

Konstruer n rektangler der rektangel k har grunnlinje Δx_k og høyde $f(x_k^*)$.

Arealet av dette rektangelet er $f(x_k^*) \cdot \Delta x_k$.



Summen av arealene av alle de n rektanglene er da tilnærmet lik arealet A :

$$A \approx \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \cdot \Delta x_k.$$

Det er innlysende at jo smalere rektanglene er, jo bedre er tilnærmelsen. Det er nå rimelig å anta at dersom vi lar $n \rightarrow \infty$ samtidig som *alle* strekningene Δx_k går mot null, vil summen ovenfor konvergere mot A . Mer inngående undersøkelser (som er alt for omfattende til at vi skal gjennomføre dem) viser at vår antakelse er korrekt. Denne grensen for summen kalles **integralet av f fra a til b** , og skrives

$$\int_a^b f(x) dx.$$

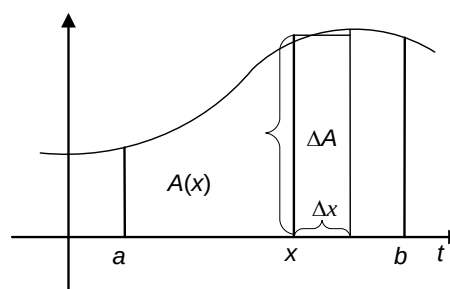
Vi har altså at

Integralet av f fra a til b er

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \cdot \Delta x_k.$$

Foreløpig har vi bare *definert* hva vi mener med et integral. Men hvordan *beregner* vi et integral?

Nok en gang skal vi vende tilbake til arealet som vi definerte i innledningen. Men nå skal vi la t være fri variabel, og vil skal la $A(x)$ være arealet som avgrenses av t -aksen, grafen til f , og de to rette linjene $t = a$ og $t = x$ der $x > a$. Se figuren til høyre.



Vi lar nå x øke med en *liten* størrelse Δx . Da vil arealet øke med en *liten* størrelse

$$\Delta A \approx f(x) \cdot \Delta x \Leftrightarrow \frac{\Delta A}{\Delta x} \approx f(x).$$

Hvis vi nå lar $\Delta x \rightarrow 0$, skjer to ting. Først benytter vi definisjonen av derivert til å sette at

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta x} = \frac{dA(x)}{dx}.$$

Derneft er det rimelig å anta at når $\Delta x \rightarrow 0$, kan $\approx$ erstattes av $=$. Også her viser en nærmere undersøkelse at denne antakelsen er korrekt. Følgelig har vi at

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta x} = \frac{dA(x)}{dx} = f(x).$$

Vi har altså vist den fundamentale sammenhengen:

$$\text{Når } A(x) = \int_a^x f(t)dt, \text{ er } \frac{dA(x)}{dx} = f(x).$$

Med andre ord: for å finne arealet, trenger vi "bare" å finne en eller annen funksjon $A(x)$ som er slik at

$$\frac{dA(x)}{dx} = f(x).$$

Men det er en liten komplikasjon: Du kan legge til en vilkårlig konstant til $A(x)$, og få den samme funksjonen f fordi konstanten faller bort ved derivasjonen. Dette problemet løses ved å innføre en *vilkårlig* funksjon $F(x)$ som er slik at

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Da er

$$A(x) = F(x) + C.$$

Men av figuren er det opplagt at når $x = a$ blir arealet lik null, slik at

$$A(a) = 0 \Leftrightarrow F(a) + C = 0 \Leftrightarrow C = -F(a).$$

Dermed har vi at

$$A(x) = F(x) - F(a).$$

Nå lar vi øvre grense være b istedenfor x , og gjeninnfører x som fri variabel. Da har vi at:

Gitt en funksjon f der $f(x) \geq 0$ når $x \in [a, b]$.

Det arealet som avgrenses av grafen til f , x -aksen, og de vertikale linjene $x = a$ og $x = b$, er

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

der F er en vilkårlig funksjon som er slik at

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Nå viser det seg at vi har bruk for slike beregninger til mye annet enn den arealberegningen som vi innledet med. Vi definerer derfor:

Gitt en funksjon $y = f(x)$.

Det **ubestemte integralet** av f er

$$\int f(x) dx = F(x)$$

der $F(x)$ er en vilkårlig funksjon som er slik at

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Det **bestemte integralet** av f er

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Eksempel 1.1.1: Bestem arealet som avgrenses av x -aksen, grafen til $y = f(x) = x$, og linjene $x = 2$ og $x = 4$.

Løsning: Vi må først finne en funksjon $F(x)$ som er slik at

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) = x.$$

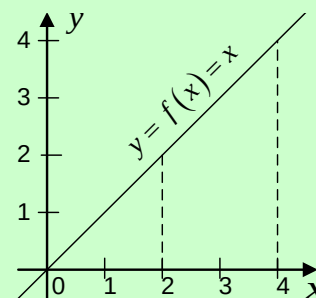
Vi ser at enhver funksjon av typen

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$$

der C er en konstant tilfredsstiller dette kravet.

Da er arealet bestemt ved

$$A = \int_2^4 x dx = F(4) - F(2) = \left(\frac{1}{2} \cdot 4^2 + C\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot 2^2 + C\right) = 8 - 2 = \underline{\underline{6}}.$$



1.2. Grunnleggende integrasjonsregler.

På grunnlag av definisjonene ovenfor kan vi sette opp mange integrasjonsregler. La oss ta dem i systematisk rekkefølge.

1.2.1. Generelle regler for bestemte integral.

Av definisjonen på bestemt integral som grense for en sum virker reglene nedenfor ganske innlysende:

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx.$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \text{ når } a < c < b.$$

1.2.2. Generelle regler for ubestemte integral.

Den teknikken vi benytter for å beregne et ubestemt integral, kan brukes til å vise at reglene nedenfor gjelder:

La c være en konstant, mens f og g er to funksjoner. Da gjelder:

$$\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx$$
$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

1.2.3. Integrasjon av enkle funksjoner.

Siden $\int f(x) dx = F(x)$ der $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$, kan vi bruke kjente derivasjonsregler til å sette opp disse integrasjonsreglene:

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \text{ når } n \neq -1.$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$$

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C.$$

Den første av disse reglene gjelder for *alle* verdier av n unntatt for $n = -1$. Eksempel b) og c) nedenfor viser to viktige anvendelser av denne regelen.

Eksempel 1.2.1: Beregn integralene nedenfor:

a) $\int_0^3 (x^2 - 2x + 2) dx$

b) $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$

c) $\int_1^4 \sqrt{x} dx$

d) $\int_1^2 \frac{(x+1)^2}{x} dx$

Løsning:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \int_0^3 (x^2 - 2x + 2) dx &= \int_0^3 x^2 dx - 2 \int_0^3 x dx + 2 \int_0^3 1 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^3 - 2 \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^3 + 2 \left[x \right]_0^3 \\ &= \frac{1}{3} (3^3 - 0^3) - 2 \cdot \frac{1}{2} (3^2 - 0^2) + 2(3 - 0) = 9 - 9 + 6 = \underline{\underline{6}} \\ \text{b)} \quad \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx &= \int_1^2 x^{-2} dx = \left[\frac{1}{-2+1} x^{-2+1} \right]_1^2 = \left[\frac{1}{-1} x^{-1} \right]_1^2 = -1(2^{-1} - 1^{-1}) = -1\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \\ \text{c)} \quad \int_1^4 \sqrt{x} dx &= \int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} \right]_1^4 = \frac{2}{3} \left(4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{2}{3} \left((4^3)^{\frac{1}{2}} - (1^3)^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{2}{3} (8 - 1) = \underline{\underline{\frac{14}{3}}} \\ \text{d)} \quad \int_1^2 \frac{(x+1)^2}{x} dx &= \int_1^2 \frac{x^2 + 2x + 1}{x} dx = \int_1^2 \left(\frac{x^2}{x} + \frac{2x}{x} + \frac{1}{x} \right) dx = \int_1^2 x dx + \int_1^2 2 dx + \int_1^2 \frac{1}{x} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^2 + [2x]_1^2 + [\ln x]_1^2 = \frac{1}{2} (2^2 - 1^2) + 2(2 - 1) + (\ln 2 - \ln 1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3 + 2 \cdot 1 + \ln 2 - 0 = \underline{\underline{\frac{7}{2} + \ln 2}} \end{aligned}$$

Oppgave 1.2.1.

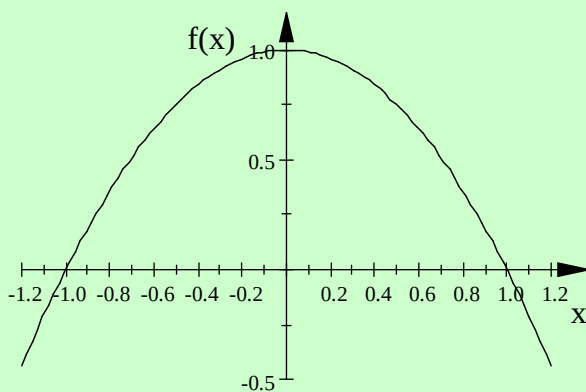
Vi avslutter denne innledningen der vi startet: Vi beregner areal.

Eksempel 1.2.2: Beregn arealet som avgrenses av grafen til f og x -aksen når:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad f(x) &= 1 - x^2. \\ \text{b)} \quad f(x) &= \begin{cases} x & \text{når } x < 2 \\ 3 - \frac{1}{2}x & \text{når } x \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Løsning:

a) Vi starter med å tegne grafen til f :



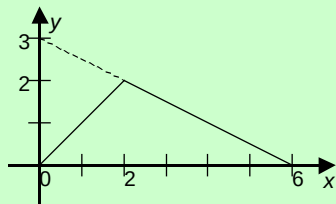
Vi må finne skjæringspunktene med x -aksen:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \underline{x = -1 \vee x = 1} \end{aligned}$$

noe som også stemmer med grafen. Da blir arealet:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \int_{-1}^1 1 dx - \int_{-1}^1 x^2 dx \\ &= [x]_{-1}^1 - \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-1}^1 \\ &= 1 - (-1) - \frac{1}{3} (1^3 - (-1)^3) \\ &= 2 - \frac{1}{3} \cdot 2 = \underline{\underline{\frac{4}{3}}} \end{aligned}$$

b) Vi starter med å tegne grafen til f :



Grafen skjærer x -aksen når $x = 0$. Den skjærer også x -aksen når

$$3 - \frac{1}{2}x = 0 \Leftrightarrow x = 6$$

noe som stemmer med grafen.

Videre har vi et knekkpunkt når $x = 2$. Da blir arealet:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^6 f(x) dx = \int_0^2 x dx + \int_2^6 \left(3 - \frac{1}{2}x\right) dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2 + \left[3x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}x^2\right]_2^6 \\ &= \frac{1}{2}(2^2 - 0^2) + 3(6 - 2) - \frac{1}{4}(6^2 - 2^2) = \frac{1}{2} \cdot 4 + 3 \cdot 4 - \frac{1}{4} \cdot 32 = \underline{\underline{6}} \end{aligned}$$

Oppgave 1.2.2.

Du kommer ikke langt med bare de reglene vi har sett på hittil. I tillegg må du kunne noen viktige **integrasjonsteknikker**:

Substitusjon er et knippe med beslektede teknikker, der hovedpoenget er at integrasjonsvariabelen x byttes ut med en annen variabel eller funksjon som gir et integral som er lettere å hanske med.

Delbrøkoppspalting er en standard teknikk når vi skal integrere en brøkfunksjon.

Delvis integrasjon kan benyttes når integranden er et produkt av to faktorer. Hvis vi er heldige og dyktige, kan vi da skaffe oss et annet integral som er enklere enn det opprinnelige.

Det fins en mengde varianter av disse teknikkene. Noen ganger kan flere teknikker føre til målet. Det er imidlertid mer vanlig at du må løse problemene i flere trinn, der du benytter flere teknikker etter tur for å omforme kompliserte integral til stadig enklere integral som du til slutt klarer å løse.

I dag har vi dataverktøy til disposisjon som kan beregne integral. Behovet for å kunne beregne kompliserte integral er derfor mindre enn før. Men det er likevel nyttig å beherske teknikken. Du bør derfor se på et lite avsnitt om mer avanserte integrasjonsteknikker.

Noen ganger kommer du bort i problemer der en eller begge grensene går mot uendelig, eller problemer der integranden selv går mot uendelig. Slike problemer kalles gjerne uegentlige integral, og du bør vite hvordan du skal gå fram for å løse dem.

I de fleste tilfellene fins det ingen standard metoder som med sikkerhet fører til målet. Du må forene erfaring og kreativitet for å løse integral som ikke lar seg løse direkte. Noen har sagt at mens derivasjon er ren teknikk, så er integrasjon kunst. Når du behersker mest mulig av denne kunsten, kan du se på et lite utvalg anvendelser av integrasjon.

Selv om du blir aldri så flink til å integrere, må du nok innse at det fins noen integral som ikke lar seg løse eksakt. Da kan du få tilnærmede løsninger av bestemte integral ved å benytte numerisk integrasjon. Slike metoder må også benyttes dersom du ikke kjenner integranden som en *funksjon*, men bare kjenner punkter på funksjonsgraf.

1.3. Substitusjon.

I utgangspunktet er dette kjerneregelen anvendt på integraler. Hovedpoenget er at vi ser etter en kerne $u(x)$ som er slik at integranden blir en funksjon av u etter at dx er erstattet med du .

Denne erstatningen gjøres vanligvis ved å sette

$$u'(x) = \frac{du}{dx} \Leftrightarrow dx = \frac{1}{u'(x)} du.$$

Hvis vi nå får et uttrykk som kan integreres, er vi (nesten) i mål.

Eksempel 1.3.1: Beregn integralene nedenfor:

a) $\int 2 \sin(2x) dx$

b) $\int x \cdot e^{-x^2} dx$

c) $\int \frac{x}{x^2 - 1} dx$

d) $\int x \sqrt{x^2 + 1} dx$

e) $\int \sin^2 x \cdot \cos x dx$

f) $\int \frac{1}{x^2 + 4} dx$

Løsning:

a) Vi ser at når vi deriverer $2x$ får vi 2. Vi prøver derfor kjernen

$$u(x) = 2x \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2} du.$$

Integralet kan nå skrives

$$\int 2 \sin(2x) dx = \int \cancel{2} \sin u \cdot \frac{1}{\cancel{2}} du = -\cos u + C = \underline{\underline{-\cos(2x) + C}}.$$

b) Vi ser at når vi deriverer $-x^2$ får vi $-2x$, og x -en har vi bruk for. Vi prøver derfor kjernen

$$u(x) = -x^2 \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -2x \Leftrightarrow dx = \frac{1}{-2x} du.$$

Integralet kan nå skrives

$$\int x \cdot e^{-x^2} dx = \int \cancel{x} \cdot e^u \left(-\frac{1}{\cancel{2x}} du \right) = -\frac{1}{2} \int e^u du = -\frac{1}{2} \cdot e^u + C = \underline{\underline{-\frac{1}{2} e^{-x^2} + C}}.$$

c) Vi ser at når vi deriverer $x^2 - 1$ får vi $2x$, og x -en har vi bruk for. Vi prøver derfor kjernen

$$u(x) = x^2 - 1 \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2x} du.$$

Integralet kan nå skrives

$$\int \frac{x}{x^2 - 1} dx = \int \frac{\cancel{x}}{u} \cdot \frac{1}{\cancel{2x}} du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \cdot \ln|u| + C = \underline{\underline{\frac{1}{2} \ln|x^2 - 1| + C}}.$$

- d) Vi ser at når vi deriverer $x^2 + 1$ får vi $2x$, og x -en har vi bruk for. Vi prøver derfor kjernen

$$u(x) = x^2 + 1 \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2x} du.$$

Integralet kan nå skrives

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x^2 + 1} dx &= \int \cancel{x} \cdot \sqrt{u} \cdot \frac{1}{2\cancel{x}} du = \frac{1}{2} \int \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} du \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} u^{\frac{1}{2} + 1} + C = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

- e) Her merker vi oss at når vi deriverer $\sin x$ får vi $\cos x$ som inngår i integranden. Vi prøver derfor kjernen

$$u(x) = \sin x \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = \cos x \Leftrightarrow dx = \frac{1}{\cos x} du.$$

Integralet blir nå

$$\int \sin^2 x \cdot \cos x dx = \int u^2 \cdot \cancel{\cos x} \cdot \frac{1}{\cancel{\cos x}} du = \frac{1}{3} u^3 + C = \frac{1}{3} \sin^3 x + C.$$

- f) Dette minner litt om integrasjonsformelen som gir $\arctan x$:

$$\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctan(x) + C.$$

Men for å kunne bruke denne formelen, må vi skaffe oss et 1-tall som konstantledd i nevneren. Det gjør vi slik:

$$\int \frac{1}{x^2 + 4} dx = \int \frac{1}{4\left(\frac{1}{4}x^2 + 1\right)} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} dx.$$

Nå prøver vi

$$u(x) = \frac{x}{2} \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow dx = 2du.$$

Integralet blir nå

$$\int \frac{1}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{1 + u^2} \cdot 2 du = \frac{1}{2} \arctan u + C = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

Du kommer ofte bort i integraler av samme type som i Eksempel 1.3.1a) ovenfor. Det kan derfor være nyttig å løse dem en gang for alle. Da får vi reglene nedenfor, som du sikkert klarer å bevise selv ved å benytte samme framgangsmåte som i Eksempel 1.3.1a):

Når a er en konstant, blir

$$\int \sin(a \cdot x) dx = -\frac{1}{a} \cos(a \cdot x) + C$$

$$\int \cos(a \cdot x) dx = \frac{1}{a} \sin(a \cdot x) + C$$

$$\int e^{a \cdot x} dx = \frac{1}{a} e^{a \cdot x} + C$$

Oppgave 1.3.1.

Da vi løste integralene i Eksempel 1.3.1, erstattet vi kjernen u med den opprinnelige variabelen x i sluttsvaret. Men når vi skal beregne *bestemte* integral, er dette ikke nødvendig. Det er ofte enklere å endre *grensene* for integrasjonen samtidig som vi innfører den nye integrasjonsvariabelen u . Eksempelene nedenfor viser hvordan vi går fram.

Eksempel 1.3.2: Beregn disse bestemte integralene:

a) $\int_0^2 x\sqrt{x^2+1} dx$ (se Eksempel 1.3.1d).

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos x dx$ (se Eksempel 1.3.1e).

Løsning:

a) Vi løste integralet ved å innføre kjernen

$$u(x) = x^2 + 1,$$

og fant at

$$\int x\sqrt{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{u} du = \frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} + C.$$

Istedenfor å gjeninnføre x i dette svaret før vi setter inn grensene, kan vi benytte at når $x = 0$ er $u = 0^2 + 1 = 1$, og når $x = 2$ er $u = 2^2 + 1 = 5$. Da blir

$$\int_0^2 x\sqrt{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_1^5 \sqrt{u} du = \frac{1}{3} \left[u^{\frac{3}{2}} \right]_1^5 = \frac{1}{3} \left(5^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{1}{3} (5\sqrt{5} - 1).$$

Dette er lettere enn å benytte at

$$\int_0^2 x\sqrt{x^2+1} dx = \left[\frac{1}{3} (x^2+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 = \frac{1}{3} \left((2^2+1)^{\frac{3}{2}} - (0^2+1)^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{1}{3} (5^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}) = \frac{1}{3} (5\sqrt{5} - 1).$$

b) Vi løste integralet ved å innføre kjernen

$$u(x) = \sin x,$$

og fant at

$$\int \sin^2 x \cdot \cos x dx = \int u^2 du = \frac{1}{3} u^3 + C.$$

Istedenfor å gjeninnføre x i dette svaret før vi setter inn grensene, kan vi benytte at når $x = 0$ er $u = \sin 0 = 0$, og når $x = \frac{\pi}{2}$ er $u = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Da blir

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos x dx = \int_0^1 u^2 du = \left[\frac{1}{3} u^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} (1^3 - 0^3) = \frac{1}{3}.$$

Dette er lettere enn å benytte at

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos x dx = \left[\frac{1}{3} \sin^3 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3} \left(\sin^3\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin^3(0) \right) = \frac{1}{3} (1^3 - 0^3) = \frac{1}{3}.$$

Oppgave 1.3.2.

I integrasjonsformelen for $\int \frac{1}{x} dx$ (og i eksempel 1.3.1c ovenfor) har vi satt inn et absoluttverdigtegn i løsningen:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$$

I neste avsnitt om integrasjon med delbrøkoppspalting får vi bruk for en mer generell formel:

$$\int \frac{1}{x-a} dx = \ln|x-a| + C.$$

Vi skal nå utlede denne formelen og forklare hvor absoluttverditegnet kommer fra.

Anta først at $x-a > 0$. Da substituerer vi

$$u = x-a \Rightarrow dx = du$$

slik at integralet blir

$$\int \frac{1}{x-a} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln u + C = \ln(x-a) + C.$$

Så antar vi at $x-a < 0$. Vi substituerer

$$u(x) = -(x-a)$$

(merk at u blir positiv). Da blir

$$dx = -du$$

slik at

$$\int \frac{1}{x-a} dx = \int \frac{1}{-(x-a)} (-dx) = \int \frac{1}{u} du = \ln u + C = \ln(-(x-a)) + C.$$

Men $-(x-a)$ blir positiv når $x-a < 0$. Samler vi resultatene får vi at

$$\int \frac{1}{x-a} dx = \ln|x-a| + C.$$

1.4. Integrasjon med delbrøkoppspalting.

Vi skal nå benytte den setningen vi utledet nettopp:

$$\int \frac{1}{x-a} dx = \ln|x-a| + C.$$

Du behersker sikkert så pass mye brøkgregning at du ser at

$$\frac{1}{x-1} - \frac{2}{2x+1} = \frac{1 \cdot (2x+1) - 2 \cdot (x-1)}{(x-1)(2x+1)} = \frac{2x+1-2x+2}{2x^2+x-2x-1} = \frac{3}{2x^2-x-1}.$$

Dermed har du alt du trenger til å løse integralet i eksemplet nedenfor:

Eksempel 1.4.1: Beregn integralet

$$\int \frac{3}{2x^2-x-1} dx.$$

Løsning: Du vet allerede at

$$\frac{3}{2x^2-x-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{2x+1}.$$

Da blir

$$\begin{aligned}\int \frac{3}{2x^2 - x - 1} dx &= \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{2}{2x+1} dx = \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{1}{x+\frac{1}{2}} dx \\ &= \ln|x-1| - \ln|x+\frac{1}{2}| + C = \ln \left| \frac{x-1}{x+\frac{1}{2}} \right| + C\end{aligned}$$

I eksemplet ovenfor var vi heldige fordi den opprinnelige integranden allerede var spaltet opp i *delbrøker*. Vanligvis er vi ikke så heldige. Vi må da ty til *delbrøkoppspalting*, som er gjennomgått i heftet om "forkunnskaper".

Eksempel 1.4.2: Beregn integralet

$$\int \frac{2}{x^2 - 1} dx.$$

Løsning: Vi merker oss først at substitusjon ikke fører fram fordi den naturlige kjernen

$$u(x) = x^2 - 1$$

gir $du = 2x dx$ som ikke passer inn i integralet. Vi benytter derfor at

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1),$$

og spalter integranden i delbrøker slik:

$$\begin{aligned}\frac{2}{x^2 - 1} &= \frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1) + B(x+1)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{Ax - A + Bx + B}{(x+1)(x-1)} = \frac{(A+B)x + (-A+B)}{(x+1)(x-1)}\end{aligned}$$

Men dette er egentlig en *identitet* som skal være oppfylt for *alle* verdier av x . Det er kun mulig dersom teller-polynomene er *identiske*. Dette gir likningene

$$A + B = 0$$

$$-A + B = 2$$

Dette likningssystemet løses enkelt ved å legge sammen likningene. Da får vi

$$2B = 2 \Leftrightarrow B = 1.$$

Fra den øverste likningen får vi nå

$$A + B = 0 \Leftrightarrow A = -B = -1$$

slik at

$$\frac{2}{x^2 - 1} = \frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{-1}{x+1} + \frac{1}{x-1}.$$

Nå er vi klare til å integrere:

$$\int \frac{2}{x^2 - 1} dx = \int \frac{-1}{x+1} dx + \int \frac{1}{x-1} dx = -\ln|x+1| + \ln|x-1| + C = \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C.$$

I avsnittet om delbrøkoppspalting i heftet om "forkunnskaper" er det demonstrert en "snarvei" som kan benyttes når nevneren kan faktoriseres i *forskjellige* reelle førstegradsfaktorer, og som kunne spart oss for litt arbeid i eksemplet ovenfor. Denne snarveien kan dessverre ikke hjelpe oss i eksemplene nedenfor.

Oppgave 1.4.1.

Hvis nevneren inneholder en *gjentatt* førstegradsfaktor, kan delbrøkoppspaltingen foretas på flere måter. Jeg vil imidlertid anbefale den metoden som er vist i neste eksempel:

Eksempel 1.4.3: Beregn integralet

$$\int \frac{x^2 + 2}{x(x-1)^2} dx.$$

Løsning: Her gjentas faktoren $(x-1)$ to ganger. Det gunstigste er da å benytte delbrøkoppspaltingen nedenfor:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 2}{x(x-1)^2} &\equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} \equiv \frac{A(x-1)^2 + Bx + Cx(x-1)}{x(x-1)^2} \\ &\equiv \frac{Ax^2 - 2Ax + A + Bx + Cx^2 - Cx}{x(x-1)^2} \equiv \frac{(A+C)x^2 + (-2A+B-C)x + A}{x(x-1)^2} \end{aligned}$$

Siden dette er en *identitet*, må vi ha

$$\begin{aligned} A + C &= 1 \\ -2A + B - C &= 0 \\ A &= 2 \end{aligned}$$

Her nøster vi raskt opp løsningen, og finner

$$A = 2, \quad C = 1 - A = -1, \quad B = C + 2A = 3.$$

Dermed blir

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 2}{x(x-1)^2} dx &= \int \frac{2}{x} dx + \int \frac{3}{(x-1)^2} dx - \int \frac{1}{x-1} dx \\ &= 2 \ln|x| - \frac{3}{x-1} - \ln|x-1| + C = \ln \frac{x^2}{|x-1|} - \frac{3}{x-1} + C \end{aligned}$$

Integralet i midten løses med substitusjonen

$$u = x-1 \Leftrightarrow dx = du:$$

$$\int \frac{3}{(x-1)^2} dx = \int \frac{3}{u^2} du = 3 \int u^{-2} du = \frac{3}{-2+1} u^{-2+1} + C = -3u^{-1} + C = \underline{\underline{\frac{-3}{x-1} + C}}.$$

Når nevneren inneholder andregradsfaktorer som ikke kan faktoriseres videre til reelle førstegradsfaktorer, lar vi telleren i delbrøken være et førstegradspolynom:

Eksempel 1.4.4: Beregn integralet

$$\int \frac{2x-1}{x(x^2+1)} dx$$

Løsning: Faktoren $x^2 + 1$ kan ikke faktoriseres videre til reelle førstegradsfaktorer. Vi benytter derfor en delbrøk der telleren er et førstegradspolynom i x :

$$\frac{2x-1}{x(x^2+1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \equiv \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)x}{x(x^2+1)} \equiv \frac{(A+B)x^2 + Cx + A}{x(x^2+1)}$$

Siden dette er en *identitet*, må vi ha

$$A + B = 0.$$

$$C = 2.$$

$$A = -1.$$

A og C er allerede kjent. Deretter blir $B = -A = 1$. Delbrøkoppspaltingen blir da

$$\frac{2x-1}{x(x^2+1)} = \frac{-1}{x} + \frac{x+2}{x^2+1}$$

som gir

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-1}{x(x^2+1)} dx &= \int \frac{-1}{x} dx + \int \frac{x}{x^2+1} dx + \int \frac{2}{x^2+1} dx \\ &= -\ln|x| + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 2 \arctan(x) + C \end{aligned}$$

Integralet i midten løses med substitusjonen

$$u = x^2 + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow dx = \frac{du}{2x}:$$

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \int \frac{\cancel{x}}{u} \left(\frac{du}{2\cancel{x}} \right) = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln|u| + C = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$$

der absoluttverditegnene kan sløyfes fordi $x^2 + 1$ alltid er positiv.

Vi tar et større eksempel til slutt:

Eksempel 1.4.5: Beregn integralet

$$\int \frac{2x}{x^4-1} dx$$

Løsning: Vi faktorerer først nevneren i reelle faktorer:

$$x^4 - 1 = (x^2)^2 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1).$$

Vi prøver derfor delbrøkoppspaltingen nedenfor:

$$\frac{2x}{x^4-1} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x-1}.$$

Så setter vi høyre side av likhetstegnet på fellesnevner. Vi får:

$$\begin{aligned}\frac{2x}{x^4-1} &= \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x-1} = \frac{(Ax+B)(x^2-1) + C(x^2+1)(x-1) + D(x^2+1)(x+1)}{(x^2+1)(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{Ax^3 - Ax + Bx^2 - B + Cx^3 - Cx^2 + Cx - C + Dx^3 + Dx^2 + Dx + D}{(x^2+1)(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{(A+C+D)x^3 + (B-C+D)x^2 + (-A+C+D)x + (-B-C+D)}{(x^2+1)(x+1)(x-1)}\end{aligned}$$

For at dette skal være en identitet, må vi kreve at

$$A + C + D = 0$$

$$B - C + D = 0$$

$$-A + C + D = 2$$

$$-B - C + D = 0$$

Slike likningssett løses vanligvis lettest med matrisemetoder, som er omtalt i et annet hefte. Men her ser vi at dersom vi legger samme alle likningene, får vi

$$4D = 2 \Leftrightarrow D = \frac{1}{2}.$$

Legger vi sammen 2. og 4. likning, får vi

$$-2C + 2D = 0 \Leftrightarrow C = D = \frac{1}{2}.$$

Da gir 1. likning

$$A = -C - D = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

mens 2. likning gir

$$B = C - D = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Hele delbrøkkoppspaltingen blir da

$$\frac{2x}{x^4-1} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x-1} = \frac{-x}{x^2+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1}.$$

Nå er vi klare til å integrere:

$$\begin{aligned}\int \frac{2x}{x^4-1} dx &= \int \frac{-x}{x^2+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx \\ &= -\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln|x-1| + C \\ &= -\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \ln|x^2-1| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2-1}{x^2+1} \right| + C\end{aligned}$$

Det første integralet beregnet vi med substitusjonen

$$u(x) = x^2 + 1 \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2x} du.$$

Da blir

$$\int \frac{-x}{x^2+1} dx = - \int \frac{\cancel{x}}{u} \cdot \frac{1}{2\cancel{x}} du = -\frac{1}{2} \ln u + C = -\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C.$$

Oppgave 1.4.2.

1.5. Delvis integrasjon.

Dette er en integrasjonsteknikk som kan benyttes når integranden er et produkt av to faktorer, der den ene faktoren kan oppfattes som den deriverte av en kjent funksjon. Da gjelder:

$$\int u'(x) \cdot v(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) dx$$

Utleddning: Vi tar utgangspunkt i den kjente derivasjonsformelen for et produkt:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \Leftrightarrow u' \cdot v = (u \cdot v)' - u \cdot v'$$

der det er underforstått at u og v er funksjoner av x . Denne derivasjonsregelen integreres, samtidig som vi benytter at

$$\int (u \cdot v)' dx = u \cdot v.$$

Da får vi regelen i ramma ovenfor.

Når vi ønsker å bruke denne regelen, ser vi om integranden inneholder en faktor som er den deriverte av en kjent funksjon $u(x)$, samtidig som produktet $u(x) \cdot v'(x)$ lar seg integrere. Eksempelene nedenfor viser framgangsmåten.

Eksempel 1.5.1: Beregn disse integralene:

a) $\int x \cdot e^x dx$

b) $\int x \cdot \sin x dx$

c) $\int \ln x dx$

Løsning:

a) Her lønner det seg å velge $u(x)$ og $v(x)$ slik:

$$u'(x) = e^x \Leftarrow u(x) = \int e^x dx = e^x$$

$$v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$$

Da får vi:

$$\int \overset{v}{x} \cdot \overset{u'}{e^x} dx = \overset{v}{x} \cdot \overset{u}{e^x} - \int \overset{v'}{1} \cdot \overset{u}{e^x} dx = \underline{\underline{x \cdot e^x - e^x + C}}.$$

b) Her lønner det seg å velge

$$u'(x) = \sin x \Leftarrow u(x) = \int \sin x = -\cos x$$

$$v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$$

Da får vi:

$$\begin{aligned} \int \overset{v}{x} \cdot \overset{u'}{\sin x} dx &= \overset{v}{x} \cdot \overset{u}{(-\cos x)} - \int \overset{v'}{1} \cdot \overset{u}{(-\cos x)} dx = -x \cdot \cos x + \int \cos x dx \\ &= \underline{\underline{-x \cdot \cos x + \sin x + C}} \end{aligned}$$

c) Her er integranden tilsynelatende ikke noe produkt. Men hvis vi oppfatter integralet slik:

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx$$

får vi et produkt. Da velger vi:

$$u'(x) = 1 \quad \Leftarrow \quad u(x) = \int 1 \, dx = x$$

$$v(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad v'(x) = \frac{1}{x}$$

Da får vi:

$$\int 1 \cdot \ln x \, dx = \overset{u}{x} \cdot \overset{v}{\ln x} - \int \overset{u}{x} \cdot \overset{v'}{\frac{1}{x}} \, dx = x \cdot \ln x - \int 1 \, dx = \underline{\underline{x \cdot \ln x - x + C}}.$$

Noen ganger må vi bruke teknikken flere ganger etter hverandre slik eksemplet nedenfor viser. Eksemplet viser også at når vi har et bestemt integral, løser vi først det ubestemte integralet fullt ut før vi setter inn grensene.

Eksempel 1.5.2: Beregn integralet

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \, dx.$$

Løsning: Her lønner det seg å velge

$$u'(x) = \cos x \quad \Leftarrow \quad u(x) = \int \cos x \, dx = \sin x.$$

$$v(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad v'(x) = 2x.$$

Da får vi:

$$\int x^2 \cdot \overset{u'}{\cos x} \, dx = \overset{v}{x^2} \cdot \overset{u}{\sin x} - \int \overset{v'}{2x} \cdot \overset{u}{\sin x} \, dx = x^2 \cdot \sin x - 2 \int x \cdot \sin x \, dx.$$

Det siste integralet løses også med delvis integrasjon. Dette er allerede gjort i del b) i forrige eksempel. Vi setter inn resultatet derfra, og får

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos x \, dx &= x^2 \sin x - 2(-x \cdot \cos x + \sin x + C) \\ &= \underline{\underline{x^2 \sin x + 2x \cdot \cos x - 2 \sin x - 2C}} \end{aligned}$$

Så setter vi inn grensene. Da kan vi se bort fra konstanten (mer presist: Når vi setter inn grensene, vil vi legge til og trekke fra konstanten). Resultatet blir:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \, dx &= \left[x^2 \sin x + 2x \cdot \cos x - 2 \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0 \cdot \sin(0) - 2 \cdot 0 \cdot \cos(0) - 2 \sin(0) \\ &= \frac{\pi^2}{4} \cdot 1 + \pi \cdot 0 - 2 \cdot 1 - 0 - 0 - 0 = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{4} - 2}} \end{aligned}$$

Oppgave 1.5.1.

Nå som du har vært gjennom de grunnleggende teknikkene, bør du løse noen blandede oppgaver i [Oppgave 5.2](#).

1.6. Mer avanserte integrasjonsteknikker.

Dersom du virkelig vil beherske integrasjon, må du nok kjenne til flere integrasjonsmetoder enn de vi har gått gjennom hittil. Vi skal nå se på noen mer avanserte metoder. Du vil imidlertid oppdage at det ikke er de store prinsipielle nyhetene i dette avsnittet. Det er stort sett nye anvendelser av allerede kjente teknikker.

1.6.1. Integrasjon av rasjonale funksjoner.

Vi skal nå se nærmere på hvordan du går fram for å integrere funksjoner av typen

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

der $P(x)$ og $Q(x)$ er polynomer i x .

Dersom $P(x)$ har høyere grad enn $Q(x)$, foretar du først en polynomdivisjon (se heftet om "forkunnskaper") slik at du får et polynom pluss en brøk der telleren har lavere grad enn nevneren. Deretter spaltes denne brøken opp i delbrøker. Disse er vanligvis greie å integrere unntatt dersom du får andregradspolynom i nevneren som ikke lar seg faktorisere i reelle førstegradsfaktorer. Vi skal derfor se på "problem-integral" av typen

$$\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx.$$

La oss først anta at $A = 0$, slik at vi har integral av typen

$$\int \frac{B}{ax^2 + bx + c} dx.$$

Slike integral løses ved å benytte at

$$\int \frac{1}{u^2 + 1} du = \arctan u + C$$

Framgangsmåten er illustrert i eksemplet nedenfor.

Eksempel 1.6.1. Beregn integralet

$$\int \frac{1}{x^2 - 4x + 13} dx.$$

Løsning: Vi merker oss at nevneren ikke kan faktorerises i reelle førstegradsfaktorer. Vi omformer da nevneren slik:

$$x^2 - 4x + 13 = (x^2 - 4x + 4) + 9 = (x - 2)^2 + 9.$$

Vårt første mål er nå å få et 1-tall som konstantledd i nevneren. Integralet omformes derfor til

$$\int \frac{1}{x^2 - 4x + 13} dx = \int \frac{1}{(x - 2)^2 + 9} dx = \int \frac{1}{9\left(\frac{1}{9}(x - 2)^2 + 1\right)} dx = \frac{1}{9} \int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{3}\right)^2 + 1} dx.$$

Nå substituerer vi

$$u = \frac{x - 2}{3} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow dx = 3du.$$

Da blir

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2 - 4x + 13} dx &= \frac{1}{9} \int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{3}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{9} \int \frac{1}{u^2 + 1} \cdot 3 du = \frac{1}{3} \arctan u + C \\ &= \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{x-2}{3}\right) + C\end{aligned}$$

Nå er det på tide å ta med førstegradsleddet i telleren, slik at integralet er av formen

$$\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx.$$

Hvis vi er riktig heldige, er telleren lik den deriverte av nevneren, eventuelt multiplisert med en konstant. Dersom det er tilfelle, kan vi substituere $u(x) = ax^2 + bx + c$, og hele integralet reduseres til

$$\int \frac{1}{u} du = \ln u + C.$$

Så heldig er vi vanligvis ikke. Men kanskje vi kan trikse litt med telleren slik at vi blir så heldige? Eksemplet nedenfor viser hvordan vi kan gå fram.

Eksempel 1.6.2: Beregn integralet

$$\int \frac{4x + 1}{x^2 - 4x + 13} dx.$$

Løsning: Vi setter

$$u(x) = x^2 - 4x + 13 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x - 4 \Leftrightarrow du = (2x - 4) dx.$$

Dessverre står det ikke $2x - 4$ i telleren i integralet vårt. Men det fikser vi fort:

$$4x + 1 = 4x - 8 + 9 = 2(2x - 4) + 9.$$

Da blir

$$\begin{aligned}\int \frac{4x + 1}{x^2 - 4x + 13} dx &= \int \frac{2(2x - 4) + 9}{x^2 - 4x + 13} dx = 2 \int \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 13} dx + 9 \int \frac{1}{x^2 - 4x + 13} dx \\ &= 2 \int \frac{du}{u} + 9 \cdot \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{x-2}{3}\right) + C \\ &= 2 \ln(x^2 - 4x + 13) + 3 \arctan\left(\frac{x-2}{3}\right) + C\end{aligned}$$

Under veis har vi benyttet resultatet fra Eksempel 1.6.1.

Oppgave 1.6.1.

Vi avslutter med et skikkelig beist av et eksempel, der vi får bruk for alle våre teknikker:

Eksempel 1.6.3: Beregn integralet

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 + 12x^2 - 46x - 20}{x^3 + 4x^2 + 20x} dx$$

Løsning: Vi ser at telleren har høyere grad enn nevneren. Vi må derfor starte med en polynomdivisjon:

$$\begin{array}{r} (x^4 + 2x^3 + 12x^2 - 46x - 20) : (x^3 + 4x^2 + 20x) = x - 2 + \frac{-6x - 20}{x^3 + 4x^2 + 20x} \\ \underline{-(x^4 + 4x^3 + 20x^2)} \\ -2x^3 - 8x^2 - 46x - 20 \\ \underline{-(-2x^3 - 8x^2 - 40x)} \\ -6x - 20 \end{array}$$

Så må den siste brøken delbrøkkoppsettes:

$$\begin{aligned} \frac{-6x - 20}{x^3 + 4x^2 + 20x} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4x + 20} = \frac{A(x^2 + 4x + 20) + (Bx + C)x}{x^3 + 4x^2 + 20x} \\ &= \frac{(A + B)x^2 + (4A + C)x + 20A}{x^3 + 4x^2 + 20x} \end{aligned}$$

Dette gir likningene

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ 4A + C &= -6 \\ 20A &= -20 \end{aligned}$$

Disse likningene løses opp nedenfra:

$$\begin{aligned} 20A = -20 &\Leftrightarrow A = \underline{-1}. \\ 4A + C = -6 &\Leftrightarrow C = -6 - 4 \cdot (-1) = \underline{-2}. \\ A + B = 0 &\Leftrightarrow B = -A = \underline{1}. \end{aligned}$$

Dermed har vi at

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 + 12x^2 - 46x - 20}{x^3 + 4x^2 + 20x} dx = \int (x - 2) dx - \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{x - 2}{x^2 + 4x + 20} dx.$$

Her er det bare det siste integralet som gir oss problemer. Den naturlige substitusjonen er

$$u(x) = x^2 + 4x + 20 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x + 4 \Leftrightarrow du = (2x + 4) dx.$$

Nå må vi trikse litt med telleren:

$$x - 2 = \frac{1}{2}(2x - 4) = \frac{1}{2}(2x + 4 - 8) = \frac{1}{2}(2x + 4) - 4$$

slik at

$$\int \frac{x - 2}{x^2 + 4x + 20} dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x + 4)}{x^2 + 4x + 20} dx - \int \frac{4}{x^2 + 4x + 20} dx.$$

Det første av disse integralene løses nå direkte:

$$\int \frac{\frac{1}{2}(2x + 4)}{x^2 + 4x + 20} dx = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln u + C = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4x + 20) + C.$$

Det siste av disse integralene er mer plundrete. Vi omformer først nevneren slik:

$$x^2 + 4x + 20 = (x^2 + 4x + 4) + 16 = (x + 2)^2 + 16 = 16\left(\left(\frac{x+2}{4}\right)^2 + 1\right)$$

slik at

$$\begin{aligned}\int \frac{4}{x^2 + 4x + 20} dx &= \int \frac{4}{16\left(\left(\frac{x+2}{4}\right)^2 + 1\right)} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{x+2}{4}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4 du}{u^2 + 1} \\ &= \arctan u + C = \arctan\left(\frac{x+2}{4}\right) + C\end{aligned}$$

Her har vi substituert

$$u(x) = \frac{x+2}{4} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow dx = 4du.$$

Nå gjenstår det bare å samle trådene:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4 + 2x^3 + 12x^2 - 46x - 20}{x^3 + 4x^2 + 20x} dx &= \int (x - 2) dx - \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{x - 2}{x^2 + 4x + 20} dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 - 2x - \ln x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4x + 20) - \arctan\left(\frac{x+2}{4}\right) + C \\ &= \frac{1}{2}x^2 - 2x + \ln \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 20}}{x} - \arctan\left(\frac{x+2}{4}\right) + C\end{aligned}$$

Oppgave 1.6.2.

1.6.2. Integralet kan løses av en likning.

Noen ganger hender det at når vi prøver å løse et integral, ender vi opp med at det integralet vi skal løse, inngår i en likning. Da finner vi integralet ved å løse likningen. Nedenfor ser du et eksempel på en slik situasjon.

Eksempel 1.6.4: Beregn integralet

$$\int e^x \sin x dx.$$

Løsning: Integranden er et produkt. Da er det naturlig å prøve delvis integrasjon.

$$u'(x) = e^x \Leftrightarrow u(x) = e^x$$

$$v(x) = \sin x \Rightarrow v'(x) = \cos x$$

$$\int e^x \sin x dx = e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \cos x dx.$$

Det gikk ikke i første omgang. La oss prøve delvis integrasjon en gang til for å løse det gjenværende integralet:

$$u'(x) = e^x \Leftrightarrow u(x) = e^x$$

$$v(x) = \cos x \Rightarrow v'(x) = -\sin x$$

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot (-\sin x) dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx.$$

Fremdeles er vi ikke i mål. Det ser faktisk ut som om vi går i ring og kommer tilbake til utgangspunktet. Men se hva som skjer når vi setter sammen det vi har funnet hittil:

$$\begin{aligned}\int e^x \sin x \, dx &= e^x \cdot \sin x - \int e^x \cos x \, dx \\ &= e^x \cdot \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx \right) \\ &= e^x \cdot \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx\end{aligned}$$

Men dette er jo en likning som vi kan løse $\int e^x \sin x \, dx$ ut av! Vi samler begge integralleddene på venstre side og får

$$2 \int e^x \sin x \, dx = e^x \cdot \sin x - e^x \cos x \Leftrightarrow \int e^x \sin x \, dx = \underline{\underline{\frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x)}}.$$

En integrasjonskonstant bør føyes til etterpå.

Oppgave 1.6.3.

1.6.3. Trigonometriske integral.

Integrasjon av trigonometriske funksjoner kan være nokså krevende. Jeg skal nå røpe noen av de vanligste teknikkene.

Omforming av vanskelige integrander ved hjelp av trigonometriske identiteter er noe av det første vi prøver. Da husker vi spesielt at

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

og at

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$$

eller

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x).$$

Identitetene for et produkt av sinus og cosinus kan også komme til nytte:

$$\sin u \cdot \cos v = \frac{1}{2}(\sin(u-v) + \sin(u+v)).$$

$$\cos u \cdot \cos v = \frac{1}{2}(\cos(u-v) + \cos(u+v)).$$

$$\sin u \cdot \sin v = \frac{1}{2}(\cos(u-v) - \cos(u+v)).$$

Du må imidlertid være forberedt på at slike integral må løses i flere trinn, og at du kan få bruk for substitusjoner av typen

$$u = \sin x \Rightarrow du = \cos x \, dx$$

og

$$u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x \, dx.$$

Eksempel 1.6.5: Løs disse integralene:

a) $\int \cos^2 x \, dx$

b) $\int \sin^3 x \, dx$

c) $\int \frac{1}{\sin t} dt$

Løsning:

a)
$$\int \cos^2 x dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x) \right) dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos(2x) dx$$
$$= \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin(2x) + C = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin(2x) + C$$

b)
$$\int \sin^3 x dx = \int \sin x \cdot \sin^2 x dx = \int \sin x (1 - \cos^2 x) dx = \int \sin x dx - \int \sin x \cdot \cos^2 x dx$$

Det siste integralet løses med substitusjonen

$$u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx.$$

Da blir

$$-\int \sin x \cdot \cos^2 x dx = \int u^2 du = \frac{1}{3} u^3 + C = \frac{1}{3} \cos^3 x + C.$$

Dermed blir

$$\int \sin^3 x dx = \int \sin x dx - \int \sin x \cdot \cos^2 x dx = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C.$$

Vi kunne også løst integralet slik:

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x dx &= \int \sin x \cdot \sin^2 x dx = \int \sin x \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x) \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int \sin x dx - \frac{1}{2} \int \sin x \cdot \cos(2x) dx \\ &= \frac{1}{2} (-\cos x) - \frac{1}{2} \int \frac{1}{2} (\sin(x-2x) + \sin(x+2x)) dx \\ &= -\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{4} \int (\sin(-x) + \sin(3x)) dx \\ &= -\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{4} \left(\cos x - \frac{1}{3} \cos(3x) \right) + C \\ &= -\frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{12} \cos(3x) + C \end{aligned}$$

Vi får tilsynelatende ikke samme svar med de to metodene. Men ved å benytte at

$$\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

får vi

$$-\frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{12} \cos(3x) = -\frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{12} (4\cos^3 x - 3\cos x) = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x$$

som er samme svar som før. Dette illustrerer at et svar kan gis på flere tilsynelatende ulike måter.

c)
$$\int \frac{1}{\sin t} dt = \int \frac{\sin t}{\sin^2 t} dt = \int \frac{\sin t}{1 - \cos^2 t} dt.$$

Hensikten med å komplisere integralet på denne måten, er å kunne bruke substitusjonen

$$u = \cos t \Rightarrow du = -\sin t dt.$$

Da blir

$$\int \frac{1}{\sin t} dt = \int \frac{\sin t}{1 - \cos^2 t} dt = \int \frac{-du}{1 - u^2} = \int \frac{1}{u^2 - 1} du = \int \frac{1}{(u+1)(u-1)} du.$$

Nå kan integranden delbrøkkoppspaltes. Jeg hopper over detaljer, men resultatet er

$$\int \frac{1}{u^2 - 1} du = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{u-1} - \frac{\frac{1}{2}}{u+1} \right) du = \frac{1}{2} (\ln|u-1| - \ln|u+1|) + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos t - 1}{\cos t + 1} \right| + C.$$

Nå må vi huske at $-1 \leq \cos t \leq 1$ slik at $|\cos t + 1| = \cos t + 1$ mens $|\cos t - 1| = 1 - \cos t$. Da blir

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin t} dt &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos t - 1}{\cos t + 1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \cos t}{1 + \cos t} + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{(1 - \cos t)^2}{(1 + \cos t)(1 - \cos t)} + C = \frac{1}{2} \ln \frac{(1 - \cos t)^2}{1 - \cos^2 t} + C = \frac{1}{2} \ln \frac{(1 - \cos t)^2}{\sin^2 t} + C \\ &= \ln \left(\frac{(1 - \cos t)^2}{\sin^2 t} \right)^{\frac{1}{2}} + C = \ln \frac{1 - \cos t}{|\sin t|} + C \end{aligned}$$

Oppgave 1.6.4.

1.6.4. Trigonometrisk substitusjon.

Når vi har benyttet substitusjon, har vi alltid plukket ut en kjerne u som er en funksjon av x . Men vi kan også gjøre det motsatt: La x være en funksjon av en ny variabel t ! Ofte lar vi x være en trigonometrisk funksjon, selv om vi nettopp har sett at trigonometriske integral kan være ekle å ha med å gjøre. Metoden kalles derfor ofte *trigonometrisk substitusjon*. Neste eksempel viser hvordan metoden kan virke.

Eksempel 1.6.6: Beregn integralene

- a) $\int \sqrt{1 - x^2} dx$
b) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 + 1}} dx$

Løsning:

a) Vi prøver substitusjonen

$$x = x(t) = \sin t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \cos t \Leftrightarrow dx = \cos t dt.$$

Da blir

$$\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t.$$

Innsetting gir

$$\int \sqrt{1 - x^2} dx = \int \cos t \cdot \cos t dt = \int \cos^2 t dt.$$

Men dette integralet har vi nettopp løst i Eksempel 1.6.5a. Vi henter resultatet derfra, og får

$$\int \sqrt{1 - x^2} dx = \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t) + C$$

Nå gjenstår det å gjeninnføre x . Vi benytter først at

$$x = \sin t \Leftrightarrow t = \arcsin x.$$

Videre benytter vi at

$$\sin(2t) = 2 \sin t \cdot \cos t = 2 \sin t \cdot \sqrt{1 - \sin^2 t} = 2x \cdot \sqrt{1 - x^2}.$$

Vi samler trådene, og får

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2} dx &= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t) + C = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4} \cdot 2x\sqrt{1-x^2} + C \\ &= \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C\end{aligned}$$

b) Her må vi bruke den trigonometriske substitusjonen

$$x = \tan t.$$

Da blir

$$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{\tan^2 t + 1} = \sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t}} = \sqrt{\frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t}} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} = \frac{1}{\cos t}.$$

Videre blir

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos^2 t} \Leftrightarrow dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt.$$

Vi setter alt dette inn i integralet, og får

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx = \int \frac{1}{\frac{\sin t}{\cos t} \cdot \frac{1}{\cos t}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int \frac{1}{\sin t} dt.$$

Dette integralet har vi allerede løst i Eksempel 1.6.5c. Vi henter resultatet derfra, og får

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx = \int \frac{1}{\sin t} dt = \ln \frac{1-\cos t}{|\sin t|} + C.$$

Neste problem er å gjeninnføre x . Da benytter vi at

$$x^2 = \tan^2 t = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t} \Leftrightarrow x^2 \cos^2 t = 1 - \cos^2 t$$

$$\Leftrightarrow x^2 \cos^2 t + \cos^2 t = 1 \Leftrightarrow (x^2 + 1)\cos^2 t = 1 \Leftrightarrow \cos t = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Videre blir

$$\sin^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - \frac{1}{x^2+1} = \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1} = \frac{x^2}{x^2+1} \Rightarrow |\sin t| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Dermed blir

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx = \int \frac{1}{\sin t} dt = \ln \frac{1-\cos t}{|\sin t|} + C = \ln \left(\frac{1-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}} \right) + C = \ln \left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{|x|} \right) + C.$$

Oppgave 1.6.5.

1.7. Uegentlige integral.

Hittil har vi kun tatt for oss integral der integrasjonsgrensene er endelige, samtidig som integranden også er endelig innenfor hele integrasjonsområdet. Nå skal vi se på integral der integrasjonsgrensene går mot uendelig, og integral der integranden går mot uendelig. Slike integral har på norsk fått det misvisende navnet **uegentlige integral**.

Det kan virke nærliggende å tro at integral må gå mot uendelig når integrasjonsgrensene går mot uendelig, eller når integranden selv går mot uendelig. Men i noen situasjoner går faktisk slike integral mot en endelig verdi. Vi sier at integralene **konvergerer** mot en endelig verdi. Dersom slike integral ikke går mot en endelig verdi, sier vi at de **divergerer**.

Vi skal ta for oss disse situasjonene etter tur, og skal først se på integral der en eller begge integrasjonsgrensene går mot uendelig.

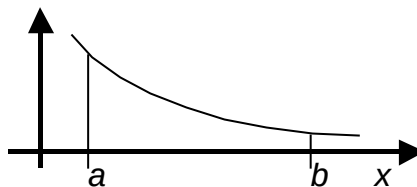
1.7.1. Integral der en integrasjonsgrense går mot uendelig.

Integral av typen

$$\int_a^{\infty} f(x) dx$$

skal oppfattes som

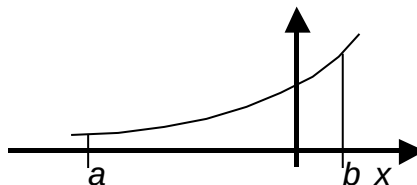
$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx.$$



Dette betyr at vi først beregner det bestemte integralet på vanlig måte. Deretter lar vi $b \rightarrow \infty$.

På samme måte setter vi

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx.$$



Noen eksempler vil illustrere framgangsmåten.

Eksempel 1.7.1: Beregn disse integralene:

a) $\int_{-\infty}^0 e^x dx$

b) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$

c) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$

Løsning:

a) $\int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} [e^x]_a^0 = \lim_{a \rightarrow -\infty} (e^0 - e^a) = 1 - \lim_{a \rightarrow -\infty} e^a = 1 - 0 = 1.$

Dette integraler konvergerer mot 1.

b) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{-2+1} x^{-2+1} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} [-x^{-1}]_1^b$
 $= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{1} \right) = 0 + 1 = 1$

Dette integralet konvergerer mot 1.

c) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln(x)]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(b) - \ln(1) = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(b) - 0.$

Men når $b \rightarrow \infty$ vil $\ln(b) \rightarrow \infty$. Det vil si at dette integralet divergerer.

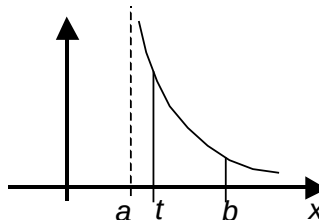
Oppgave 1.7.1.

1.7.2. Integral der integranden går mot uendelig.

Vi skal nå se på noen integral der integranden går mot uendelig når vi nærmer oss en av integrasjonsgrensene.

Dersom $f(x) \rightarrow \infty$ når $x \rightarrow a^+$, setter vi

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx.$$

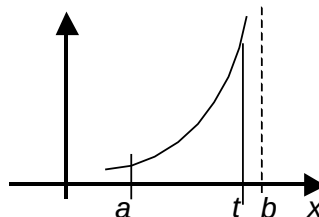


Dette innebærer at vi først beregner et bestemt integral på helt vanlig måte, og deretter lar vi integrasjonsgrensen gå mot den verdien der $f(x) \rightarrow \infty$.

På samme måte setter vi

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

dersom $f(x) \rightarrow \infty$ når $x \rightarrow b^-$.



Eksempel 1.7.2: Beregn disse integralene:

- $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$
- $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$
- $\int_0^1 \ln x dx$
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx$

Løsning:

a) Vi ser at $\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow \infty$ når $x \rightarrow 0^+$. Da blir

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x^{-\frac{1}{2}+1} \right]_a^1 = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[2\sqrt{x} \right]_a^1 \\ &= 2 \lim_{a \rightarrow 0^+} (\sqrt{1} - \sqrt{a}) = 2 \left(1 - \lim_{a \rightarrow 0^+} \sqrt{a} \right) = 2(1-0) = 2 \end{aligned}$$

Integralet konvergerer mot 2.

b) Vi ser at $\frac{1}{x^2} \rightarrow \infty$ når $x \rightarrow 0^+$. Da blir

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 x^{-2} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[-x^{-1} \right]_a^1 = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{x} \right]_a^1 = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{1} + \frac{1}{a} \right) = -1 + \lim_{a \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{a} \right).$$

Men vi ser at $\frac{1}{a} \rightarrow \infty$ når $a \rightarrow 0$. Det vil si at integralet divergerer.

c) Vi vet at $\ln x \rightarrow -\infty$ når $x \rightarrow 0^+$. Da blir

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln x \, dx &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \ln x \, dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} [x \cdot \ln x - x]_a^1 = \lim_{a \rightarrow 0^+} (1 \cdot \ln(1) - 1 - a \cdot \ln(a) + a) \\ &= 1 \cdot 0 - 1 + \lim_{a \rightarrow 0^+} (-a \cdot \ln(a) + a) = 0 - 1 - \lim_{a \rightarrow 0^+} (a \cdot \ln(a)) + 0 \\ &= -1 - \lim_{a \rightarrow 0^+} (a \cdot \ln(a))\end{aligned}$$

Det ubestemte integralet er løst i avsnittet om [delvis integrasjon](#). Problemet er grenseverdien

$$\lim_{a \rightarrow 0} (a \cdot \ln(a))$$

som er et " $0 \cdot \infty$ "-uttrykk. Denne grenseverdien har vi beregnet i kapitlet om L'Hôpitals regel i derivasjons-heftet, og fant da at grenseverdien var lik null. Alt i alt finner vi at

$$\int_0^1 \ln x \, dx = -1 - \lim_{a \rightarrow 0} (a \cdot \ln(a)) = -1 - 0 = \underline{\underline{-1}}.$$

Integralet konvergerer mot -1 .

d) Vi vet at $\tan x \rightarrow \infty$ når $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$. Da blir

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx = \lim_{b \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \int_0^b \tan x \, dx.$$

Vi beregner først det ubestemte integralet:

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \int \frac{-1}{u} \, du = -\ln|u| + C = -\ln(\cos x) + C$$

der vi har benyttet substitusjonen

$$u(x) = \cos x \Rightarrow du = -\sin x \, dx.$$

Da blir

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx &= \lim_{b \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \int_0^b \tan x \, dx = \lim_{b \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} [-\ln(\cos x)]_0^b \\ &= -\lim_{b \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \ln(\cos b) + \ln(\cos 0) = -\lim_{b \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \ln(\cos b) + \ln(1) \\ &= -\lim_{b \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \ln(\cos b) + 0\end{aligned}$$

Nå vet vi at når $b \rightarrow \frac{\pi}{2}$ vil $\cos b \rightarrow 0$. Da vil $\ln(\cos b) \rightarrow -\infty$, og integralet divergerer.

Oppgave 1.7.2.

1.8. Numerisk integrasjon.

1.8.1. Innledning.

Integrasjonsteorien tok utgangspunkt i at vi kan dele et areal opp i tynne striper, og summere arealene av disse stripene. De numeriske metodene vi skal se på, bygger på samme prinsipp.

Utgangspunktet kan være at vi ønsker å beregne arealet som avgrenses av grafen til en funksjon $y = f(x)$, x -aksen, og linjene $x = a$ og $x = b$, men at vi ikke klarer å beregne det ubestemte integralet $\int f(x) \, dx$. Vi deler da intervallet $[a, b]$ opp i n like store deler slik at vi

får $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n = b$. Videre beregner vi funksjonsverdiene $y_a = f(a)$,
 $y_1 = f(x_1), \dots, y_i = f(x_i), \dots, y_b = f(b)$.

Utgangspunktet kan også være at vi ikke kjenner noe funksjonsuttrykk $y = f(x)$, men at vi kjenner funksjonsverdiene $y_a, y_1, \dots, y_i, \dots, y_b$ for eksempel på grunnlag av målinger.

Planen vår er nå å finne et mest mulig nøyaktig uttrykk for arealet av hver stripe, og deretter summere alle disse bidragene. Vi skal se på 3 metoder som gir stadig bedre nøyaktighet uten særlig øking i regnearbeid: **Rektangel-metoden**, **trapes-metoden**, og **Simpsons formel**.

For alle tre metodene skal vi forutsette at y -verdiene er gitt i en tabell som vist i eksemplet nedenfor. Der bruker vi funksjonsverdiene til

$$y = \sqrt{x} \text{ for } x = 1, x = 2, \dots, x = 8, x = 9,$$

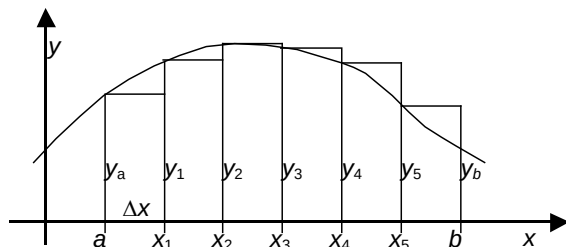
i alt $n = 8$ intervaller som hvert har bredde $\Delta x = 1$. På denne måten kan vi sammenlikne resultatet med eksakt verdi, som er

$$\int_1^9 \sqrt{x} dx = \int_1^9 x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} \left[x^{\frac{3}{2}} \right]_1^9 = \frac{2}{3} (9^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}) = \frac{2}{3} (27 - 1) = \frac{52}{3} \approx \underline{\underline{17.333}}.$$

Tabellverdier:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	1.000	1.414	1.732	2.000	2.236	2.449	2.646	2.828	3.000

1.8.2. Rektangel-metoden.



Prinsippet er at arealet deles opp i n like brede *rektangler* med bredde

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Summen av arealene av disse rektanglene er

$$\begin{aligned} S &= y_a \cdot \Delta x + y_1 \cdot \Delta x + \dots + y_{n-1} \cdot \Delta x = (y_a + y_1 + \dots + y_{n-1}) \cdot \Delta x \\ &= \frac{b-a}{n} \cdot (y_a + y_1 + \dots + y_{n-1}) \end{aligned}$$

Med tallene i vårt eksempel får vi

$$S = \frac{9-1}{8} (1.000 + 1.414 + \dots + 2.646 + 2.828) = \underline{\underline{16.305}}.$$

I formelen ovenfor har vi brukt y_{i-1} som høyde til rektangel nr i . Vi kunne like godt brukt y_i som høyde til rektangel nr i . Da ville formelen blitt

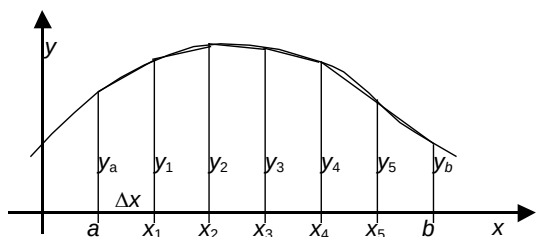
$$\begin{aligned} S &= y_1 \cdot \Delta x + y_2 \cdot \Delta x + \dots + y_n \cdot \Delta x = (y_1 + y_2 + \dots + y_n) \cdot \Delta x \\ &= \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n) \end{aligned}$$

Med tallene i vårt eksempel får vi da

$$S = \frac{9-1}{8}(1.414 + 1.732 \cdots + 2.828 + 3.000) = \underline{\underline{18.305}}.$$

Du ser at disse to formlene ikke gir samme resultat. Vi kan forbedre resultatet ved å bruke gjennomsnittet av verdiene som de to formlene gir (se den eksakte verdien vi har funnet foran), eller ved å bruke en funksjonsverdi midt i rektangelet som høyde til rektangelet. I praksis bruker vi heller en av de bedre metodene som vi skal komme til nå.

1.8.3. Trapes-metoden.



Vi bruker nå *trapes* istedenfor rektangler når vi skal finne tilnærmet verdi av arealene av hver stripe. Arealet av trapes nr. n er

$$\Delta A = \frac{1}{2}(y_{n+1} + y_n) \cdot \Delta x,$$

slik at det samlede arealet blir

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(y_a + y_1)\Delta x + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\Delta x + \frac{1}{2}(y_2 + y_3)\Delta x + \cdots + \frac{1}{2}(y_{n-2} + y_{n-1})\Delta x + \frac{1}{2}(y_{n-1} + y_b)\Delta x \\ &= \frac{\Delta x}{2} \cdot ((y_a + y_1) + (y_1 + y_2) + (y_2 + y_3) + \cdots + (y_{n-2} + y_{n-1}) + (y_{n-1} + y_b)) \\ &= \underline{\underline{\frac{b-a}{2n} \cdot (y_a + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_b)}} \end{aligned}$$

Med tallene i vårt eksempel får vi nå

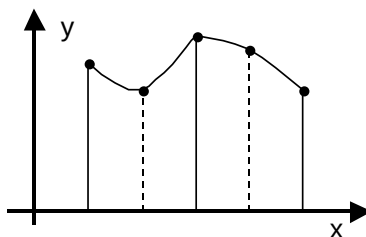
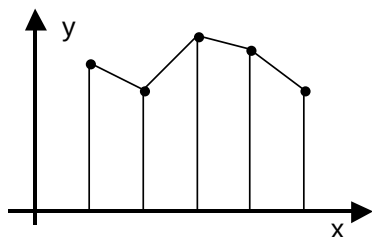
$$S = \frac{9-1}{2 \cdot 8}(1.000 + 2 \cdot 1.414 + 2 \cdot 1.732 \cdots + 2 \cdot 2.828 + 3.000) = \underline{\underline{17.306}}.$$

Og dette er en mye bedre tilnærming enn vi fikk med rektangelmetoden.

Legg merke til hvordan summen i parenteser framkommer: Alle y -verdiene multipliseres med 2, unntatt de to y -verdiene i endepunktene som multipliseres med 1. Dette er et eksempel på en *vektet sum*, der vektallene er 1 for ende-verdiene og 2 ellers.

Trapecmetoden egner seg godt til regneark.

1.8.4. Simpsons formel.



Trapec-metoden gikk altså ut på at vi trakk rette linjer mellom nabo-punkter i grafen og beregnet arealet av stripene under disse rette linjene. Se figuren over til venstre. *Simpsons formel* framkommer ved at vi ser to nabo-striper under ett. Vi får da *tre* punkter som vi bruker til å tilpasse en *andregradsfunksjon*. Arealet under denne andregrads-grafen blir da som regel en meget god tilnærming til det virkelige arealet av stripeparet. Så legger vi sammen arealene av alle disse stripeparene, og får etter en litt omstendelig [utledning](#):

Simpsons formel:

Når intervallet fra $x = a$ til $x = b$ deles inn i $2n$ intervaller med lengde

$$\Delta x = \frac{b-a}{2n},$$

er

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} (y_a + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_b).$$

Legg merke til at:

- Arealet deles i $2n$ striper (eller i n stripepar).
- Vekttallene er vekselvis 2 og 4, unntatt i endepunktene der vektallene er 1.

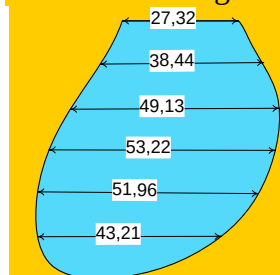
Med tallene i vårt eksempel får vi

$$S = \frac{9-1}{6 \cdot 4} (1.000 + 4 \cdot 1.414 + 2 \cdot 1.732 \cdots + 4 \cdot 2.828 + 3.000) = \underline{\underline{17.332}}.$$

Og dette er en svært god tilnærming til den eksakte verdien som er 17.333.

Også Simpsons formel egner seg godt for regneark.

Eksempel 1.8.1: Figuren nedenfor viser et flyfoto av et vann. Du vil bestemme arealet av vannet, og måler strekninger fra bredd til bredd med 10 meters mellomrom. Bruk Simpsons formel til å beregne arealet av vannet.



Løsning: Vi har 6 stripepar, slik at $n = 3$. Med 10 meters bredde av hver stripe, gir Simpsons formel

$$\begin{aligned} A &= \frac{6 \cdot 10}{6 \cdot 3} (27.32 + 4 \cdot 38.44 + 2 \cdot 49.13 + \cdots + 4 \cdot 43.21 + 0) \\ &= \underline{\underline{2563.27}} \end{aligned}$$

[Oppgave 1.8.1](#), [Oppgave 1.8.2](#).

2. Bruk av integrasjon.

Ved siden av derivasjon er integrasjon et av de nyttigste matematikk-redskapene vi har. Vi skal nå se på noen av de mange tingene vi kan bruke integrasjon til. Vi skal legge hovedvekten på hvordan vi setter opp integralene. Noen bryssomme integral skal vi løse med data-verktøy.

2.1. Arealberegning.

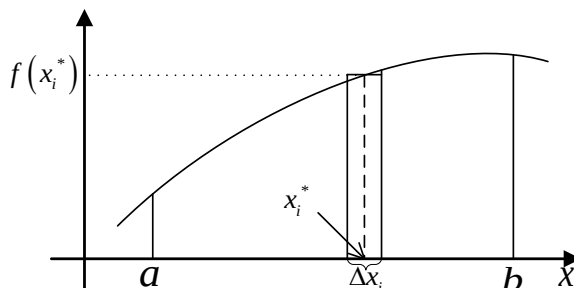
Da vi utledet de grunnleggende reglene for integrasjon, tok vi utgangspunkt i arealberegning. Vi sa at dersom en funksjon $y = f(x)$ var positiv i intervallet $a \leq x \leq b$, fant vi arealet A som avgrenses av grafen til f , linjene $x = a$ og $x = b$, og x -aksen ved å summere bidragene fra mange små striper som hver har areal $\Delta A_i = f(x_i^*) \cdot \Delta x_i$ der x_i^* er en vilkårlig x -verdi i intervallet Δx_i . Det samlede arealet av alle stripene blir da

$$\sum_{x=a}^{x=b} \Delta A_i = \sum_{x=a}^{x=b} f(x_i^*) \Delta x_i.$$

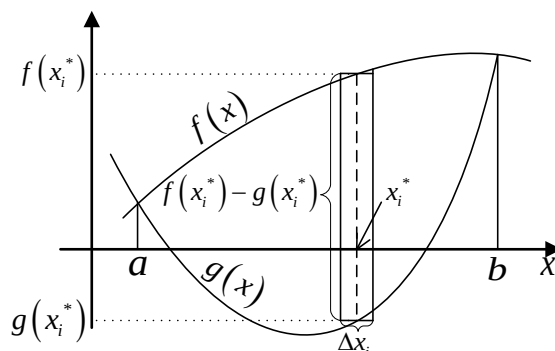
Så lot vi bredden av stripene gå mot null, samtidig som antall striper går mot uendelig. Da blir arealet A gitt ved

$$A = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{x=a}^{x=b} f(x_i^*) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx.$$

Se figuren nedenfor.



Vi skal nå videreføre disse ideene, og skal starte med å finne arealet som avgrenses av grafene til to funksjoner $f(x)$ og $g(x)$.



Figuren over viser grafene til de to funksjonene f og g . Merk at grafene skjærer hverandre i $x = a$ og i $x = b$, og at $f(x) \geq g(x)$ i hele intervallet $a \leq x \leq b$. Arealet mellom grafene

tenkes nå delt opp i lodrette striper med bredde Δx_i og høyde $h(x_i^*) = f(x_i^*) - g(x_i^*)$. Da er arealet av hver stripe gitt ved

$$\Delta A_i = h(x_i^*) \cdot \Delta x_i = (f(x_i^*) - g(x_i^*)) \cdot \Delta x_i$$

slik at det samlede arealet mellom grafene er

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

Merk at resonnementet og formelen ovenfor gjelder selv om hele eller deler av arealet ligger under x -aksen.

Når du skal løse oppgaver av denne typen, må du alltid starte med å tegne en figur. Tegn inn grafene til de to funksjonene, og bestem skjæringspunktene. Den funksjon som har størst funksjonsverdi (øverste graf) svarer til f i arealformelen ovenfor, og den funksjonen som har minst funksjonsverdi svarer til g . Resten er integrasjonsteknikk.

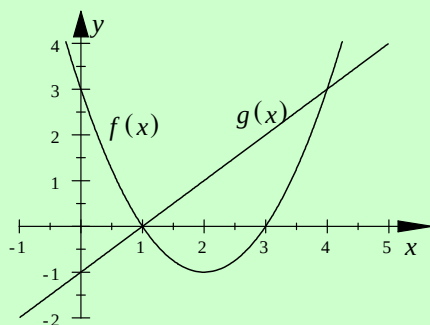
Eksempel 2.1.1: Beregn arealet som avgrenses av grafene til

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

og

$$g(x) = x - 1.$$

Løsning: Vi starter med å tegne opp grafene til de to funksjonene:



Så finner vi skjæringspunktene mellom grafene:

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 - 4x + 3 = x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

Skjæringspunktene er altså $x = 1$ og $x = 4$.

Av figuren ser vi at g ligger over f i hele intervallet. Da blir arealet

$$\begin{aligned} A &= \int_1^4 (g(x) - f(x)) dx = \int_1^4 ((x - 1) - (x^2 - 4x + 3)) dx = \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 4x \right]_1^4 = \left(-\frac{1}{3} \cdot 4^3 + \frac{5}{2} \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 \right) - \left(-\frac{1}{3} \cdot 1^3 + \frac{5}{2} \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 \right) = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Viktigheten av å tegne graf først, kan ikke understrekes kraftig nok. Du må heller ikke stole blindt på formler for arealberegning, men må bruke sunn fornuft kombinert med figuren. Dette illustreres av neste eksempel:

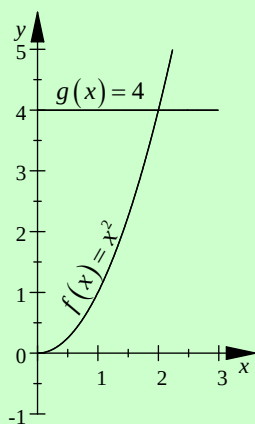
Eksempel 2.1.2: Beregn arealet i første kvadrant som avgrenses av grafen til $f(x) = x^2$, y -aksen, og den rette linja $y = 4$.

Løsning: Figuren nedenfor til venstre viser at arealet vi er på jakt etter, er avgrenset av grafen til en funksjon $g(x) = 4$, y -aksen, og grafen til $f(x) = x^2$.

Vi må starte med å finne skjæringspunktet mellom $f(x)$ og $g(x)$:

$$x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

Vi skal bruke verdien $x = 2$. Arealet blir



$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 (g(x) - f(x)) dx = \int_0^2 (4 - x^2) dx = \left[4x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^2 \\ &= \left(4 \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 2^3 \right) - \left(4 \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 \right) = \underline{\underline{\frac{16}{3}}} \end{aligned}$$

Dersom vi ikke tegner graf først, er det fort gjort å tro at vi skal løse integralet

$$\int_0^2 x^2 dx.$$

Men hvis vi gjør det, får vi arealet *under* grafen til f , ikke arealet *mellom* denne grafen og linja $y = g(x) = 4$.

Oppgave 2.1.1.

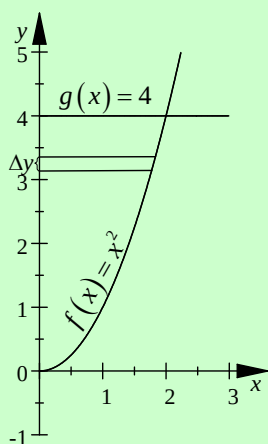
Standardmetoden går altså ut på å legge loddrette striper med bredde Δx . Men noen ganger kan det lønne seg å legge vannrette striper med bredde Δy . Dersom lengden av hver stripe er x , og vi kjenner x som funksjon av y , får vi arealet ved å løse integralet

$$A = \int_{y_a}^{y_b} x dy$$

der y_a og y_b er henholdsvis nedre og øvre grense for integralet.

Vi skal som eksempel løse problemet i eksempel 2.1.2 med denne teknikken.

Eksempel 2.1.3: Beregn arealet i første kvadrant som avgrenses av grafen til $f(x) = x^2$, y -aksen, og den rette linja $y = 4$ ved å legge inn vannrette striper med bredde Δy .



Løsning: Vi skal nå finne arealet ved hjelp av

$$A = \int_{y_a}^{y_b} x dy,$$

se figuren til venstre. Vi må da først finne x som funksjon av y . Vi får

$$y = x^2 \Leftrightarrow x = +\sqrt{y}$$

der vi benytter at x er positiv. Da blir arealet

$$\begin{aligned} A &= \int_0^4 \sqrt{y} dy = \int_0^4 y^{\frac{1}{2}} dy = \left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1} y^{\frac{1}{2}+1} \right]_0^4 = \left[\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 \\ &= \frac{2}{3} \left(4^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{2}{3} \left(\sqrt{4^3} - 0 \right) = \frac{2}{3} (2^3 - 0) = \underline{\underline{\frac{16}{3}}} \end{aligned}$$

Til slutt tar vi med et eksempel til, som også viser hvor viktig det er å tegne graf først. Eksemplet viser også at du må bruke hodet når du løser slike oppgaver, ikke bare stole på standardformler.

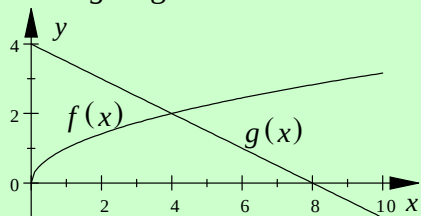
Eksempel 2.1.4: Bestem arealet som avgrenses av x-aksen og grafene til

$$f(x) = \sqrt{x}$$

og

$$g(x) = -\frac{1}{2}x + 4.$$

Løsning: Figuren blir slik:



Jeg skal løse oppgaven på to måter, først ved å legge inn de vanlige loddrette stripene med bredde Δx , og deretter ved å legge inn vannrette striper med bredde Δy . Uansett metode må vi først beregne skjæringspunktet mellom de to grafene:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}x + 4 &= \sqrt{x} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}x + 4\right)^2 = x \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x \cdot 4 + 16 = x \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 - 5x + 16 &= 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{5 \pm 3}{\frac{1}{2}} = \begin{cases} 16 \\ 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Vi ser av figuren at $x = 4$ er den eneste brukbare løsningen. Da er $y = \sqrt{4} = 2$, som også stemmer med grafen.

Vi må også finne skjæringspunktene med x-aksen.

Vi ser lett at grafen til $f(x) = \sqrt{x}$ skjærer x-aksen når $x = 0$.

Grafen til $g(x) = -\frac{1}{2}x + 4$ skjærer x-aksen når

$$-\frac{1}{2}x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 8.$$

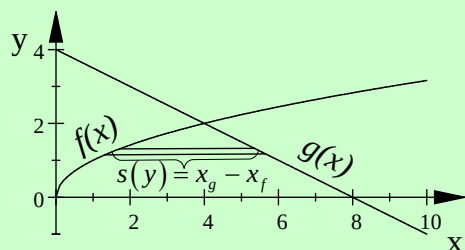
Når vi legger inn loddrette striper, må arealet deles inn i to deler. Vi integrerer først

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \text{ fra } x = 0 \text{ til } x = 4.$$

Deretter integrerer vi

$$g(x) = -\frac{1}{2}x + 4 \text{ fra } x = 4 \text{ til } x = 8:$$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^4 x^{\frac{1}{2}} dx + \int_4^8 \left(-\frac{1}{2}x + 4\right) dx = \left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} \right]_0^4 + \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} x^2 + 4x \right]_4^8 = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 + \left[-\frac{1}{4} x^2 + 4x \right]_4^8 \\ &= \frac{2}{3} \left(4^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}} \right) + \left(-\frac{1}{4} \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 \right) - \left(-\frac{1}{4} \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 \right) = \frac{2}{3} \cdot 8 - 16 + 32 + 4 - 16 = \underline{\underline{\frac{28}{3}}} \end{aligned}$$



Når vi legger inn vannrette striper, må vi først finne x uttrykt ved y for begge funksjonene:

$$f(x) = y = \sqrt{x_f} \Leftrightarrow x_f = y^2$$

og

$$g(x) = y = -\frac{1}{2}x_g + 4 \Leftrightarrow x_g = -2y + 8.$$

Lengden av ei stripe i avstand y fra x-aksen blir

$$s(y) = x_g - x_f = (-2y + 8) - y^2 = -y^2 - 2y + 8.$$

Arealet blir da

$$A = \int_0^2 s(y) dy = \int_0^2 (-y^2 - 2y + 8) dy = \left[-\frac{1}{3}y^3 - y^2 + 8y \right]_0^2 = \left(-\frac{1}{3} \cdot 2^3 - 2^2 + 8 \cdot 2 \right) - 0 = \underline{\underline{\frac{28}{3}}}.$$

Oppgave 2.1.2.

2.2. Volumberegning.

Når vi skal bruke integrasjon til å beregne volumet V av et legeme, tenker vi oss at legemet deles opp i små biter på en slik måte at vi kan beregne volumet ΔV av hver bit. Deretter finner vi volumet av hele legemet ved å summere bidragene fra hver bit:

$$V = \sum \Delta V$$

Videre tenker vi oss at hver bit gjøres mindre og mindre samtidig som antall biter stadig øker. Da blir

$$V = \int dV$$

der vi integrerer over hele legemet.

Generelt vil slik integrasjon over et romlegeme kreve at vi løser et dobbelt- eller trippel-integral. Dette skal vi ikke ta opp her. Vi skal begrense oss til legemer som har spesiell form slik at vi kan klare oss med vanlige enkelt-integraler. Vi skal spesielt ta for oss legemer som er rotasjons-symmetriske.

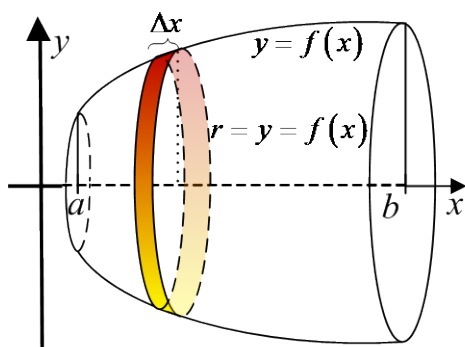
2.2.1. Skivemetoden.

Denne metoden går ut på at vi deler opp romlegemet i en stabel med svært tynne skiver, der hver skive har areal A og konstant tykkelse dh . Volumet av hver skive blir da $dV = A \cdot dh$. Samlet volum av hele romlegemet blir da

$$V = \int dV = \int A \cdot dh.$$

Hvordan dette gjøres i praksis, avhenger av hvordan legemet er plassert i rommet og hvordan vi kutter legemet opp i skiver.

A) Rotasjonssymmetri om x-aksen.



Figuren til venstre viser et legeme som framkommer ved at grafen til $y = f(x)$, linjene $x = a$ og $x = b$ roterer om x-aksen. Vi ønsker å finne volumet av dette legemet. Det gjør vi ved å kutte det opp i skiver vinkelrett på x-aksen slik figuren til venstre viser. Arealet av en snittflate i avstand x fra origo blir

$$A = \pi r^2 = \pi y^2 = \pi (f(x))^2.$$

Skivene har tykkelse Δx , som er svært liten. Volumet av hver skive blir da tilnærmet

$$\Delta V \approx A \cdot \Delta x = \pi (f(x))^2 \Delta x.$$

Så finner vi volumet av hele legemet ved å summere bidragene fra alle de tynne skivene:

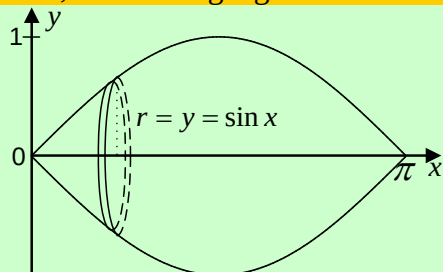
$$V \approx \sum \Delta V \approx \sum \pi (f(x))^2 \Delta x.$$

Jo tynnere skivene er, jo bedre blir denne tilnærmelsen. Når $\Delta x \rightarrow 0$, blir

$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx.$$

Dette er den grunnleggende formelen for beregning av volum for et legeme som roterer om x -aksen.

Eksempel 2.2.1: Beregn volumet av det legemet som framkommer når grafen til $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, roterer en gang om x -aksen.



Løsning: Volumet blir

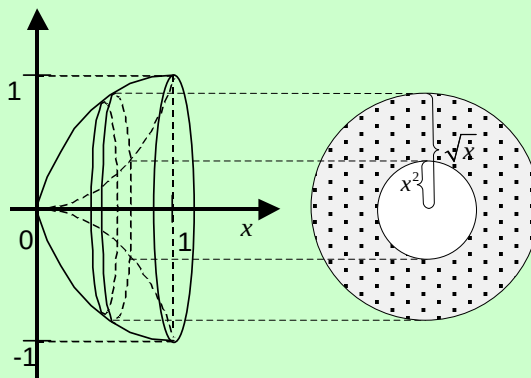
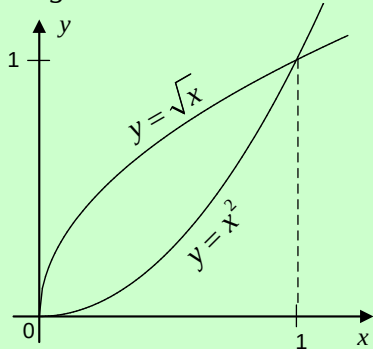
$$V = \int_{x=0}^{x=\pi} \pi r^2 dx = \int_0^{\pi} \pi (\sin x)^2 dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}\pi^2}}.$$

Integrasjonen er foretatt med dataverktøy. Dersom integrasjonen skal utføres for hand, anbefales omformingen

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)).$$

Eksempel 2.2.2: Beregn volumet av det legemet som framkommer når flata som avgrenses av $f(x) = \sqrt{x}$ og $g(x) = x^2$ roterer en gang om x -aksen.

Løsning:



Ovenfor til venstre ser du grafene til $f(x) = \sqrt{x}$ og $g(x) = x^2$. Ovenfor til høyre ser du en skisse av det rotasjonslegemet som framkommer, sammen med en av snittskivene.

Vi merker oss først at grafene skjærer hverandre når

$$\sqrt{x} = x^2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Det er kanskje mest naturlig å beregne volumet av den kalotten som dannes når grafen til $f(x) = \sqrt{x}$ roteres om x -aksen, avgrenset av linja $x = 1$, og deretter trekke fra det volumet som fjernes inni kalotten når grafen til $g(x) = x^2$ roteres om x -aksen. Vi får da:

$$V = \int_0^1 \pi (\sqrt{x})^2 dx - \int_0^1 \pi (x^2)^2 dx = \int_0^1 \pi x dx - \int_0^1 \pi x^4 dx = \pi \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{5} x^5 \right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{3}{10}\pi}}.$$

Vi kan også resonnerer slik: Snittskiva i avstand x fra origo har ytre radius $R = \sqrt{x}$. Men det er et hull i skiva med radius $r = x^2$. Arealet av skiva (fratrasket arealet av hullet) blir da

$$A(x) = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi (R^2 - r^2) = \pi \left((\sqrt{x})^2 - (x^2)^2 \right) = \pi (x - x^4).$$

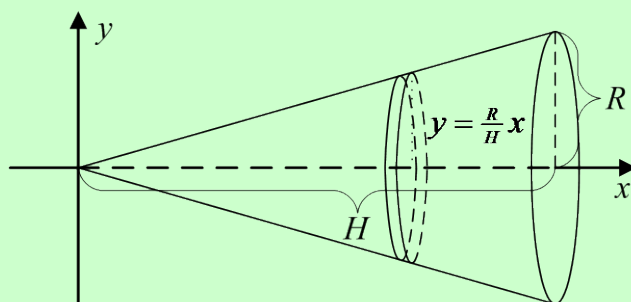
Da blir volumet av legemet

$$V = \int_0^1 A(x) dx = \int_0^1 \pi(x - x^4) dx = \underline{\underline{\frac{3}{10}\pi}}.$$

Noen ganger blir vi bedt om å finne en formel for volumet av et gitt omdreiningslegeme. Da må vi først plassere legemet på en fornuftig måte i koordinatsystemet slik neste eksempel viser.

Eksempel 2.2.3: Utled formelen for volumet av en rett kjegle med høyde H og sirkulær grunnflate med radius R .

Løsning:



Vi tenker oss at kjeglen framkommer ved at den rette linja $y = \frac{R}{H}x$ roterer en gang om x -aksen slik figuren til venstre viser. Ei snittflate vinkelrett på x -aksen i avstand x fra origo har da areal

$$A = \pi y^2 = \pi \left(\frac{R}{H}x\right)^2 = \pi \frac{R^2}{H^2} x^2,$$

slik at volumet av ei tynn skive med tykkelse dx blir

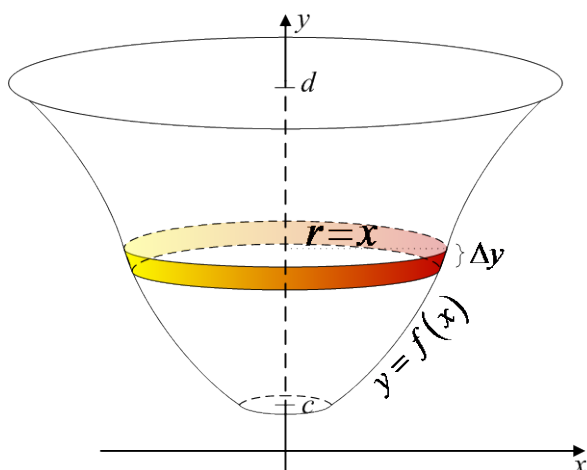
$$dV = A \cdot dx = \pi \frac{R^2}{H^2} x^2 dx.$$

Kjeglens volum blir da

$$V = \int_{x=0}^{x=H} dV = \int_0^H \pi \frac{R^2}{H^2} x^2 dx = \pi \frac{R^2}{H^2} \cdot \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^H = \frac{1}{3}\pi \frac{R^2}{H^2} (H^3 - 0^3) = \underline{\underline{\frac{1}{3}\pi R^2 H}}.$$

Oppgave 2.2.1.

B) Rotasjonssymmetri om y -aksen.



Vi benytter samme resonnement som ved rotasjonssymmetri om x -aksen, men nå stabler vi skivene oppå hverandre. Hver skive får tykkelse Δy , mens radien i skiva blir x . Volumet av hver skive blir

$$\Delta V \approx \pi x^2 \Delta y,$$

slik at volumet av hele legemet blir

$$V = \int_{y=c}^{y=d} dV = \int_{y=c}^{y=d} \pi x^2 dy.$$

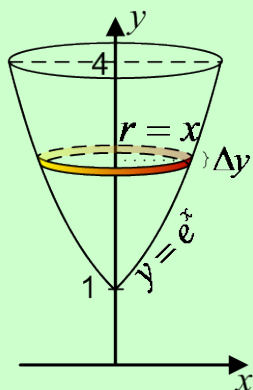
Videre må vi sørge for at x uttrykkes som en funksjon av y :

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

La oss illustrere metoden med et eksempel:

Eksempel 2.2.4: Bestem volumet av det omdreiningslegemet som framkommer når grafen til $f(x) = e^x$, $0 \leq x \leq \ln 4$ og linja $y = 4$ roterer en gang rundt y -aksen.

Løsning: Situasjonen er illustrert nedenfor til venstre:



Her er

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y.$$

Ei skive med tykkelse Δy i avstand y fra x -aksen har da volum

$$\Delta V = \pi x^2 \Delta y = \pi (\ln y)^2 \Delta y$$

slik at volumet av hele legemet blir

$$V = \int_1^4 \pi (\ln y)^2 dy = \pi (16(\ln 2)^2 - 16 \ln 2 + 6)$$

der integrasjonen er utført med dataverktøy.

Grensene for integralet blir

$$e^0 = 1 \text{ og } e^{\ln 4} = 4.$$

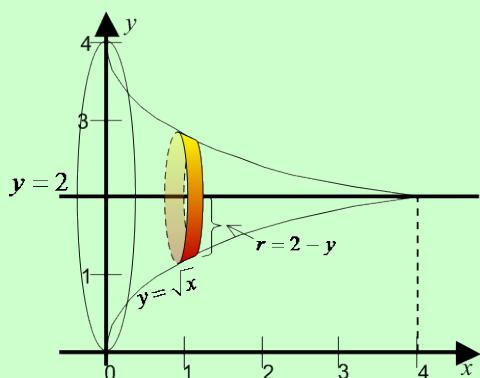
Oppgave 2.2.2.

C) Rotasjon om en akse parallell med en koordinat-akse.

Hvis du har forstått hvordan vi kutter opp rotasjonslegemer i skiver, og har vent deg til å lage gode figurer, vil du ganske sikkert også klare å beregne volumet av legemer som roterer om akser parallell med koordinataksene. Istedenfor å sette opp generelle formler, skal vi heller se på et par eksempler.

Eksempel 2.2.5: Ei flate avgrenses av grafen til $f(x) = \sqrt{x}$, y -aksen, og linja $y = 2$. Finn volumet av det legemet som framkommer når denne flata roterer om linja $y = 2$.

Løsning: Figuren nedenfor illustrerer situasjonen:



Vi kutter opp legemet i skiver med tykkelse Δx

vinkelrett på rotasjonsaksen. Ei skive i avstand x fra y -aksen får da radius

$$r = 2 - y = 2 - \sqrt{x}.$$

Volumet av ei slik skive blir

$$\Delta V \approx \pi r^2 \Delta x = \pi (2 - \sqrt{x})^2 \Delta x$$

$$= \pi (4 - 4\sqrt{x} + x) \Delta x$$

Vi får øvre grense for integralet når

$$\sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4.$$

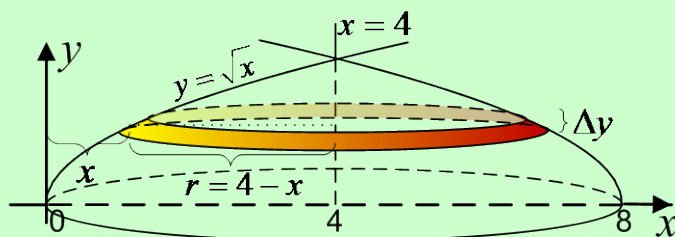
Da blir

$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 \pi (4 - 4\sqrt{x} + x) dx = \pi \left[4x - 4 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} x^2 \right]_0^4 = \pi \left(4 \cdot 4 - \frac{8}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \cdot 4^2 - 0 \right) \\ &= \pi \left(16 - \frac{8}{3} \cdot \sqrt{4^3} + 8 \right) = \underline{\underline{\frac{8}{3}\pi}} \end{aligned}$$

Så tar vi et eksempel med rotasjon rundt en akse parallell med y -aksen.

Eksempel 2.2.6: Ei flate avgrenses av grafen til $f(x) = \sqrt{x}$, x -aksen, og linja $x = 4$. Finn volumet av det legemet som framkommer når denne flata roterer om linja $x = 4$.

Løsning: Figuren nedenfor illustrerer situasjonen:



Vi kutter opp legemet i skiver med tykkelse Δy vinkelrett på rotasjonsaksen. Ei skive i avstand y fra x -aksen får da radius

$$r = 4 - x = 4 - y^2$$

fordi

$$y = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = y^2.$$

Volumet av ei slik skive blir

$$\Delta V \approx \pi r^2 \Delta y = \pi (4 - y^2)^2 \Delta y = \pi (16 - 8y^2 + y^4) \Delta y.$$

Nedre grense for integralet er åpenbart lik null. Vi finner øvre grense for integralet når grafen til $y = \sqrt{x}$ skjærer linja $x = 4$, d.v.s. når $y = \sqrt{4} = 2$. Volumet av hele legemet blir da

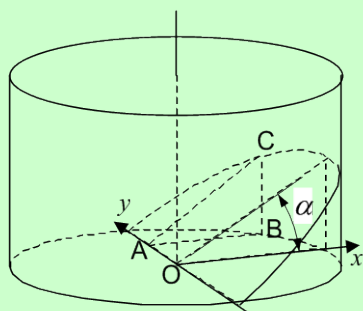
$$V = \int_0^2 \pi (16 - 8y^2 + y^4) dy = \pi \left[16y - \frac{8}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 \right]_0^2 = \pi \left(16 \cdot 2 - \frac{8}{3} \cdot 2^3 + \frac{1}{5} \cdot 2^5 - 0 \right) = \frac{256}{15} \pi.$$

Oppgave 2.2.3.

D) Mer generelle problemstillinger.

Hittil har alle legemene vært rotasjons-symmetriske, og snittene har vært lagt vinkelrett på rotasjonsaksen. Men skivemetoden kan brukes i mer generelle situasjoner. Da er det ikke alltid like innlysende hvordan snittene skal lagges. Det illustreres av neste eksempel.

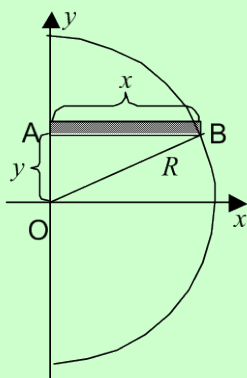
Eksempel 2.2.7: En kile skjæres ut av en rett sylinder ved hjelp av to plan som danner en vinkel α med hverandre. Sylinderaksen står vinkelrett på det ene planet og vinkelrett på planenes skjæringslinje. Finn volumet av kilen uttrykt ved vinkelen α og sylinderens radius R .



Løsning: Situasjonen er illustrert på figuren til venstre. Der ser du sylindere med de to snittplanene, som danner vinkelen α med hverandre.

Legg y -aksen langs snittlinjen mellom planene, og x -aksen vinkelrett på y -aksen som vist på figuren. Så legger vi snittplan vinkelrett på y -aksen. Trekanten ABC er et slikt snittplan. Legg merke til at

$$BC = AB \cdot \tan \alpha.$$



Til venstre ser du grunnflaten i kilen, med snittlinja AB (der C ligger like over B). Et lite volumelement som har snittplanet ABC som grunnplan og tykkelse dy er skravert.

Av figuren ser du at

$$AB = x = \sqrt{R^2 - y^2}.$$

Arealet av trekanten blir da

$$A = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} x \cdot x \tan \alpha = \frac{1}{2} x^2 \tan \alpha = \frac{1}{2} (R^2 - y^2) \tan \alpha.$$

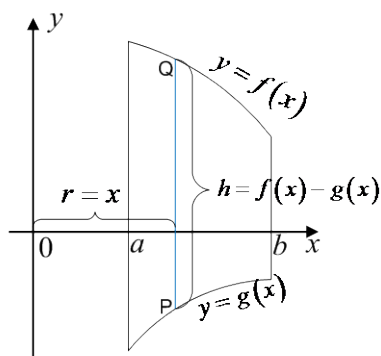
Denne trekanten er nå grunnflate i ei skive med tykkelse Δy .

Volumet av hele kilen blir da

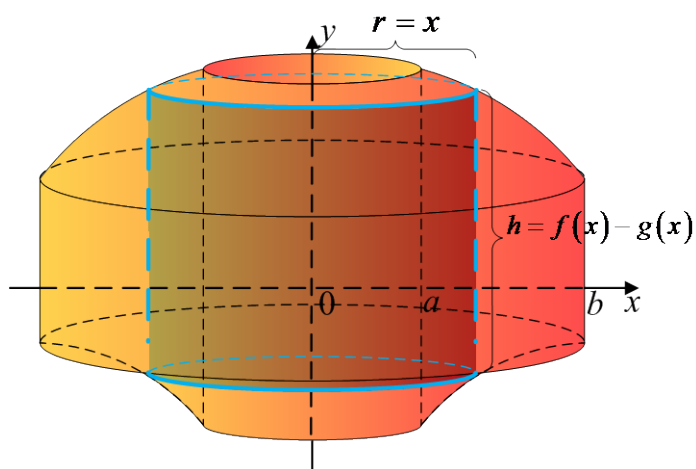
$$\begin{aligned} V &= \int_{-R}^R A \cdot dy = \int_{-R}^R \frac{1}{2} (R^2 - y^2) \tan \alpha \cdot dy = \frac{1}{2} \tan \alpha \cdot \left[R^2 y - \frac{1}{3} y^3 \right]_{-R}^R \\ &= \frac{1}{2} \tan \alpha \left(\left(R^2 \cdot R - \frac{1}{3} R^3 \right) - \left(R^2 \cdot (-R) - \frac{1}{3} (-R)^3 \right) \right) = \underline{\underline{\frac{2}{3} R^3 \tan \alpha}} \end{aligned}$$

2.2.2. Sylinderskall-metoden.

Mens skivemetoden i prinsippet kan brukes på ethvert legeme, kan *sylinderskall-metoden* kun brukes for rotasjons-symmetriske legemer. Jeg skal illustrere ideen bak metoden i en relativt generell situasjon der vi har et legeme som er rotasjonssymmetrisk med y-aksen som symmetriakse.



Vi starter med ei flate som avgrenses av grafene til to funksjoner $f(x)$ og $g(x)$, og av de rette linjene $x=a$ og $x=b$. Se figuren til venstre. Så merker vi av ei rett linje PQ i flata parallell med y-aksen, og lar flata rotere om y-aksen. Da får vi den situasjonen som er skissert nedenfor.



Den rette linja PQ vil under rotasjonen danne en sylinderflate med radius $r = x$ og høyde

$$h = f(x) - g(x)$$

der det er forutsatt at $f(x) > g(x)$.

Arealet av denne sylinderflata blir

$$A = 2\pi r \cdot h = 2\pi x (f(x) - g(x)).$$

Så kommer poenget: Utenpå denne sylinderflata legger vi et *tynt* sjikt (et *sylinderskall*) med tykkelse $\Delta r = \Delta x$. Dette sylinderskallet vil da få volum

$$\begin{aligned} \Delta V &= A \cdot \Delta x \\ &= 2\pi x (f(x) - g(x)) \cdot \Delta x \end{aligned}$$

Volumet av hele legemet blir da summen av volumene til alle sylinderskallene. I praksis vil vi erstatte Δx med dx , og integrere fra det innerste skallet som har radius a til det ytterste skallet som har radius b , og får at:

Volumet blir

$$V = \int_a^b 2\pi x (f(x) - g(x)) dx.$$

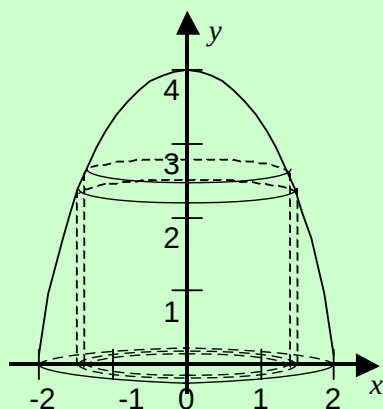
La oss se hvordan dette fungerer i praksis.

Eksempel 2.2.8: Ei flate avgrenses av grafen til

$$f(x) = 4 - x^2,$$

x -aksen og y -aksen. Finn volumet av det legemet som framkommer når denne flata roterer om y -aksen.

Løsning: Situasjonen er illustrert nedenfor.



Vi ser at høyden av sylinderskallet blir

$$h = f(x) = 4 - x^2.$$

Nedre grense for integrasjonen er åpenbart $x = 0$, og øvre grense for integrasjon blir når

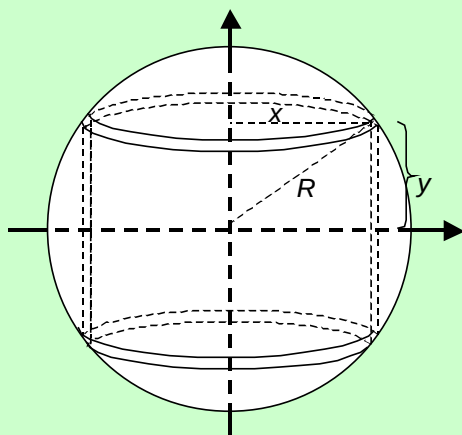
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Da blir volumet

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 2\pi x \cdot h \cdot dx = \int_0^2 2\pi x (4 - x^2) dx = \int_0^2 2\pi (4x - x^3) dx \\ &= 2\pi \left[2x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^2 = 2\pi \left(2 \cdot 2^2 - \frac{1}{4} \cdot 2^4 - 0 \right) = \underline{\underline{8\pi}} \end{aligned}$$

Eksempel 2.2.9: Bruk sylinderskall-metoden til å utlede formelen for volumet av ei kule med radius R .

Løsning:



Figuren viser at et sylinderskall med radius x har en høyde

$$h = 2y = 2\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Volumet av sylinderskallet blir

$$\begin{aligned} \Delta V &= 2\pi x \cdot h \cdot \Delta x = 2\pi x \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2} \cdot \Delta x \\ &= 4\pi x \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \Delta x \end{aligned}$$

Volumet av hele kula blir

$$V = \int_{x=0}^{x=R} dV = \int_0^R 4\pi x \sqrt{R^2 - x^2} dx = \underline{\underline{\frac{4}{3}\pi R^3}}.$$

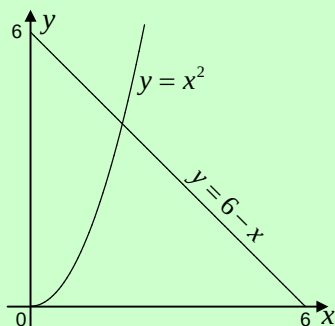
Integralet løses med substitusjonen $u = R^2 - x^2$.

Oppgave 2.2.4.

Så skal vi se et eksempel på rotasjon om x -aksen.

Eksempel 2.2.10: Ei flate avgrenses av x -aksen og av grafene til funksjonene $f(x) = x^2$ og $g(x) = 6 - x$. Finn volumet av det legemet som framkommer når denne flata roterer om x -aksen.

Løsning:



Figuren til venstre viser grafene til de to funksjonene.

De to grafene skjærer hverandre når

$$x^2 = 6 - x \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

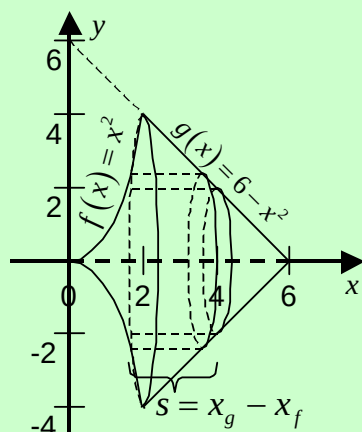
$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

Vi ser av figuren at vi må bruke $x = 2$.

Da er

$$y = x^2 = 2^2 = 4.$$

Så lar vi flata avgrenset av grafene og x -aksen rotere om x -aksen. Da oppstår situasjonen nedenfor:



Vi får nå liggende sylindrer med radius y og lengder

$$s = x_g - x_f$$

der x_g ligger på grafen til $y = g(x) = x^2$ og x_f ligger på grafen til $y = f(x) = 6 - x$. Vi får at

$$y = x_g^2 \Leftrightarrow x_g = \sqrt{y}$$

og

$$y = 6 - x_f \Leftrightarrow x_f = 6 - y.$$

Da blir

$$s = x_g - x_f = 6 - y - \sqrt{y}.$$

Volumet av et sylinderskall blir da

$$\Delta V = 2\pi y \cdot s \cdot \Delta y = 2\pi y(6 - y - \sqrt{y})\Delta y.$$

Volumet til hele legemet blir

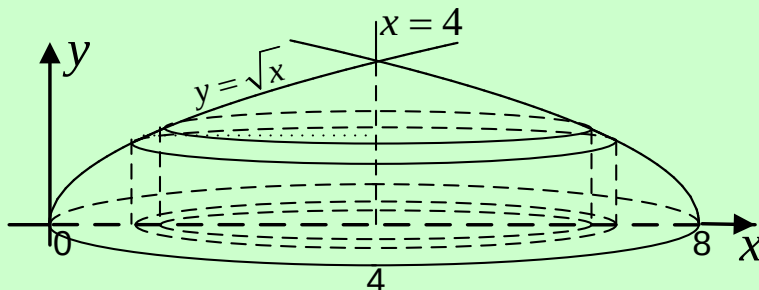
$$\begin{aligned} V &= \int_{y=0}^{y=4} \Delta V = \int_0^4 2\pi y(6 - y - \sqrt{y}) dy = \int_0^4 2\pi(6y - y^2 - y^{\frac{3}{2}}) dy \\ &= 2\pi \left[3y^2 - \frac{1}{3}y^3 - \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} \right]_0^4 = 2\pi \left(3 \cdot 4^2 - \frac{1}{3} \cdot 4^3 - \frac{2}{5} \cdot 4^{\frac{5}{2}} - 0 \right) = \underline{\underline{\frac{416}{15}\pi}} \end{aligned}$$

Oppgave 2.2.5.

Det er vanlig at volumberegninger kan utføres med både skive- og sylinderskall-metoden når vi har rotasjonssymmetriske legemer. For å illustrere dette, skal vi løse problemet i Eksempel 2.2.6 på nytt, men nå med sylinderskall-metoden.

Eksempel 2.2.11: Ei flate avgrenses av grafen til $f(x) = \sqrt{x}$, x -aksen, og linja $x = 4$. Finn volumet av det legemet som framkommer når denne flata roterer om linja $x = 4$.

Løsning: Figuren nedenfor illustrerer situasjonen:



Radien i sylinderflata blir

$$r = 4 - x,$$

mens høyden blir

$$y = \sqrt{x}.$$

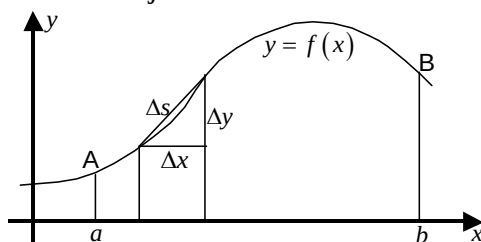
Da blir volumet av legemet

$$\begin{aligned} V &= \int_{x=0}^{x=4} 2\pi r \cdot h \cdot dx = 2\pi \int_0^4 (4-x)\sqrt{x} dx = 2\pi \int_0^4 (4x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}) dx = 2\pi \left[4 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \right]_0^4 \\ &= 2\pi \left(\frac{8}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} \cdot 4^{\frac{5}{2}} - 0 \right) = 2\pi \left(\frac{8}{3} \cdot (2^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} \cdot (2^2)^{\frac{5}{2}} \right) = 2\pi \left(\frac{8}{3} \cdot 2^3 - \frac{2}{5} \cdot 2^5 \right) = 2\pi \left(\frac{64}{3} - \frac{64}{5} \right) \\ &= \underline{\underline{\frac{256}{15} \pi}} \end{aligned}$$

Jeg håper at disse eksemplene har overbevist deg om at slike problemer løses ikke ved å plukke fram en eller annen formel fra en formelsamling. Du må forstå prinsippene bak metodene, og du må tegne en brukbar figur slik at du ser hvordan legemene ser ut. Da først kan du sette opp de integralene som må til for å løse problemene.

2.3. Beregning av buelengde.

Vi stiller oss nå dette problemet: Hvor lang er grafen til en funksjon $y = f(x)$ fra $x = a$ til $x = b$? Situasjonen er vist nedenfor.



Vi ønsker å finne lengden av grafen fra A til B. Vi tenker oss at vi avsetter mange punkter tett i tett på grafen. Mellom punktene trekker vi korte, rette linjer. Lengden av hver slik kort, rett linje kaller vi Δs . Av figuren ser vi at

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = \left(1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \right) \cdot (\Delta x)^2 \Leftrightarrow \Delta s = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2} \cdot \Delta x.$$

Så lar vi $\Delta x \rightarrow 0$. Da erstatter vi Δs med ds og Δx med dx , samtidig som $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$.

Dette fører til at

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Når vi summerer alle linjestykkene Δs , får vi tilnærmet lengden av grafen mellom A og B. Jo tettere vi avsetter punktene, jo bedre blir tilnærmingen. Derfor kan vi sette at buelengden fra A til B blir

$$s_{AB} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_A^B \Delta s = \int_{x=a}^{x=b} ds = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Dersom f er monotont voksende eller monotont avtakende mellom A og B, har f en invers funksjon. Da kan vi finne x som funksjon av y , slik at vi kan sette

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = \left(\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 + 1\right) \cdot (\Delta y)^2 \Leftrightarrow \Delta s = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 + 1} \cdot \Delta y.$$

Så lar vi $\Delta y \rightarrow 0$. Da erstatter vi Δs med ds og Δy med dy , samtidig som $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{dx}{dy}$.

Dette fører til at

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1} dy,$$

og buelengden mellom A og B blir

$$s_{AB} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_A^B \Delta s = \int_{y=c}^{y=d} ds = \int_c^d \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1} dy.$$

Her er c og d y -verdiene til henholdsvis A og B.

Vi får bruk for disse uttrykkene i andre sammenhenger også, og summerer derfor opp:

Dersom $y = f(x)$, er $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$ og $s = \int_{x=a}^{x=b} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$.

Dersom $x = f^{-1}(y)$, er $ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1} dy$ og $s = \int_{y=c}^{y=d} \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1} dy$.

I praksis viser det seg at formelen for buelengde ofte gir integraler som er vanskelige eller umulige å løse eksakt. Vi må da ty til [numeriske metoder](#) for å finne en tilnærmet verdi av integralet.

Eksempel 2.3.1: Finn lengden av grafen til $y = x^2$ fra $x = 0$ til $x = 2$.

Løsning: $y = x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x$.

Da blir

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + (2x)^2} = \sqrt{1 + 4x^2}$$

slik at lengden av grafen blir

$$s = \int_{x=0}^{x=2} ds = \int_0^2 \sqrt{1 + 4x^2} dx = \sqrt{17} + \frac{1}{4} \ln(\sqrt{17} + 4).$$

Her er integrasjonen utført med dataverktøy. Det kreves flere trinn med fantasifulle substitusjoner for å løse integralet for hand.

Eksempel 2.3.2: Finn lengden av grafen til $y = e^x$ fra $x = 0$ til $x = 1$.

Løsning: $y = e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x$.

Da blir

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + (e^x)^2} = \sqrt{1 + e^{2x}}.$$

Lengden av grafen blir

$$s = \int_{x=0}^{x=1} ds = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}} dx.$$

Dette integralet lar seg ikke løse eksakt. Vi finner en tilnærmet verdi med dataverktøy:

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}} dx \approx \underline{\underline{2.0035}}.$$

Eksempel 2.3.3: Løs problemet fra Eksempel 2.3.2 ved å bruke den inverse funksjonen til $y = e^x$.

Løsning: Ser at funksjonen er voksende.

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}.$$

Da er

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{y^2}}.$$

Grensene for integrasjonen blir

$$y = e^0 = 1 \text{ og } y = e^1 = e.$$

Lengden av grafen blir da

$$s = \int_{y=1}^{y=e} ds = \int_1^e \sqrt{1 + \frac{1}{y^2}} dy \approx \underline{\underline{2.0035}}.$$

Heller ikke her er det mulig å finne en eksakt verdi for integralet, slik at en tilnærmet verdi er funnet med dataverktøy.

Oppgave 2.3.1.

2.4. Areal av rotasjonsflater.

I forrige avsnitt så vi at lengden av et lite bue-element Δs er gitt ved

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

Når vi lar $\Delta s \rightarrow 0$, kan vi erstatte Δs med ds , slik at uttrykket for lengden av bue-elementet kan omformes til

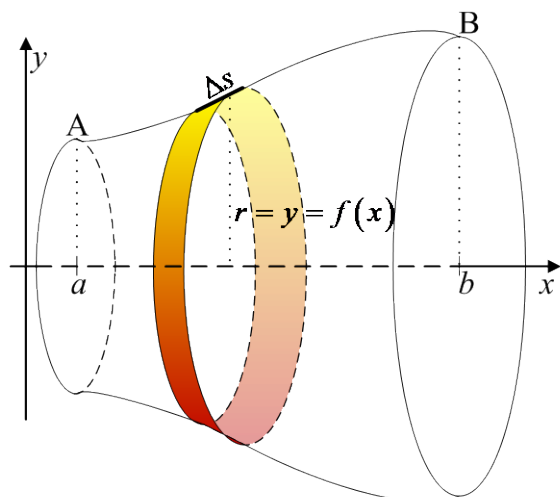
$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

når vi forutsetter at $y = f(x)$. Dersom f er strengt voksende eller strengt avtakende, og vi har den inverse funksjonen $x = f^{-1}(y)$, kan uttrykket for lengden av bue-elementet omformes til

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1} dy.$$

Vi skal nå vise hvordan vi kan benytte disse uttrykkene til å beregne arealet av den flaten som dannes når en buen roterer om en koordinat-akse.

2.4.1. Rotasjon om x-aksen.



Figuren til venstre viser hva som skjer når grafen til funksjonen

$$y = f(x)$$

roterer en gang om x-aksen. Vi tar for oss et tilfeldig lite bue-element på grafen. Dette lille bue-elementet vil da rotere i en sirkel med radius

$$r = y = f(x),$$

og vil definere et smalt "belte" med lengde $2\pi y$. Siden "beltet" har bredde Δs , vil "beltets" areal bli

$$\Delta A = 2\pi y \cdot \Delta s.$$

Arealet av den rotasjonsflaten som framkommer når hele grafen fra A til B roterer om x-aksen, blir da

$$A = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum \Delta A = \int_{x=a}^{x=b} dA = \int_{x=a}^{x=b} 2\pi y ds = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Dersom f er strengt voksende eller strengt avtakende slik at det eksisterer en invers funksjon $x = f^{-1}(y)$, kan det noen ganger være mer hensiktsmessig å beregne arealet av rotasjonsflaten med

$$A = \int_{y=c}^{y=d} 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy.$$

Eksempel 2.4.1: Beregn arealet av den rotasjonsflata som framkommer når grafen til $y = x^3$, $0 \leq x \leq 1$, roterer om x-aksen.

Løsning: Ved rotasjon om x-aksen er radien i rotasjonen lik $y = x^3$. Videre ser vi at

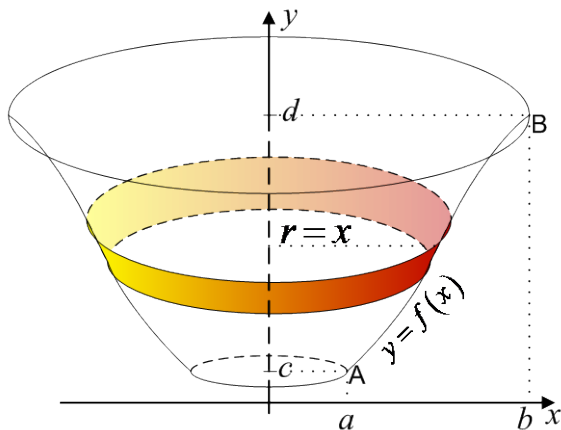
$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \Leftrightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 9x^4.$$

Da blir arealet

$$A = \int_0^1 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^1 2\pi x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx = \frac{\pi}{27} (10\sqrt{10} - 1).$$

Integrasjonen er her utført med dataverktøy. Men du kommer greit fram med substitusjonen $u = 1 + 9x^4$.

2.4.2. Rotasjon om y-aksen.



Figuren til venstre viser hva som skjer når grafen til

$$y = f(x)$$

roterer en gang om y-aksen. Som før følger vi et lite bue-element Δs . Radien i den sirkelen som bue-elementet beskriver, blir $r = x$, slik at arealet av beltet blir

$$\Delta A = 2\pi x \cdot \Delta s.$$

Arealet av den rotasjonsflaten som framkommer når hele grafen fra A til B roterer om y-aksen, blir da

$$A = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum \Delta A = \int_{x=a}^{x=b} dA = \int_{x=a}^{x=b} 2\pi x \, ds = \int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx.$$

Men dersom f er strengt voksende eller strengt avtakende slik at det eksisterer en invers funksjon $x = f^{-1}(y)$, kan det være hensiktsmessig å beregne arealet slik:

$$A = \int_{y=c}^{y=d} 2\pi f^{-1}(y) \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \, dy.$$

Eksempel 2.4.2: Beregn arealet av den rotasjonsflata som framkommer når grafen til $y = x^2$, $0 \leq x \leq \sqrt{2}$, roterer om y-aksen.

Løsning: Ved rotasjon om y-aksen blir radien i rotasjonen lik x . Videre er

$$\frac{dy}{dx} = 2x \Leftrightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4x^2.$$

Da blir arealet

$$A = \int_0^{\sqrt{2}} 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx = \int_0^{\sqrt{2}} 2\pi x \sqrt{1 + 4x^2} \, dx = \underline{\underline{\frac{13}{3}\pi}}.$$

Integrasjonen er her utført med dataverktøy. Men du kommer greit fram med substitusjonen $u = 1 + 4x^2$.

Vi avslutter med å la grafen rotere om både x- og y-aksen etter tur:

Eksempel 2.4.3: Beregn arealet av den rotasjonsflata som framkommer når grafen til $y = \cos x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, roterer om

- x-aksen.
- y-aksen.

Løsning: $y = \cos x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\sin x \Leftrightarrow \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \sin^2 x}.$

- a) Ved rotasjon om x -aksen er radien lik y . Da blir arealet av rotasjonsflata

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x} dx = \pi \left(\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1) \right).$$

Integrasjonen er utført med dataverktøy.

- b) Ved rotasjon om y -aksen er radien lik x . Da blir arealet av rotasjonsflata

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi x \sqrt{1 + \sin^2 x} dx \approx \underline{\underline{10.07}}.$$

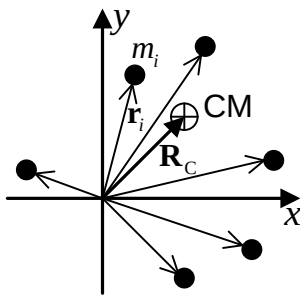
Det eksisterer ikke noen eksakt løsning av dette integralet.

Oppgave 2.4.1.

Hittil har vi kun sett på rotasjon om en koordinatakse. Du kan sette opp formler for rotasjon om en annen akse parallell med en koordinatakse ved å finne et uttrykk for rotasjonsradien, og ellers bruke et av de uttrykkene for ds som vi har brukt ovenfor.

2.5. Beregning av massesenter.

2.5.1. Definisjoner.



Figuren til venstre viser et lite utsnitt av en ”sky” av små partikler, der m_i er massen til en partikkel som har posisjonsvektor $\mathbf{r}_i$ i forhold til et fastlagt origo. Selv om figuren er to-dimensjonal, vil partikkelskyen generelt være tredimensjonal, slik at posisjonsvektoren kan skrives

$$\mathbf{r}_i = x_i \hat{\mathbf{i}} + y_i \hat{\mathbf{j}} + z_i \hat{\mathbf{k}}$$

der $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ og $\hat{\mathbf{k}}$ er enhetsvektorer langs henholdsvis x - y - og z -aksen (se heftet om ”forkunnskaper”). Vi definerer nå posisjonsvektoren $\mathbf{R}_C$ til partikkelskyens **massesenter** (CM) slik:

Massesenterets posisjon $\mathbf{R}_C$ i forhold til origo er

$$\mathbf{R}_C = \frac{1}{m} \sum m_i \mathbf{r}_i$$

der den samlede massen til alle partiklene er

$$m = \sum m_i.$$

Vi summerer over alle partiklene.

I praksis får vi mest å gjøre med sammenhengende, utstrakte legemer. Vi tenker oss at slike legemer er ”limt” sammen av bitte små biter, som hver har masse dm . Istedenfor å summere, må vi nå integrere:

$$\mathbf{R}_C = \frac{1}{m} \int \mathbf{r} dm$$

der legemets samlede masse er

$$m = \int dm$$

og integrasjonene tas over hele legemet. Men ”integrasjon over hele legemet” medfører at vi må integrere *i rommet*. Dette ligger utenfor rammen av dette heftet. Vi skal derfor begrense oss til å se på spesielle typer legemer, som vi kan handtere med våre kunnskaper.

Vi skal nå begrense oss til romlegemer som har konstant tetthet ρ . Dersom hele legemet har masse m og volum V , og en liten bit av legemet har masse dm og volum dV , så er tettheten

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{dm}{dV} \Leftrightarrow dm = \frac{m}{V} dV.$$

Dette gir

$$\mathbf{R}_C = \frac{1}{m} \int \mathbf{r} dm = \frac{1}{m} \int \mathbf{r} \left(\frac{m}{V} dV \right) = \frac{1}{V} \int \mathbf{r} dV.$$

Vi dekomponerer nå både $\mathbf{r}$ og $\mathbf{R}_C$ ved hjelp av enhetsvektorene $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ og $\hat{\mathbf{k}}$, og får

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$$

og

$$\mathbf{R}_C = X_C\hat{\mathbf{i}} + Y_C\hat{\mathbf{j}} + Z_C\hat{\mathbf{k}}.$$

Da blir

$$\mathbf{R}_C = \frac{1}{V} \int \mathbf{r} dV$$

$$X_C\hat{\mathbf{i}} + Y_C\hat{\mathbf{j}} + Z_C\hat{\mathbf{k}} = \frac{1}{V} \int (x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}) dV = \left(\frac{1}{V} \int x dV \right) \hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{1}{V} \int y dV \right) \hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{1}{V} \int z dV \right) \hat{\mathbf{k}}$$

som gir komponentlikningene

$$X_C = \frac{1}{V} \int x dV, \quad Y_C = \frac{1}{V} \int y dV, \quad Z_C = \frac{1}{V} \int z dV.$$

Vi summerer opp:

Dersom et legeme har konstant tetthet ρ , er massesenterets posisjonsvektor

$$\mathbf{R}_C = X_C\hat{\mathbf{i}} + Y_C\hat{\mathbf{j}} + Z_C\hat{\mathbf{k}}$$

gitt ved

$$X_C = \frac{1}{V} \int x dV, \quad Y_C = \frac{1}{V} \int y dV, \quad Z_C = \frac{1}{V} \int z dV,$$

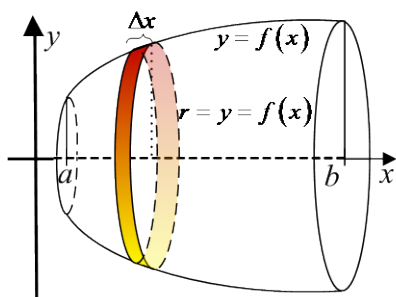
der V er legemets volum, og alle integrasjonene tas over hele legemet.

2.5.2. Masesenter for rotasjons-symmetriske legemer.

Vi kan få et rotasjons-symmetrisk legeme ved å la grafen til funksjonen

$$y = f(x), \quad a \leq x \leq b,$$

rottere om x -aksen. Det er umiddelbart klart at dersom tettheten til legemet er konstant må massesenteret ligge på x -aksen slik at $Y_C = Z_C = 0$. Vi trenger bare å finne X_C , og bruker skivemetoden.



Alle de små volumelementene som utgjør ei tynn skive med tykkelse dx vinkelrett på x -aksen har samme x -koordinat. Skiva har da volum

$$dV = \pi y^2 dx.$$

Siden legemets volum er

$$V = \int_{x=a}^{x=b} dV = \int_a^b \pi y^2 dx$$

blir

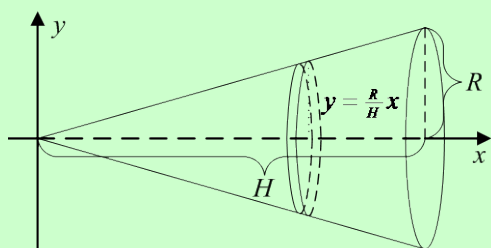
$$X_c = \frac{1}{V} \int_{x=a}^{x=b} x \cdot dV = \frac{1}{V} \int_{x=a}^{x=b} x \cdot \pi y^2 dx = \frac{\pi \int_{x=a}^{x=b} x \cdot y^2 dx}{\pi \int_{x=a}^{x=b} y^2 dx} = \frac{\int_{x=a}^{x=b} x \cdot y^2 dx}{\int_{x=a}^{x=b} y^2 dx}.$$

Vi kan også få et rotasjons-symmetrisk legeme ved å rotere grafen til $x = f^{-1}(y)$ om y -aksen. Da må massesenteret ligge på y -aksen slik at $X_c = Z_c = 0$. På samme måte som ovenfor blir

$$Y_c = \frac{1}{V} \int_{y=c}^{y=d} y \cdot dV = \frac{1}{V} \int_{y=c}^{y=d} y \cdot \pi x^2 dy = \frac{\pi \int_{y=c}^{y=d} y \cdot x^2 dy}{\pi \int_{y=c}^{y=d} x^2 dy} = \frac{\int_{y=c}^{y=d} y \cdot x^2 dy}{\int_{y=c}^{y=d} x^2 dy}.$$

Eksempel 2.5.1: Finn massesenteret til en rett kjegle med høyde H og grunnflateradius R .

Løsning:



Vi plasserer kjeglen med topp-punkt i origo og x -aksen som symmetriakse. Vi kan da tenke oss at kjeglen framkommer ved at den rette linja

$$y = \frac{R}{H} x$$

roterer om x -aksen. Da vil massesenteret ligge på x -aksen, og posisjonen er gitt ved

$$X_c = \frac{\int_0^H xy^2 dx}{\int_0^H y^2 dx} = \frac{\int_0^H x \left(\frac{R}{H} x\right)^2 dx}{\int_0^H \left(\frac{R}{H} x\right)^2 dx} = \frac{\left(\frac{R}{H}\right)^2 \int_0^H x^3 dx}{\left(\frac{R}{H}\right)^2 \int_0^H x^2 dx} = \frac{\frac{1}{4} [x^4]_0^H}{\frac{1}{3} [x^3]_0^H} = \frac{3}{4} \frac{H^4}{H^3} = \underline{\underline{\frac{3}{4} H}}.$$

Eksempel 2.5.2: Finn massesenteret til det rotasjonslegemet som framkommer når grafen til $y = f(x) = x^2$ og den rette linja $y = 4$ roterer om y -aksen.

Løsning: Massesenteret må ligge på y -aksen. Siden $y = x^2$, blir innsettingen i formelen for Y_c lett:

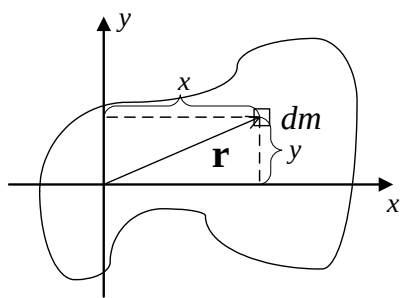
$$Y_c = \frac{\int_{y=0}^{y=4} yx^2 dy}{\int_{y=0}^{y=4} x^2 dy} = \frac{\int_0^4 y \cdot y dy}{\int_0^4 y dy} = \frac{\left[\frac{1}{3} y^3\right]_0^4}{\left[\frac{1}{2} y^2\right]_0^4} = \frac{\frac{1}{3} (4^3 - 0^3)}{\frac{1}{2} (4^2 - 0^2)} = \underline{\underline{\frac{8}{3}}}.$$

Oppgave 2.5.1.

2.5.3. Massesenter for plane legemer.

A) De grunnleggende formlene.

Vi skal nå se på *plane legemer*. Det er mest praktisk å legge plane legemer i xy -planet, slik at det ikke blir noen z -komponent. Massesenteret er da gitt ved



$$\begin{aligned}\mathbf{R}_C &= \frac{1}{m} \int \mathbf{r} \, dm = \frac{1}{m} \int (x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}) \, dm \\ &= \left(\frac{1}{m} \int x \, dm \right) \hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{1}{m} \int y \, dm \right) \hat{\mathbf{j}} = X_C \hat{\mathbf{i}} + Y_C \hat{\mathbf{j}}\end{aligned}$$

Her er

$$X_C = \frac{1}{m} \int x \, dm, \quad Y_C = \frac{1}{m} \int y \, dm$$

Integralene i uttrykkene for X_C og Y_C har fått egne navn:

$\int x \cdot dm$ kalles **statisk moment om y -aksen**.

$\int y \cdot dm$ kalles **statisk moment om x -aksen**.

Vi får enklere uttrykk dersom vi antar at tettheten er konstant over hele flata. Tettheten må nå uttrykkes i kg/m^2 . Dersom flata har masse m og areal A , mens et lite flate-element har masse dm og areal dA , blir tettheten

$$\rho = \frac{m}{A} = \frac{dm}{dA} \Leftrightarrow dm = \frac{m}{A} dA.$$

Dermed blir

$$X_C = \frac{1}{m} \int x \, dm = \frac{1}{m} \int x \left(\frac{m}{A} dA \right) = \frac{1}{A} \int x \, dA,$$

$$Y_C = \frac{1}{m} \int y \, dm = \frac{1}{m} \int y \left(\frac{m}{A} dA \right) = \frac{1}{A} \int y \, dA,$$

der arealet av flata er

$$A = \int dA.$$

Dette er de grunnleggende formlene som vi skal benytte i praksis.

Også her har integralene fått egne navn:

$M_y = \int x \, dA$ kalles **flatemomentet om y -aksen**,

$M_x = \int y \, dA$ kalles **flatemomentet om x -aksen**.

Med disse definisjonene kan koordinatene til massesenteret skrives:

$$X_C = \frac{M_y}{A}, \quad Y_C = \frac{M_x}{A}.$$

Vi summerer opp:

Massesenteret for ei flate som ligger i xy -planet er

$$\mathbf{R}_C = \frac{1}{m} \int \mathbf{r} dm = X_C \hat{\mathbf{i}} + Y_C \hat{\mathbf{j}}$$

der

$$X_C = \frac{1}{m} \int x dm, \quad Y_C = \frac{1}{m} \int y dm.$$

Dersom tettheten er konstant over hele flata, blir

$$X_C = \frac{1}{A} \int x dA = \frac{M_y}{A} \text{ der } M_y = \int x dA \text{ er flatemomentet om } y\text{-aksen,}$$

$$Y_C = \frac{1}{A} \int y dA = \frac{M_x}{A} \text{ der } M_x = \int y dA \text{ er flatemomentet om } x\text{-aksen.}$$

$$A = \int dA$$

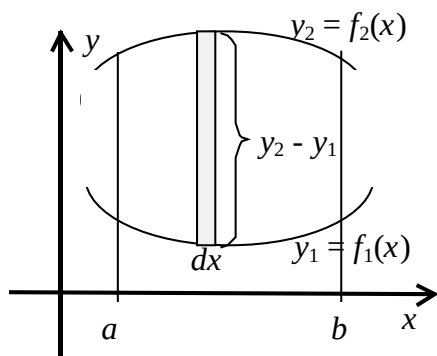
Alle integralene tas over hele flata.

Når vi skal integrere over ei flate, får vi vanligvis *dobbeltintegral* som vi ikke skal ta opp her. Vi skal derfor begrense oss til to situasjoner som vi kan handtere:

1. Flata deles opp i striper parallelt med y -aksen.
2. Flata deles opp i striper parallelt med x -aksen.

Vi skal se på de to situasjonene etter tur.

B) Striper parallelt med y -aksen.



Vi antar at flata er avgrenset av grafene til funksjonene

$$y_1 = f_1(x) \text{ og } y_2 = f_2(x),$$

samt av de to rette linjene

$$x = a \text{ og } x = b.$$

Se figuren til venstre.

Vi legger striper med bredde dx parallelt med y -aksen.

Hvis $y_2 > y_1$ når $a \leq x \leq b$, får hver stripe et areal

$$dA = (y_2 - y_1) dx$$

slik at

$$A = \int_{x=a}^{x=b} (y_2 - y_1) dx.$$

Alle flate-elementene innenfor ei stripe har nå samme x -verdi. Da blir massesenterets x -verdi

$$X_C = \frac{1}{A} \int_{x=a}^{x=b} x dA = \frac{1}{A} \int_{x=a}^{x=b} x (y_2 - y_1) dx.$$

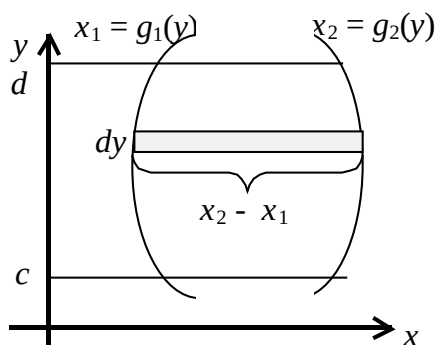
Det er ikke fullt så enkelt å finne Y_C , fordi elementene innenfor ei stripe har *ulike* y -verdier. Vi kan derfor ikke bruke formelen for Y_C direkte. Dette problemet løser vi ved å erstatte y i formelen for Y_C med avstanden til *midtpunktet* på stripa, som har y -koordinat

$$y_M = \frac{y_2 + y_1}{2}.$$

Da blir

$$Y_C = \frac{1}{A} \int_{x=a}^{x=b} y_M \cdot dA = \frac{1}{A} \int_{x=a}^{x=b} \frac{y_2 + y_1}{2} (y_2 - y_1) dx = \frac{1}{2A} \int_{x=a}^{x=b} (y_2^2 - y_1^2) dx.$$

C) Striper parallelt med x-aksen.



Vi skal nå anta at flata er avgrenset av grafene til $x_1 = g_1(y)$ og $x_2 = g_2(y)$ samt de to rette linjene $y = c$ og $y = d$. Da legger vi stripene parallelt med x-aksen. Se figuren til venstre.

Vi finner massesenteret med samme resonnement som når stripene ligger loddrett. Dersom $x_2 > x_1$ når $c \leq y \leq d$, blir

$$A = \int_{y=c}^{y=d} (x_2 - x_1) dy$$

og

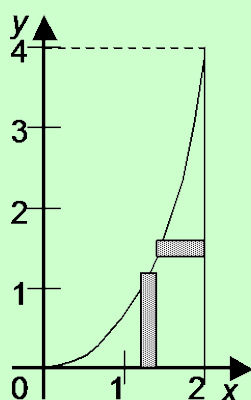
$$Y_C = \frac{1}{A} \int_{y=c}^{y=d} y \cdot (x_2 - x_1) dy,$$

$$X_C = \frac{1}{2A} \int_{x=c}^{x=d} (x_2^2 - x_1^2) dy.$$

Eksempel 2.5.3: Bestem massesenteret til flata som avgrenses av grafen til $y = x^2$, linja $x = 2$ og x-aksen på to måter:

- ved å legge stripene parallelt med y-aksen.
- ved å legge stripene parallelt med x-aksen.

Løsning: Situasjonene er illustrert nedenfor til venstre.



- En loddrett stripe i avstand x fra y-aksen har areal

$$dA = y \cdot dx = x^2 dx$$

slik at arealet blir

$$A = \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^2 = \frac{1}{3} (2^3 - 0^3) = \frac{8}{3}.$$

Da blir massesenterets x-koordinat

$$\begin{aligned} X_C &= \frac{1}{A} \int_{x=0}^{x=2} x(y_2 - y_1) dx = \frac{1}{\frac{8}{3}} \int_0^2 x \cdot (x^2 - 0) dx \\ &= \frac{3}{8} \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^2 = \frac{3}{32} (2^4 - 0^4) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Massesenterets y-koordinat blir

$$Y_C = \frac{1}{2A} \int_{x=0}^{x=2} (y^2 - 0^2) dx = \frac{1}{2 \cdot \frac{8}{3}} \int_0^2 (x^2)^2 dx = \frac{3}{16} \cdot \left[\frac{1}{5} x^5 \right]_0^2 = \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{5} (2^5 - 0) = \frac{6}{5}.$$

- Når vi skal bruke striper parallele med x-aksen, må vi først finne x uttrykt ved y :

$$y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}.$$

Vi kan selvsagt bruke det arealet som vi fant ovenfor. Men vi kan også beregne arealet også med utgangspunkt i vannrette striper. Av figuren ser vi at arealet av en slik vannrett stripe i avstand y fra x -aksen blir

$$dA = (2 - x) dy = (2 - \sqrt{y}) dy$$

slik at arealet blir

$$A = \int_0^4 (2 - \sqrt{y}) dy = \int_0^4 (2 - y^{\frac{1}{2}}) dy = \left[2y - \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = 2 \cdot 4 - \frac{2}{3} \cdot (4^{\frac{3}{2}}) - 0 = \frac{8}{3}.$$

Da blir

$$\begin{aligned} X_C &= \frac{1}{2A} \int_{y=0}^{y=4} (x_2^2 - x_1^2) dy = \frac{1}{2 \cdot \frac{8}{3}} \int_0^4 (2^2 - (\sqrt{y})^2) dy = \frac{3}{16} \int_0^4 (4 - y) dy \\ &= \frac{3}{16} \cdot \left[4y - \frac{1}{2} y^2 \right]_0^4 = \frac{3}{16} \cdot (4 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 4^2) - 0 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_C &= \frac{1}{A} \int_{y=0}^{y=4} y \cdot (x_2 - x_1) dy = \frac{1}{\frac{8}{3}} \int_0^4 y (2 - \sqrt{y}) dy = \frac{3}{8} \int_0^4 (2y - y^{\frac{3}{2}}) dy \\ &= \frac{3}{8} \cdot \left[y^2 - \frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}} \right]_0^4 = \frac{3}{8} \cdot (4^2 - \frac{2}{5} \cdot 4^{\frac{5}{2}}) - 0 = \frac{3}{8} \cdot (16 - \frac{2}{5} \cdot 2^5) = \frac{3}{8} \cdot \frac{16}{5} = \frac{6}{5} \end{aligned}$$

Oppgave 2.5.2.

2.5.4. Massesenter for krumme linjer.

En krum linje er gitt ved $y = f(x)$ eller ved $x = f^{-1}(y)$. Anta at tettheten ρ (som er gitt i kg/m) er konstant slik at

$$\rho = \frac{m}{L} = \frac{dm}{ds} \Leftrightarrow dm = \frac{m}{L} ds$$

der m er massen til linja, L er lengden til linja, mens dm og ds er henholdsvis masse og lengde til et lite element på linja. Koordinatene til massesenteret er da gitt ved

$$X_C = \frac{1}{m} \int x dm = \frac{1}{\cancel{m}} \int x \left(\frac{\cancel{m}}{L} ds \right) = \frac{1}{L} \int x ds$$

og

$$Y_C = \frac{1}{m} \int y dm = \frac{1}{\cancel{m}} \int y \left(\frac{\cancel{m}}{L} ds \right) = \frac{1}{L} \int y ds$$

der vi integrerer langs hele linja.

I avsnittet om [buelengde](#) har vi vist hvordan vi kan finne lengden L av et krumt linjestykke. Der fant vi bl.a. at:

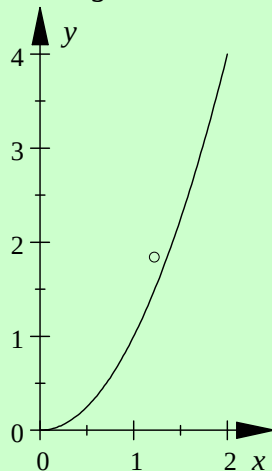
$$\text{Dersom } y = f(x), \text{ er } ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

$$\text{Dersom } x = f^{-1}(y), \text{ er } ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy.$$

Vi får bruk for disse uttrykkene nå også.

Eksempel 2.5.4: Beregn koordinatene til massesenteret til grafen til $y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$.

Løsning:



$$y = x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x$$

slik at

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + (2x)^2} dx = \sqrt{1 + 4x^2} dx.$$

Da blir

$$L = \int_{x=0}^{x=2} ds = \int_0^2 \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{1}{4} \ln(\sqrt{17} + 4) + \sqrt{17} \approx 4.6468.$$

$$X_C = \frac{1}{L} \int_{x=0}^{x=2} x ds = \frac{1}{L} \int_0^2 x \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{12} (17\sqrt{17} - 1) \approx 1.239.$$

$$\begin{aligned} Y_C &= \frac{1}{L} \int_{x=0}^{x=2} y ds = \frac{1}{L} \int_0^2 x^2 \sqrt{1 + 4x^2} dx \\ &= \frac{1}{L} \cdot \left(\frac{33}{16} \sqrt{17} - \frac{1}{64} \ln(\sqrt{17} + 4) \right) \approx 1.823 \end{aligned}$$

På grafen er massesenteret tegnet inn med en liten ring.

Merk at massesenteret ikke ligger på selve linja. Du kan visualisere massesenteret slik: Tenk deg at linja spenner ut en masseløs membran. Denne membranen kan nå balansere på en spiss som plasseres i massesenteret.

Oppgave 2.5.3.

2.5.5. Oppdeling i del-legemer.

Definisjonen på massesenter

$$\mathbf{R}_C = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{m}$$

gjelder egentlig når m_i er massen til en *partikkel* i legemet vårt. Men formelen gjelder også dersom legemet vårt består av del-legemer med kjent masse m_i , og der $\mathbf{r}_i$ oppfattes som posisjonsvektoren til del-legemets massesenter. Jeg skal nøye meg med å vise at dette stemmer for et legeme som deles opp i to del-legemer med masse m_1 og m_2 , og volum V_1 og V_2 . For hvert av disse del-legemene er massesentrene gitt ved

$$\mathbf{r}_1 = \frac{1}{m_1} \sum_{V_1} m_i \mathbf{r}_i \Leftrightarrow \sum_{V_1} m_i \mathbf{r}_i = m_1 \mathbf{r}_1 \text{ der vi summerer over } V_1$$

og

$$\mathbf{r}_2 = \frac{1}{m_2} \sum_{V_2} m_i \mathbf{r}_i \Leftrightarrow \sum_{V_2} m_i \mathbf{r}_i = m_2 \mathbf{r}_2 \text{ der vi summerer over } V_2.$$

Da blir

$$\mathbf{R}_C = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{m} = \frac{1}{m} \left(\sum_{V_1} m_i \mathbf{r}_i + \sum_{V_2} m_i \mathbf{r}_i \right) = \frac{1}{m} (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2).$$

Vi kan enkelt benytte samme resonnement dersom legemet deles opp i n deler. Dette kan vi benytte oss av til å beregne massesenteret til legemer som kan deles opp i enkle del-legemer. Jeg skal illustrere teknikken i et par eksempler.

Eksempel 2.5.5:



To svært tynne metallstenger med lengde $OA = l$ og $OB = \frac{1}{2}l$ sveises sammen til en vinkel slik figuren til venstre viser. Finn vinkelens massesenter.

Løsning: La hele legemets masse være m . Siden stanga OA er dobbelt så lang som OB, må den også ha dobbelt så stor masse. Dette gir at massene til OA og OB blir henholdsvis

$$m_{OA} = \frac{2}{3}m, \text{ og } m_{OB} = \frac{1}{3}m.$$

Begge stengene har sitt massesenter midt på, slik at

$$\mathbf{r}_{OA} = \frac{1}{2}l\hat{\mathbf{i}}, \text{ og } \mathbf{r}_{OB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}l\hat{\mathbf{j}} = \frac{1}{4}l\hat{\mathbf{j}}.$$

Legemets massesenter er da gitt ved

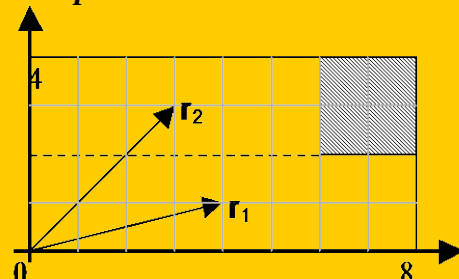
$$\mathbf{R} = \frac{1}{m}(m_{OA}\mathbf{r}_{OA} + m_{OB}\mathbf{r}_{OB}) = \frac{1}{m}\left(\frac{2}{3}m \cdot \frac{1}{2}l\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{3}m \cdot \frac{1}{4}l\hat{\mathbf{j}}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{3}l\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{12}l\hat{\mathbf{j}}}}.$$

Vi kan føre et tilsvarende resonnement dersom vi fjerner en bit fra et legeme. Anta at m er massen og $\mathbf{R}_C$ er massesenteret til et legeme som framkommer når vi fjerner et stykke med masse m_2 og massesenter $\mathbf{r}_2$ fra et legeme med masse m_1 og massesenter $\mathbf{r}_1$. Da får vi at

$$\mathbf{R}_C = \frac{1}{m}(m_1\mathbf{r}_1 - m_2\mathbf{r}_2).$$

I neste eksempel skal vi illustrere bruken av denne formelen.

Eksempel 2.5.6:



Ei skive består av et rektangel med sidekanter 8 og 4, der et kvadratisk hjørne med sidekant 2 er fjernet. Se figuren til venstre. Finn massesenteret til skiva.

Løsning: Jeg skal løse oppgaven på to måter.

Først deler jeg skiva inn i to deler slik den stiplede linja på figuren viser. Hele skiva har areal

$$A = 8 \cdot 4 - 2^2 = 28.$$

Dersom hele skiva har masse m , blir tettheten (som oppgis i kg/m^2)

$$\rho = \frac{m}{A} = \frac{m}{28}.$$

Nedre del får massen

$$m_1 = \rho \cdot (8 \cdot 2) = \frac{m}{28} \cdot 16 = \underline{\underline{\frac{4}{7}m}}$$

og øvre del får massen

$$m_2 = \rho \cdot (6 \cdot 2) = \frac{m}{28} \cdot 12 = \underline{\underline{\frac{3}{7}m}}.$$

Hver av delene har massesenter midt i. Av figuren ser vi at

$$\mathbf{r}_1 = 4\hat{\mathbf{i}} + 1\hat{\mathbf{j}}$$

og

$$\mathbf{r}_2 = 3\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}.$$

Da blir massesenteret gitt ved

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_C &= \frac{1}{m}(m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2) = \frac{1}{m}\left(\frac{4}{7}m(4\hat{\mathbf{i}} + 1\hat{\mathbf{j}}) + \frac{3}{7}m(3\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}})\right) \\ &= \frac{1}{7}(16\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} + 9\hat{\mathbf{i}} + 9\hat{\mathbf{j}}) = \underline{\underline{\frac{25}{7}\hat{\mathbf{i}} + \frac{13}{7}\hat{\mathbf{j}}}}\end{aligned}$$

Så skal jeg løse problemet ved å ta utgangspunkt i rektangelet, og fjerne bidraget fra det lille kvadratet. Hvis vi kaller rektangelets masse og massesenter for m_R og $\mathbf{r}_R$, og kvadratets masse og massesenter for m_K og $\mathbf{r}_K$, kan vi sette opp (se figuren, og kontroller massesentrene til rektangelet og til kvadratet):

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_C &= \frac{1}{m}(m_R\mathbf{r}_R - m_K\mathbf{r}_K) = \frac{1}{m}\left(\frac{m}{28} \cdot (8 \cdot 4) \cdot (4\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}) - \frac{m}{28} \cdot (2 \cdot 2) \cdot (7\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}})\right) \\ &= \frac{8}{7}(4\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}) - \frac{1}{7}(7\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}) = \underline{\underline{\frac{25}{7}\hat{\mathbf{i}} + \frac{13}{7}\hat{\mathbf{j}}}}\end{aligned}$$

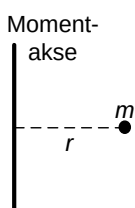
Og dette er samme resultat som før.

Oppgave 2.5.4.

2.6. Beregning av treghetsmoment.

2.6.1. Definisjoner.

Først de grunnleggende definisjonene:



La en liten punktformet partikkel med masse m ha en avstand r fra en akse. Da er denne partikkelens treghetsmoment om aksen definert ved

$$I = m \cdot r^2.$$

Aksen kalles gjerne for *momentakse*.

Vi kan tenke oss at et legeme består av mange slike partikler. Da får vi:

Dersom et legeme består av n partikler der partikkel nr i har masse m_i og avstand r_i fra en momentakse A , er legemets **treghetsmoment** om denne momentaksen

$$I_A = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2.$$

Legg merke til at treghetsmomentet er ikke en egenskap ved et legeme slik for eksempel masse er. Treghetsmomentet avhenger av legemets posisjon i forhold til momentaksen.

I praksis er det vanligvis ikke mulig å foreta en summering slik definisjonen ovenfor angir. Vi benytter heller integrasjon. Da antar vi at legemet er bygd opp av småbiter, der en bit med masse dm har avstand r fra aksen. Da får vi:

Treghetsmomentet til et legeme om en akse A er

$$I_A = \int r^2 dm$$

der r er avstanden fra et masse-element dm til aksen A , og integrasjonen tas over hele legemet.

Denne definisjonen fører til at vi generelt må integrere i rommet, noe som krever kjennskap til trippelintegral. Vi skal imidlertid begrense oss til spesielle situasjoner der vi klarer oss med vanlige enkelt-integral. Vi skal også se på et par hjelpesetninger som vil forenkle beregningen av treghetsmoment.

2.6.2. Treghetsmomentet for en linje i et plan.

Vi skal nå beregne treghetsmomentet for et legeme som kan betraktes som en tynn linje i et plan. Vi skal la momentaksen stå vinkelrett på legemets plan. Vi skal forutsette at det tynne legemet er *homogent*, noe som bl.a. innebærer at tettheten er konstant. For et slikt legeme er det naturlig å uttrykke tettheten i kg/m. Dersom legemet har lengde L og masse m , og vi plukker ut et tilfeldig lite element med lengde ds og masse dm , er tettheten

$$\rho = \frac{m}{L} = \frac{dm}{ds} \quad \Leftrightarrow \quad dm = \frac{m}{L} ds.$$

Da blir treghetsmomentet om en akse vinkelrett på legemets plan

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \frac{m}{L} ds = \frac{m}{L} \int r^2 ds$$

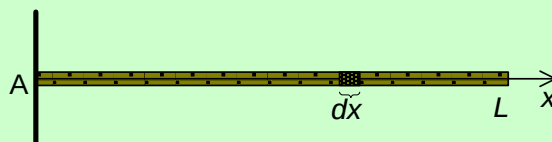
der r er avstanden fra aksen til et bue-element ds , og vi integrerer over hele legemet.

Eksempel 2.6.1: Finn treghetsmomentet for en tynn stav med lengde L og masse m om disse aksene:

- Aksen står vinkelrett på staven gjennom stavens ene ende A .
- Aksen står vinkelrett på staven gjennom stavens midtpunkt C (stavens massesenter).

Løsning:

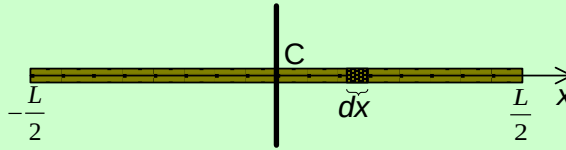
- Situasjonen er illustrert nedenfor:



Her er dx et lite masse-element på staven, mens x er avstanden fra masse-elementet til aksen. Da blir treghetsmomentet om aksen gjennom A :

$$I_A = \frac{m}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{m}{L} \cdot \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^L = \frac{m}{L} \cdot \frac{1}{3} L^3 = \underline{\underline{\frac{1}{3} mL^2}}.$$

b) Situasjonen er illustrert nedenfor:



Nå blir treghetsmomentet om aksene gjennom C:

$$I_C = \frac{m}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \frac{m}{L} \cdot \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{m}{L} \cdot \frac{1}{3} \left(\left(\frac{L}{2} \right)^3 - \left(-\frac{L}{2} \right)^3 \right) = \underline{\underline{\frac{1}{12} m L^2}}.$$

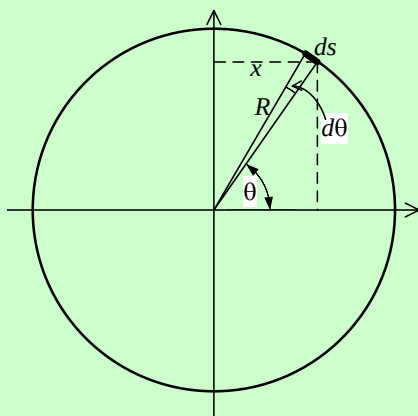
Vi skal senere vise at når vi kjenner treghetsmomentet til et legeme om legemets massesenter, kan vi bruke **Steiners setning (parallellakse-setningen)** til å finne legemets treghetsmoment om enhver annen akse parallell med aksene gjennom massesenteret.

Neste eksempel er adskillig mer komplisert, og inneholder en integrasjonsteknisk finesse.

Eksempel 2.6.2: Finn treghetsmomentet for en tynn ring med radius R og masse m om en akse langs en diameter.

Løsning: Vi vet at lengden av ringen er $L = 2\pi R$. Så plasserer vi ringen med sentrum i origo som vist på figuren til venstre nedenfor, og bruker y -aksen som momentakse.

Vi plukker ut et lite bue-element ds . Nå blir integrasjonene enklest dersom vi benytter vinkelen θ som integrasjonsvariabel. Av figuren ser vi at $x = R \cos \theta$. Videre vet vi at når vinkler måles i radianer, blir



$$d\theta = \frac{ds}{R} \Leftrightarrow ds = R \cdot d\theta.$$

Da får vi:

$$\begin{aligned} I &= \frac{m}{L} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} x^2 ds = \frac{m}{2\pi R} \int_0^{2\pi} (R \cos \theta)^2 \cdot R d\theta \\ &= \frac{mR^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \end{aligned}$$

Integralen løses enklest når vi husker at

$$\cos(2\theta) = 2 \cos^2 \theta - 1 \Leftrightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\theta).$$

Da blir

$$\begin{aligned} I &= \frac{mR^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{mR^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\theta) \right) d\theta = \frac{mR^2}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \theta + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{mR^2}{2\pi} \left(\frac{1}{2} \cdot 2\pi - \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot \sin(4\pi) - \frac{1}{4} \cdot \sin 0 \right) = \frac{mR^2}{2\pi} \cdot \pi = \underline{\underline{\frac{1}{2} m R^2}} \end{aligned}$$

Oppgave 2.6.1.

2.6.3. Treghetsmoment for plant legeme.

For et plant legeme (ei flate) er det naturlig å uttrykke tettheten i kg/m^2 . Dersom legemet er homogent, blir tettheten

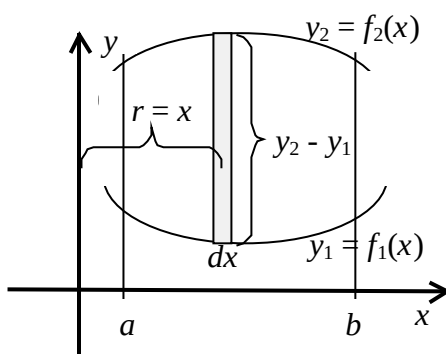
$$\rho = \frac{m}{A} = \frac{dm}{dA} \Leftrightarrow dm = \frac{m}{A} dA$$

der m og A er flatas masse og areal, mens dm og dA er masse og areal til et lite flate-element. Da blir treghetsmomentet om en akse A gitt ved:

$$I_A = \int r^2 dm = \int r^2 \left(\frac{m}{A} dA \right) = \frac{m}{A} \int r^2 dA$$

der r er avstanden fra flate-elementet til aksene, og vi integrerer over hele flata.

Vi skal i første omgang begrense oss til et spesialtilfelle: Flata avgrenses av grafene til to funksjoner $y_1 = f_1(x)$ og $y_2 = f_2(x)$, og av de to rette linjene $x = a$ og $x = b$. Dessuten skal vi la y -aksen være momentakse. Se figuren nedenfor til venstre.



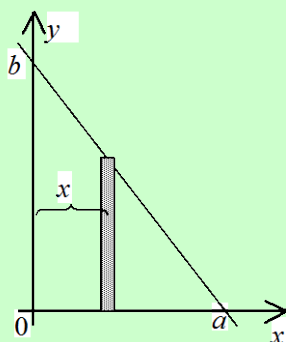
Her merker vi oss at det skraverte flate-elementet med bredde dx og høyde $h = y_2 - y_1$ har avstand x fra y -aksen og areal

$$dA = h \cdot dx = (y_2 - y_1) dx.$$

Hvis $y_2 > y_1$ når $a \leq x \leq b$, blir flatas treghetsmoment om y -aksen

$$I_y = \frac{m}{A} \int_a^b r^2 dA = \frac{m}{A} \int_a^b x^2 (y_2 - y_1) dx$$

Eksempel 2.6.3: Finn treghetsmomentet til en rettvisklet trekant om en av trekantens kateter.



Løsning:

Setter at trekantens kateter har lengder a og b . Plasserer trekanten i et koordinatsystem som vist til venstre. Da avgrenses trekanten av koordinataksene og grafen til den rette linja

$$y = -\frac{b}{a}x + b.$$

Arealet av trekanten er $A = \frac{1}{2}ab$.

Treghetsmomentet om y -aksen blir

$$\begin{aligned} I_y &= \frac{m}{A} \int_0^a x^2 (y - 0) dx = \frac{m}{A} \int_0^a x^2 \left(-\frac{b}{a}x + b \right) dx = \frac{m}{A} \left(-\frac{b}{a} \int_0^a x^3 dx + b \int_0^a x^2 dx \right) \\ &= \frac{m}{A} \left(-\frac{b}{a} \left[\frac{1}{4}x^4 \right]_0^a + b \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^a \right) = \frac{m}{\frac{1}{2}ab} \left(-\frac{b}{4a} \cdot a^4 + \frac{b}{3} \cdot a^3 \right) = \underline{\underline{\frac{1}{6}ma^2}} \end{aligned}$$

Hittil har vi kun sett på treghetsmoment om y -aksen. Men vi kan finne treghetsmoment om x -aksen på samme måte.

Oppgave 2.6.2. (Du får bruk for resultatene i neste oppgave).

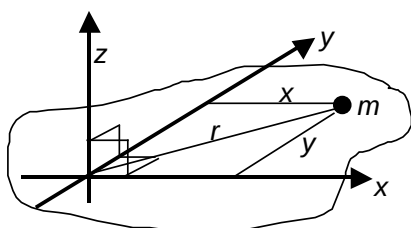
Dersom vi kjenner treghetsmomentene for ei plan flate som ligger i xy -planet om både x - og y -aksen, kan vi finne treghetsmomentet for flata om en akse som står *vinkelrett* på planet gjennom origo ved hjelp av setningen nedenfor:

Setningen om det polare treghetsmomentet:

Et plant legeme plasseres i xy -planet. Treghetsmomentene om x -aksen og om y -aksen kalles henholdsvis I_x og I_y . Da blir treghetsmomentet om en akse vinkelrett på det plane legemet gjennom origo

$$I_z = I_x + I_y.$$

Bevis:



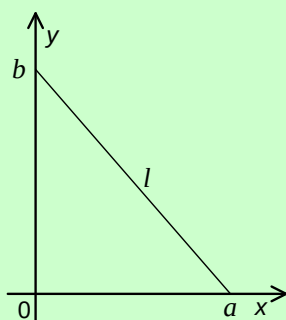
Figuren viser et plant legeme som ligger i xy -planet. Avstanden fra origo til et massepunkt m_i er r_i . Av figuren ser vi at $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$.

Da blir treghetsmomentet til det plane legemet om z -aksen

$$\begin{aligned} I_z &= \sum m_i r_i^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) \\ &= \sum m_i x_i^2 + \sum m_i y_i^2 = \underline{\underline{I_y + I_x}} \end{aligned}$$

Nedenfor ser du et eksempel på bruken av denne setningen.

Eksempel 2.6.4: Finn treghetsmomentet til en rettvinklet trekant om en akse vinkelrett på trekanten gjennom katetenes skjæringspunkt.



Løsning:

Fra Eksempel 3.1 vet vi at treghetsmomentet for trekanten om y -aksen er $I_y = \frac{1}{6}ma^2$. En ombytting av x - og y -aksene gir direkte at treghetsmomentet om x -aksen må bli $I_x = \frac{1}{6}mb^2$. Da blir treghetsmomentet om z -aksen (en akse vinkelrett på planet gjennom origo)

$$I_z = I_x + I_y = \frac{1}{6}mb^2 + \frac{1}{6}ma^2 = \frac{1}{6}m(a^2 + b^2) = \underline{\underline{\frac{1}{6}ml^2}}$$

der den siste omformingen følger direkte av Pytagoras.

Oppgave 2.6.3.

2.6.4. Treghetsmoment for rotasjonssymmetrisk legeme.

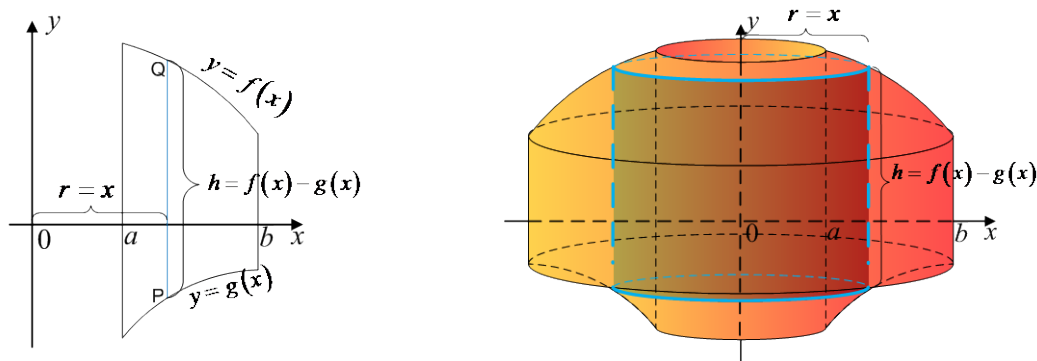
Vi skal igjen forutsette at legemet er *homogent*, slik at tettheten ρ er gitt ved

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{dm}{dV} \Leftrightarrow dm = \frac{m}{V} dV$$

der m er massen og V er volumet til legemet. Da blir treghetsmomentet til et romlegeme om en akse A gitt ved

$$I_A = \int r^2 dm = \int r^2 \left(\frac{m}{V} dV \right) = \frac{m}{V} \int r^2 dV$$

der vi må integrere over hele legemet. Generelt vil det kreve et trippel-integral. Men noen ganger kan vi klare oss med vanlige integral. Dette gjelder spesielt hvis legemet er rotasjons-symmetrisk og symmetriaksen er momentakse. Da kan vi beregne treghetsmomentet ved hjelp av *sylinderskallmetoden* som du forhåpentlig kjenner fra før.



For sikkerhets skyld skal vi repetere hovedtrekkene. La ei flate i xy -planet være avgrenset av grafene til de to funksjonene $y_1 = f(x)$ og $y_2 = g(x)$, linjene $x = a$ og $x = b$ slik figuren til venstre ovenfor viser. Jeg skaffer meg et rotasjonslegeme med y -aksen som symmetriakse ved å rotere denne flata om y -aksen. Linja PQ som har avstand x fra aksen skaper da ei sylinderflata med areal

$$A = 2\pi x \cdot h = 2\pi x(f(x) - g(x)).$$

Utenpå denne sylinderflata legger vi et tynt sjikt med tykkelse dx . Da får vi et sylinderskall med volum

$$dV = A \cdot dx = 2\pi x(f(x) - g(x)) \cdot dx$$

slik at treghetsmomentet til hele legemet om y -aksen blir

$$\begin{aligned} I_y &= \int_{x=a}^{x=b} x^2 \cdot dm = \frac{m}{V} \int_{x=a}^{x=b} x^2 \cdot dV = \frac{m}{V} \int_a^b x^2 \cdot 2\pi x(f(x) - g(x)) dx \\ &= \frac{2\pi m}{V} \int_a^b x^3 (f(x) - g(x)) dx \end{aligned}$$

Noen ganger må vi også finne volumet til legemet. Det gjør vi også med sylinderskallmetoden:

$$V = \int_a^b 2\pi x(f(x) - g(x)) dx.$$

Innsetting og forkorting av 2π gir nå at treghetsmomentet om y -aksen blir

$$I_y = m \cdot \frac{\int_a^b x^3 (f(x) - g(x)) dx}{\int_a^b x (f(x) - g(x)) dx}.$$

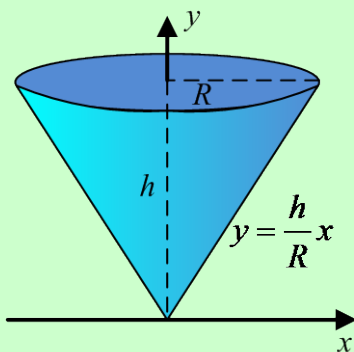
Prøv selv å sette opp formel for treghetsmomentet om x -aksen når x -aksen er symmetriakse!

Eksempel 2.6.5: En rett sylinder har høyde h og sirkelformet radius R . Finn treghetsmomentet til denne sylindere om symmetriaksen.

Løsning: Vet at volumet av en sylinder er $V = \pi R^2 h$. I formelen for treghetsmoment settes $f(x) = h$ og $g(x) = 0$, og vi får at treghetsmomentet om y -aksen blir

$$\begin{aligned} I_y &= \frac{2\pi m}{V} \int_a^b x^3 (f(x) - g(x)) dx = \frac{2\pi m}{\pi R^2 h} \int_0^R x^3 (h - 0) dx = \frac{2m}{R^2 h} \cdot h \int_0^R x^3 dx \\ &= \frac{2m}{R^2} \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^R = \frac{2m}{R^2} \cdot \frac{1}{4} R^4 = \underline{\underline{\frac{1}{2} m R^2}} \end{aligned}$$

Eksempel 2.6.6: En rett kjegle har høyde h og sirkelformet radius R . Finn treghetsmomentet til denne kjeglen om kjeglens symmetriakse.

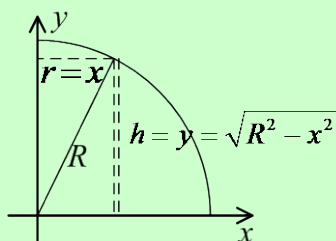


Løsning: Vet at kjeglen har volum $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$. Vi får enklest regninger når vi plasserer kjeglen med spissen i origo. Da framkommer kjeglen når flata avgrenset av grafen til den rette linja $y = \frac{h}{R}x$ og linja $y = h$ roterer om y -aksen (se figuren til venstre). I formelen for treghetsmoment settes da $f(x) = h$ og $g(x) = \frac{h}{R}x$, og vi får at treghetsmomentet om y -aksen blir

$$\begin{aligned} I_y &= \frac{2\pi m}{V} \int_a^b x^3 (f(x) - g(x)) dx = \frac{2\pi m}{\frac{1}{3} \pi R^2 h} \int_0^R x^3 \left(h - \frac{h}{R}x \right) dx \\ &= \frac{6m}{R^2 h} \left(h \int_0^R x^3 dx - \frac{h}{R} \int_0^R x^4 dx \right) = \frac{6m}{R^2 h} \left(h \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^R - \frac{h}{R} \left[\frac{1}{5} x^5 \right]_0^R \right) \\ &= \frac{6m}{R^2 h} \left(\frac{1}{4} h R^4 - \frac{1}{5} h R^4 \right) = \frac{6m}{R^2 h} \cdot \frac{1}{20} h R^4 = \underline{\underline{\frac{3}{10} m R^2}} \end{aligned}$$

Eksempel 2.6.7: Finn treghetsmomentet for ei kule med masse m og radius R om en akse gjennom kulas sentrum.

Løsning:



Figuren til venstre viser den sirkelbuen som roterer om y -aksen, og som danner øvre halvkule. Nedre halvkule blir helt lik. Da blir treghetsmomentet om y -aksen:

$$\begin{aligned} I_y &= \frac{2\pi m}{V} \cdot \int_0^R x^3 \left(2\sqrt{R^2 - x^2} \right) dx \\ &= \frac{2\pi m}{\frac{4}{3} \pi R^3} \int_0^R x^2 \left(\sqrt{R^2 - x^2} \right) (2x dx) \end{aligned}$$

Her har jeg satt inn at volumet av ei kule er $V = \frac{4}{3} \pi R^3$, og har husket at når nedre halvkule tas med blir høyden $h = 2\sqrt{R^2 - x^2}$. Videre har jeg forberedt substitusjonen

$$u = R^2 - x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} du = -2x dx \\ x^2 = R^2 - u \end{cases}$$

Jeg setter inn, forkorter, og benytter at når $x = 0$ er $u = R^2$, og når $x = R$ er $u = 0$. Da blir

$$I_y = \frac{3m}{2R^3} \int_{R^2}^0 (R^2 - u)(\sqrt{u})(-du) = \frac{3m}{2R^3} \int_0^{R^2} (R^2 u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{3}{2}}) du = \frac{3m}{2R^3} \left(\left[R^2 \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} \right]_0^{R^2} \right)$$

$$= \frac{3m}{2R^3} \left(R^2 \cdot \frac{2}{3} R^3 - \frac{2}{5} R^5 \right) = \frac{3m}{2R^3} \cdot \frac{4}{15} R^5 = \underline{\underline{\frac{2}{5} m R^2}}$$

Oppgave 2.6.4.

2.6.5. Sammensatte legemer.

Anta at et legeme er satt sammen av to andre legemer som har treghetsmoment

$$I_1 = \sum_{V_1} r_i^2 m_i \quad \text{og} \quad I_2 = \sum_{V_2} r_i^2 m_i$$

om samme momentakse. Det sammensatte legemet får da treghetsmoment

$$I = \sum_{V_1+V_2} r_i^2 m_i = \sum_{V_1} r_i^2 m_i + \sum_{V_2} r_i^2 m_i = I_1 + I_2.$$

om denne aksen. Denne formelen kan lett utvides til flere del-legemer.

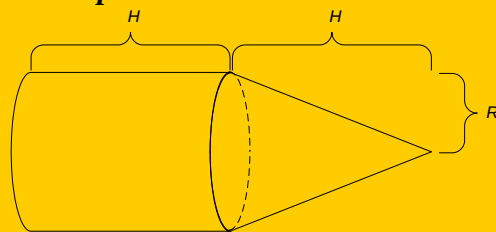
Vi kan altså legge sammen treghetsmomentene til de to legemene. I prinsippet er dette enkelt. I praksis kan det oppstå problemer fordi den formelen for treghetsmomentet til det sammensatte legemet som vi skal fram til, inneholder massen til *hele* legemet, mens formlene for treghetsmomentene til del-legemene inneholder massene til disse del-legemene. Dersom del-legemene har samme tetthet kan vi løse dette problemet slik:

La m_1 og V_1 være henholdsvis masse og volum til del-legeme 1, mens m og V er masse og volum til hele det sammensatte legemet. Da er

$$\rho = \frac{m_1}{V_1} = \frac{m}{V} \quad \Leftrightarrow \quad m_1 = m \cdot \frac{V_1}{V}.$$

På denne måten finner vi massen til hvert del-legeme uttrykt ved massen til hele legemet.

Eksempel 2.6.8:



Et legeme med masse m består av en rett sylinder med radius R og høyde H , som har en rett kjegle med radius R og høyde H festet til toppflaten. Sylindere og kjeglen har felles symmetriakse. Finn treghetsmomentet til legemet om symmetriaksen.

Løsning: Sylindere har volum $V_s = \pi R^2 H$, mens kjeglen har volum $V_k = \frac{1}{3} \pi R^2 H$. Samlet volum for hele legemet er da

$$V = V_s + V_k = \pi R^2 H + \frac{1}{3} \pi R^2 H = \frac{4}{3} \pi R^2 H.$$

La m være massen til det sammensatte legemet. Sylindere masse blir da

$$m_s = m \cdot \frac{V_s}{V} = m \cdot \frac{\pi R^2 H}{\frac{4}{3} \pi R^2 H} = \frac{3}{4} m,$$

mens kjeglens masse blir

$$m_K = m \cdot \frac{V_K}{V} = m \cdot \frac{\frac{1}{3}\pi R^2 H}{\frac{4}{3}\pi R^2 H} = \frac{1}{4}m.$$

Vi har allerede funnet at sylindersens treghetsmoment om symmetriaksen er

$$I_S = \frac{1}{2}m_S R^2,$$

og at kjeglens treghetsmoment om symmetriaksen er

$$I_K = \frac{3}{10}m_K R^2.$$

Legemets treghetsmoment om symmetriaksen blir da

$$I = I_S + I_K = \frac{1}{2}m_S R^2 + \frac{3}{10}m_K R^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}m R^2 + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{4}m R^2 = \underline{\underline{\frac{9}{20}m R^2}}.$$

Vi kan bruke samme prinsipp dersom vi fjerner en bit fra et legeme. Dersom et legeme med treghetsmoment I framkommer ved at vi fjerner en bit med treghetsmoment I_1 fra et annet legeme med treghetsmoment I_2 , blir

$$I = I_2 - I_1.$$

Det forutsettes at alle treghetsmomentene regnes om samme akse.

Eksempel 2.6.9: Et legeme med masse m framkommer ved at en halvkuleformet hulning med radius R freses ut av toppflaten i en sylinder med høyde $H = 2R$ og radius R . Halvkula og sylindren har felles symmetriakse. Finn treghetsmomentet til dette legemet om symmetriaksen.

Løsning: Volumet til legemet er

$$V = V_S - V_{\frac{1}{2}K} = \pi R^2 H - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \pi R^2 \cdot 2R - \frac{2}{3}\pi R^3 = \underline{\underline{\frac{4}{3}\pi R^3}}.$$

Massen til sylindren (før utfresingen av halvkula) var

$$m_S = m \cdot \frac{V_S}{V} = m \cdot \frac{\pi R^2 \cdot 2R}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \underline{\underline{\frac{3}{2}m}},$$

mens massen av den utfreste halvkula er

$$m_{\frac{1}{2}K} = m \cdot \frac{V_{\frac{1}{2}K}}{V} = m \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \underline{\underline{\frac{1}{2}m}}.$$

Treghetsmomentet til sylindren (før utfresingen av halvkula) var

$$I_S = \frac{1}{2}m_S R^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}m \cdot R^2 = \underline{\underline{\frac{3}{4}m R^2}}.$$

Halvkula har halvparten så stort treghetsmoment (om symmetriaksen) som ei hel kule. Men massen til halvkula er også halvparten så stor som massen til ei hel kule. Dermed får vi at

$$I_{\frac{1}{2}K} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}m_K R^2 = \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}m_K\right) R^2 = \frac{2}{5} \cdot \left(m_{\frac{1}{2}K}\right) \cdot R^2 = \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}m\right) \cdot R^2 = \underline{\underline{\frac{1}{5}m R^2}}.$$

Alt i alt blir nå treghetsmomentet til legemet vårt om symmetriaksen

$$I = I_S - I_{\frac{1}{2}K} = \frac{3}{4}m R^2 - \frac{1}{5}m R^2 = \underline{\underline{\frac{11}{20}m R^2}}.$$

Eksempel 2.6.10: Bruk dette prinsippet til å finne formelen for treghetsmomentet til en hul sylinder med masse m , indre radius R_1 og ytre radius R_2 .

Løsning: Vi tenker oss at den hule sylindere framkommer ved at vi starter med en massiv sylinder med volum $V_1 = \pi R_1^2 H$ og treghetsmoment $I_1 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2$. Så freser vi ut en sylinder med volum $V_2 = \pi R_2^2 H$ og treghetsmoment $I_2 = \frac{1}{2} m_2 R_2^2$. Når massen til den hule sylindere er m , blir massene til disse to sylindere:

$$m_1 = m \cdot \frac{V_1}{V} = m \cdot \frac{\pi R_1^2 H}{\pi R_2^2 H - \pi R_1^2 H} = m \cdot \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2},$$

$$m_2 = m \cdot \frac{V_2}{V} = m \cdot \frac{\pi R_2^2 H}{\pi R_2^2 H - \pi R_1^2 H} = m \cdot \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

Da blir treghetsmomentet til den hule sylindere

$$\begin{aligned} I &= I_2 - I_1 = \frac{1}{2} m_2 R_2^2 - \frac{1}{2} m_1 R_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{m R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot R_2^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{m R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot R_1^2 \\ &= \frac{1}{2} m \frac{R_2^4 - R_1^4}{R_2^2 - R_1^2} = \frac{1}{2} m \frac{(R_2^2 + R_1^2)(R_2^2 - R_1^2)}{R_2^2 - R_1^2} = \underline{\underline{\frac{1}{2} m (R_2^2 + R_1^2)}} \end{aligned}$$

Dette resultatet kan vi også finne ved å benytte framgangsmåten i Eksempel 2.6.5, og integrere fra R_1 til R_2 .

En liten kontroll til slutt: Dersom sylinderveggen er så tynn at $R_1 \approx R_2 = R$, blir treghetsmomentet $I = \frac{1}{2} m (R^2 + R^2) = \underline{\underline{m R^2}}$. Det er jo helt naturlig, siden alle massepunktene da har samme avstand R fra aksene.

Oppgave 2.6.5.

2.6.6. Steiners setning (parallellakse-setningen).

Det er vanlig at tabeller oppgir formel for treghetsmoment om en akse gjennom legemets massesenter. Dersom vi har bruk for treghetsmomentet til legemet om en annen akse parallell med aksene gjennom massesenteret, kan vi bruke setningen nedenfor:

Steiners setning (parallellakse-setningen):

La I_C være treghetsmomentet for et legeme med masse m om en akse gjennom massesenteret. La I_P være treghetsmomentet for dette legemet om en annen akse som er parallell med aksene gjennom massesenteret, i avstand D fra denne. Da er

$$I_P = I_C + m D^2$$

Beviset for setningen er litt kronglete, og er dyttet ut i et tillegg. Vi skal heller se på hvordan setningen kan brukes.

Eksempel 2.6.11: Vis at resultatene fra Eksempel 2.6.1 stemmer med Steiners setning.

Løsning: Vi fant at stavens treghetsmoment om massesenteret var $I_C = \frac{1}{12}mL^2$. Steiners setning gir nå at treghetsmomentet om en parallell akse gjennom et endepunkt er

$$I_A = I_C + m \cdot \left(\frac{1}{2}L\right)^2 = \frac{1}{12}mL^2 + \frac{1}{4}mL^2 = \underline{\underline{\frac{1}{3}mL^2}}.$$

Dette stemmer med resultatet i Eksempel 2.6.1.

Eksempel 2.6.12: Beregn treghetsmomentet til en sylinder om en akse langs sylinderens sidekant, parallelt med symmetriaksen.

Løsning: Siden treghetsmomentet for en sylinder om symmetriaksen er $I_C = \frac{1}{2}mR^2$, og massesenteret ligger på symmetriaksen, blir treghetsmomentet om en akse langs en sidekant i avstand R fra symmetriaksen

$$I_P = I_C + m \cdot R^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \underline{\underline{\frac{3}{2}mR^2}}.$$

Oppgave 2.6.6.

3. Blandede oppgaver.

Her finner du en samling blandede oppgaver innen derivasjon og anvendelser av derivasjon. De fleste oppgavene har vært gitt som eksamensoppgaver. Et par oppgaver er litt endret. Du finner løsninger på oppgavene ved å klikke på oppgavenummeret.

3.1. Oppgaver.

Oppgave 1

Beregn disse integralene:

a) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$

b) $\int \frac{x+1}{x^2-x} dx$

c) $\int x \cdot \ln x dx$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx$

e) $\int_1^2 \frac{1}{x^3+x} dx$

f) 1) Vis at

$$\int \frac{1}{2x^2-x} dx = \ln \left| \frac{x-\frac{1}{2}}{x} \right| + C.$$

2) Bruk substitusjonen $u = e^t$ samt resultatet ovenfor til å beregne

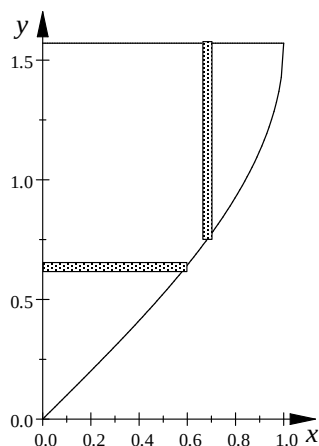
$$\int_0^{\infty} \frac{1}{2e^t-1} dt.$$

Oppgave 2

a) Vis ved å utføre integrasjonen at

$$\int \arcsin x dx = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

b)



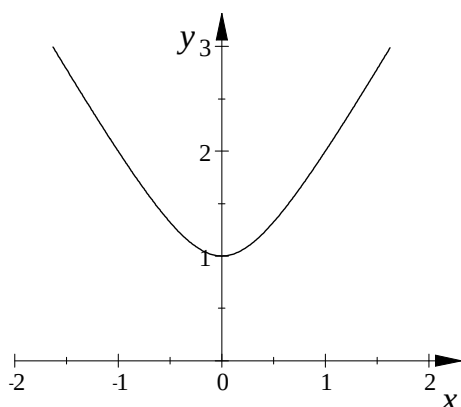
Til venstre ser du grafen til

$$y = f(x) = \arcsin x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Du skal beregne det arealet som avgrenses av grafen, linja $y = \frac{1}{2}\pi$ og y-aksen på to måter:

- 1) Ved å dele arealet opp i loddrette "striper" med bredde dx .
- 2) Ved å dele arealet opp i vannrette "striper" med bredde dy .

Oppgave 3



Til venstre ser du et utsnitt av grafen til funksjonen gitt ved

$$y^2 = 1 + 3x^2.$$

Denne grafen, koordinat-aksene, og linja $x = 1$ danner en flate F .

- a) Del F inn i 4 like brede striper, og finn en tilnærmet verdi for arealet av F med Simpsons formel.

- b) Finn volumet av det rotasjonslegemet som framkommer når F roterer en gang om y -aksen.
- c) Benytt skivemetoden til å sette opp et integral som skal benyttes til å finne volumet av det omdreiningslegemet som framkommer når F roterer en gang om linja $y = 2$. Beregn en tilnærmet verdi av dette integralet, bl.a. ved å benytte resultatet fra a).

Oppgave 4

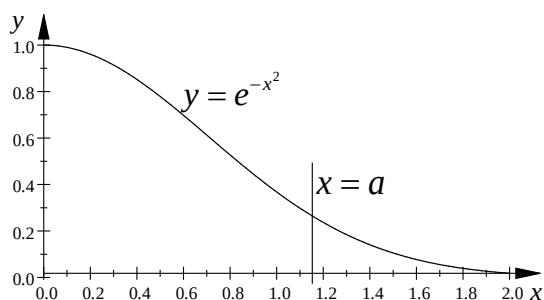
En funksjon er gitt ved

$$y = f(x) = \sqrt{9 - x}, \quad 0 \leq x \leq 9.$$

Ei flate F er avgrenset av grafen til f og koordinat-aksene.

- a) Finn arealet til F .
- b) Finn volumet av det omdreiningslegemet som framkommer når F roterer om y -aksen.

Oppgave 5



Til venstre ser du grafen til funksjonen

$$y = f(x) = e^{-x^2}, \quad x \geq 0.$$

Denne grafen, y -aksen, x -aksen, og linja $x = a$ der $a > 0$ avgrenser ei flate. Når denne flata roteres om y -aksen dannes det et klokkeformet legeme. Finn volumet av dette legemet når $a \rightarrow \infty$.

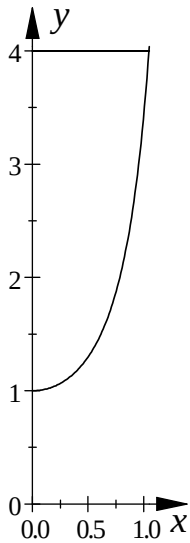
Oppgave 6

Gitt funksjonen

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{\frac{1-x}{2}}, \quad x \in [0, \infty).$$

- a) Finn $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ og $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- b) Finn $f'(x)$ og $f''(x)$, og bestem funksjonens maksimums- og minimumspunkter. Skisser grafen til funksjonen.
- c) Grafen til f , x -aksen, og den rette linja $x = 4$ avgrenser ei flate. Finn volumet av det legemet som framkommer når denne flata roterer en gang om x -aksen.

Oppgave 7



Til venstre ser du grafen til funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{3}\pi.$$

Ei flate F er avgrenset av denne grafen, y -aksen og linja $y = 4$.

- Finne den eksakte verdien av arealet til flata F .
- Finne den eksakte verdien til det omdreiningslegemet som dannes når flata F roteres 360° om y -aksen.

Oppgave 8

Vi har gitt funksjonen

$$y = f(x) = 2 - 3e^{-x} + 2e^{-\frac{1}{2}x}, \quad x \geq 0.$$

- Bestem eventuelle maksimums- og minimumspunkter for funksjonen med tilhørende maksimums- og minimumsverdier, og tegn en skisse av funksjonsgraf. Ta med eventuelle asymptoter.
- Ei flate avgrenses av funksjonsgraf, x -aksen, y -aksen og den rette linja $x = 4 \cdot \ln 3$. Forklar hvordan vi kan sette opp et integraluttrykk for å beregne volumet av det omreiningslegemet som framkommer når denne flata roterer en gang om x -aksen, og beregn dette volumet.

Oppgave 9

Grafene til de to funksjonene

$$y_1 = f_1(x) = e^x$$

og

$$y_2 = f_2(x) = e^{2x} - 2$$

avgrenser sammen med y -aksen ei flate.

- Finne arealet av denne flata.
- Finne volumet av det omdreiningslegemet som framkommer når flata roterer en gang om y -aksen.

Oppgave 10

Ei flate avgrenses av grafen til funksjonen

$$y = x(3-x)^2, \quad 0 \leq x \leq 3$$

og x -aksen.

- 1) Finn arealet av denne flata.
2) Bestem ei rett linje $x = k$ som deler flata i to like store deler. (Den likningen som framkommer kan løses med dataverktøy).
- Bestem volumet av det rotasjonslegemet som framkommer når flata roterer en gang om:
 - x -aksen.
 - y -aksen.
 - Linja $x = -1$.
 - Linja $y = 5$.
 Integral kan løses med dataverktøy.

Oppgave 11

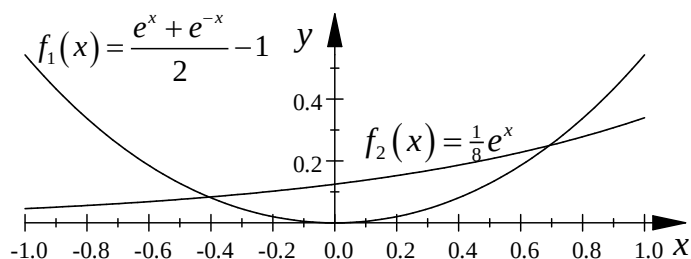
Vi har gitt de to funksjonene

$$f_1(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1$$

og

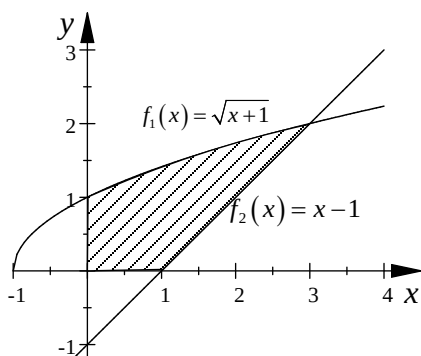
$$f_2(x) = \frac{1}{8}e^x.$$

Grafene til de to funksjonene er skissert til høyre.



- Vis ved å løse en likning at grafene skjærer hverandre i punktene $(\ln(\frac{2}{3}), \frac{1}{12})$ og $(\ln 2, \frac{1}{4})$.
- Bestem arealet av den flata som avgrenses av de to grafene.

Oppgave 12



På figuren til venstre ser du grafene til de to funksjonene

$$f_1(x) = \sqrt{x+1}$$

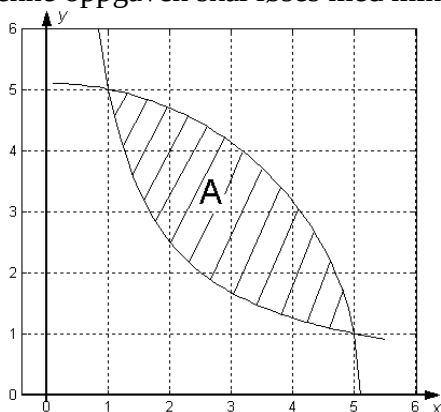
og

$$f_2(x) = x-1$$

- Det skraverte område angir ei flate som er avgrenset av grafene til de to funksjonene og aksene. Finn volumet av det omdreiningslegemet som framkommer når denne flata roterer en gang om x -aksen.
- Ei flate er avgrenset av grafen til f_1 , x -aksen, y -aksen, og den rette linja $x = a$ der $a > 0$. Når denne flata roterer en gang om x -aksen, framkommer et omdreiningslegeme. Bestem a slik at volumet av dette omdreiningslegemet blir $V = 4\pi$. Du kan bruke dataverktøy til å løse likninger.

Oppgave 13

Denne oppgaven skal løses med minst mulig bruk av kalkulator.



Figuren til venstre viser et utsnitt av sirkelen

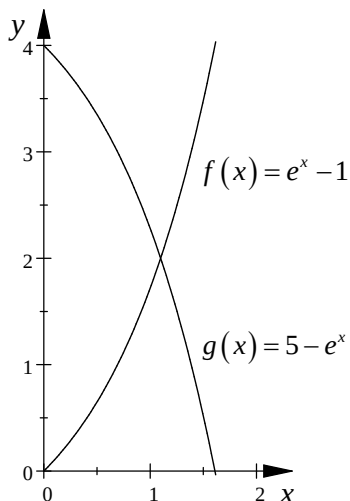
$$x^2 + y^2 = 26$$

og grafen til funksjonen

$$y = f(x) = \frac{5}{x}, \quad x > 0.$$

- Finn skjæringspunktene mellom disse to grafene ved å løse en likning.
- De to grafene avgrenser et areal A. Bruk skivemetoden til å bestemme volumet av den "ringen" som dannes når dette arealet roterer en gang om x-aksen.
- Kontroller svaret fra b) ved å bruke sylinderskall-metoden til å beregne volumet av den "ringen" som dannes når arealet A roterer en gang om y-aksen.

Oppgave 14



Vi har gitt de to funksjonene

$$f(x) = e^x - 1$$

og

$$g(x) = 5 - e^x.$$

- Finn koordinatene til skjæringspunktet mellom grafene til funksjonene.
- De to grafene og y-aksen avgrenser ei flate. Finn volumet av det romlegemet som dannes når denne flata roteres om x-aksen.

Oppgave 15

- Vis ved å utføre integrasjonen at

$$\int x \cdot e^{ax} dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right) e^{ax} + C.$$

- La $a > 0$, og bestem disse grenseverdiene:

$$\text{I) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^{ax}}$$

$$\text{II) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{ax}}.$$

I resten av oppgaven skal vi se på funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{når } x < 0 \\ e^{-\frac{x}{2}} - e^{-x} & \text{når } x \geq 0 \end{cases}.$$

Du kan under veis få bruk for resultatene i a) og b) ovenfor.

- Finn funksjonens maksimumspunkt med tilhørende funksjonsverdi.

- d) Vis at $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.
- e) Finn $\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$.
- f) Ei flate er avgrenset av grafen til f , x -aksen og den rette linja $x = a$. Når denne flata roterer om x -aksen, framkommer et romlegeme. Finn volumet av dette romlegemet når $a \rightarrow \infty$.

Oppgave 16

Ei flate er avgrenset av grafen til

$$y = f(x) = 4x - x^2, \text{ linja } y = 4 \text{ og } y\text{-aksen.}$$

- a) Tegn grafen til funksjonen, og finn arealet av flata.
- b) Finn koordinatene til flatas massesenter (tyngdepunkt).
- c) Finn volumet av det legemet som framkommer når flata roterer om y -aksen.
- d) Finn volumet av det legemet som framkommer når flata roterer om linja $y = 4$.

Oppgave 17

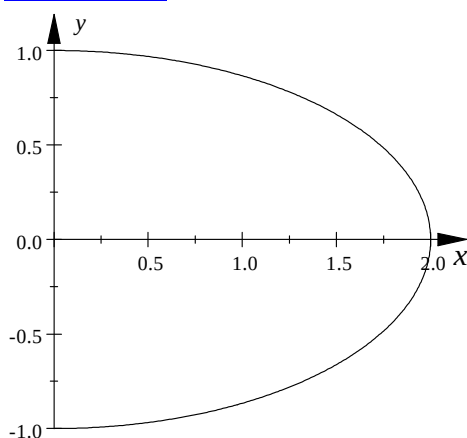
- a) Vis ved å utføre integrasjonen at

$$\int x e^{-bx} dx = -\frac{1}{b} x e^{-bx} - \frac{1}{b^2} e^{-bx} + C$$

der b er en positiv konstant.

- b) Ei flate avgrenses av grafen til $y = e^{-x}$, x -aksen, og de rette linjene $x = 0$ og $x = a$ der $a > 0$.
- I) Finn koordinatene til flatas massesenter (tyngdepunkt) uttrykt ved a .
- II) Hva går flatas massesenter mot når $a \rightarrow \infty$?
- III) Hva går flatas massesenter mot når $a \rightarrow 0$?
- IV) Finn volumet av det omdreiningslegemet som framkommer når flata dreies om x -aksen.

Oppgave 18



Ei homogen flate F har form som den delen av ellipsen

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$$

som har positive x -verdier (se figuren til venstre).

Finn koordinatene til flatas massesenter.

Hint: Du kan få bruk for at arealet av ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

er

$$A = \pi ab.$$

Oppgave 19

En rett, tynn stav plasseres langs x -aksen i et koordinatsystem med sin ene ende i origo og den andre enden i $x = 2$. Stavens tetthet $\rho(x) = \frac{dm}{dx}$ varierer med avstanden x fra origo, og er gitt ved

$$\rho(x) = 1 + \sqrt{x}(2 - x) \text{ for } 0 \leq x \leq 2$$

og har enhet kg/meter.

- Beregn stavens masse.
- Finn stavens massesenter.
- Beregn stavens treghetsmoment om y -aksen.

Oppgave 20

Ei flate er avgrenset av grafen til

$$f(x) = e^{-x},$$

x -aksen, y -aksen og den rette linja $x = \ln 2$.

- Finn koordinatene til flatas massesenter (tyngdepunkt).
- Beregn treghetsmomentet til flata om y -aksen når flata har masse m .

Oppgave 21

Ei homogen flate med masse m er avgrenset av grafen til funksjonen

$$f(x) = 1 - x^2$$

og x -aksen. Finn treghetsmomentet til denne flata om y -aksen.

3.2. Løsninger

Oppgave 1

$$a) \quad \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_1^4 \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \int_1^4 u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} \left[2u^{-\frac{1}{2}+1} \right]_1^4 = \left[\sqrt{u} \right]_1^4 = 2 - 1 = 1$$

Har benyttet at

$$u = x^2 + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow x dx = \frac{1}{2} du.$$

$$x = 0 \Leftrightarrow u = 1, \quad x = \sqrt{3} \Leftrightarrow u = \sqrt{3}^2 + 1 = 4.$$

$$b) \quad \frac{x+1}{x^2-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1) + Bx}{x^2-x} = \frac{(A+B)x - A}{x^2-x}$$

Sammenlikner koeffisienter, og får $A+B=1$ og $-A=1$.

Her får vi direkte $A=-1$, som videre fører til $B=1-A=2$.

$$\int \frac{x+1}{x^2-x} dx = \int \frac{-1}{x} dx + \int \frac{2}{x-1} dx = -\ln|x| + 2\ln|x-1| + C_1$$

$$= -\ln|x| + \ln(x-1)^2 + \ln C = \ln \frac{C \cdot (x-1)^2}{x}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad \int x^u \cdot \ln x^v dx &= \frac{1}{2} x^2 \cdot \ln x - \int \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} x^2 \cdot \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} x^2 + C \\ &= \frac{1}{2} x^2 \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + C \end{aligned}$$

$$u' = x \Leftrightarrow u = \frac{1}{2} x^2$$

$$v = \ln x \Rightarrow v' = \frac{1}{x}$$

$$\text{d)} \quad \int_0^{\frac{1}{3}\pi} \tan x dx = \int_0^{\frac{1}{3}\pi} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{-du}{u} = [-\ln u]_1^{\frac{1}{2}} = -\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln 1\right) = -\ln 1 + \ln 2 - \ln 1 = \underline{\underline{\ln 2}}$$

Har brukt substitusjonen

$$u = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow du = -\sin x dx$$

$$x = 0 \Leftrightarrow u = \cos(0) = 1$$

$$x = \frac{1}{4}\pi \Leftrightarrow u = \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$$

e) Starter med delbrøkkopp spalting:

$$\frac{1}{x^3 + x} = \frac{1}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} = \frac{A(x^2 + 1) + (Bx + C)x}{x(x^2 + 1)} = \frac{(A + B)x^2 + Cx + A}{x^3 + x}$$

$$\text{Her er } \underline{C=0}, \underline{A=1}, A + B = 0 \Leftrightarrow B = -A \Leftrightarrow \underline{B=-1}.$$

Da er

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{x^3 + x} dx &= \int_1^2 \frac{1}{x} dx - \int_1^2 \frac{x}{x^2 + 1} dx = [\ln x]_1^2 - \int_2^5 \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{2} du = \ln 2 - 0 - \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 2) \\ &= \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 5 + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 5 = \frac{1}{2}(\ln 2^3 - \ln 5) = \underline{\underline{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{8}{5}\right)}} \end{aligned}$$

Det siste integralet er løst med substitusjonen

$$u = x^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow du = 2x dx \Leftrightarrow \underline{x dx = \frac{1}{2} du}.$$

$$\text{f1)} \quad \frac{1}{2x^2 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x - 1} = \frac{2Ax - A + Bx}{x(2x - 1)} = \frac{(2A + B)x - A}{x(2x - 1)}.$$

Får at

$$\underline{A=-1}, 2A + B = 0 \Leftrightarrow \underline{B=2}.$$

Da blir

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2x^2 - x} dx &= \int \left(\frac{2}{2x - 1} - \frac{1}{x} \right) dx = \int \frac{1}{x - \frac{1}{2}} dx - \int \frac{1}{x} dx \\ &= \ln \left| x - \frac{1}{2} \right| - \ln |x| + C = \ln \left| \frac{x - \frac{1}{2}}{x} \right| + C \end{aligned}$$

$$\text{f2)} \quad u = e^t \Rightarrow \frac{du}{dt} = e^t \Leftrightarrow dt = \frac{du}{e^t} = \frac{du}{u}.$$

Da blir

$$\begin{aligned}\int_0^{t_1} \frac{1}{2e^t - 1} dt &= \int_1^{e^{t_1}} \frac{1}{2u - 1} \frac{du}{u} = \left[\ln \left| \frac{x - \frac{1}{2}}{x} \right| + C \right]_1^{e^{t_1}} = \ln \left| \frac{e^{t_1} - \frac{1}{2}}{e^{t_1}} \right| - \ln \left| \frac{1 - \frac{1}{2}}{1} \right| \\ &= \ln \left| 1 - \frac{1}{2} e^{-t_1} \right| - \ln \left| \frac{1}{2} \right| = \ln \left| 1 - \frac{1}{2} e^{-t_1} \right| + \ln 2 \\ \int_0^\infty \frac{1}{2e^t - 1} dt &= \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \int_0^{t_1} \frac{1}{2e^t - 1} dt = \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \left(\ln \left| 1 - \frac{1}{2} e^{-t_1} \right| + \ln 2 \right) = \ln |1 - 0| + \ln 2 = \underline{\underline{\ln 2}}.\end{aligned}$$

Oppgave 2

a)
$$\int \arcsin x \, dx = \int \overset{u'}{1} \cdot \overset{v}{\arcsin x} \, dx = \overset{u}{x} \cdot \overset{v}{\arcsin x} - \int \overset{u}{x} \cdot \overset{v'}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \, dx$$

Setter

$$u = 1 - x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2x \Rightarrow x dx = -\frac{1}{2} du.$$

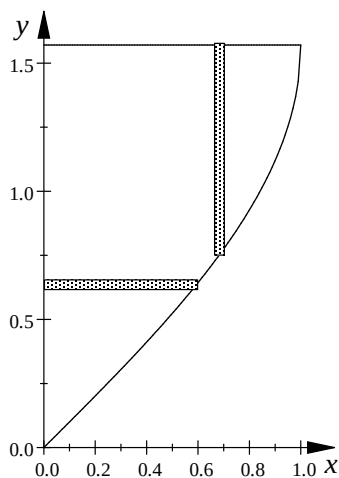
Da er

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{-\frac{1}{2} du}{\sqrt{u}} = -\sqrt{u} + C = -\sqrt{1-x^2} + C$$

slik at

$$\int \arcsin x \, dx = \underline{\underline{x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C}}.$$

b1)



Bruker loddrette striper med bredde dy og høyde

$h = \frac{1}{2}\pi - y$. Finner først øvre grense for integralet:

$$y = \arcsin x = \frac{1}{2}\pi \Leftrightarrow x = 1.$$

Da blir arealet

$$\begin{aligned}F &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\pi - \arcsin x \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}\pi x - x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\pi \cdot 1 - 1 \cdot \arcsin 1 + \sqrt{1-1^2} - 0 - 0 + \sqrt{1-0^2} \\ &= \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi + 0 - 0 - 0 + 1 = \underline{\underline{1}}\end{aligned}$$

b2) Med vannrette striper blir arealet

$$F = \int_{y=0}^{y=\frac{1}{2}\pi} x \, dy.$$

Benytter videre at

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$$

slik at

$$F = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin y \, dy = [-\cos y]_0^{\frac{1}{2}\pi} = -\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) + \cos 0 = -0 + 1 = \underline{\underline{1}}.$$

Oppgave 3

- a) $y^2 = 1 + 3x^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{1 + 3x^2}$ når vi kun benytter området der $y > 0$.

Setter opp tabell over x -verdier og tilhørende verdier for y :

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	Sum
$y = \sqrt{1 + 3x^2}$	1	1.09	1.32	1.64	2	
Vekt	1	4	2	4	1	
	1	4.36	2.64	6.56	2	16.56

Simpsons formel gir nå at arealet blir

$$A = \frac{1-0}{6 \cdot 2} \cdot 16.56 = \underline{\underline{1.38}}.$$

- b) Bruker sylinderskall-metoden: Et sylinderskall i avstand x fra y -aksen har volum

$$dV = 2\pi x \cdot y \cdot dx = 2\pi x \sqrt{1 + 3x^2} dx$$

slik at hele legemets volum blir

$$V = \int_0^1 2\pi x \sqrt{1 + 3x^2} dx.$$

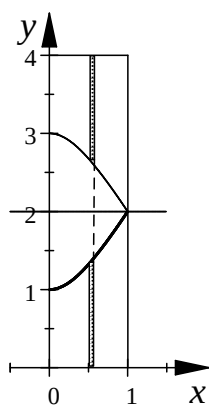
Setter

$$u = 1 + 3x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 6x \Leftrightarrow x dx = \frac{1}{6} du.$$

Videre er $u = 1$ når $x = 0$, og $u = 1 + 3 \cdot 1^2 = 4$ når $x = 1$, slik at

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 2\pi x \sqrt{1 + 3x^2} dx = 2\pi \int_1^4 \sqrt{u} \cdot \frac{1}{6} du = \frac{1}{3} \pi \cdot \int_1^4 u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{3} \pi \cdot \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 \\ &= \frac{2}{9} \pi \cdot \left(4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{2}{9} \pi \cdot (8 - 1) = \underline{\underline{\frac{14}{9} \pi}} \end{aligned}$$

- c)



Ei skive i avstand x fra y -aksen har ytre radius lik 2, og et hull i midten med radius lik $2 - y$. Ei skive med tykkelse dx får da volum

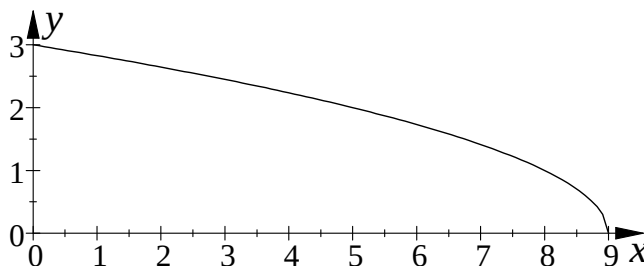
$$\begin{aligned} dV &= \left(\pi \cdot 2^2 - \pi \cdot (2 - y)^2 \right) dx = \pi (4 - (4 - 4y + y^2)) dx \\ &= \pi (4y - y^2) dx = \pi (4\sqrt{1 + 3x^2} - 1 - 3x^2) dx \end{aligned}$$

Videre merker vi oss at når $x = 1$ blir $y = 2$. Da blir volumet av rotasjonslegemet:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (4\sqrt{1 + 3x^2} - 1 - 3x^2) dx \\ &= 4\pi A - \pi \left[x + x^3 \right]_0^1 \approx 4\pi \cdot 1.38 - 2\pi \approx \underline{\underline{11.1}} \end{aligned}$$

Oppgave 4

$$y = f(x) = \sqrt{9 - x}, \quad 0 \leq x \leq 9.$$



a) Arealet er

$$A = \int_0^9 \sqrt{9-x} dx.$$

Setter

$$u = 9 - x \Rightarrow du = -dx$$

og får

$$\int \sqrt{9-x} dx = \int \sqrt{u} (-du) = -\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{3} \sqrt{u}^3 + C = -\frac{2}{3} (\sqrt{9-x})^3 + C.$$

Da blir arealet

$$A = \int_0^9 \sqrt{9-x} dx = -\frac{2}{3} \left[(\sqrt{9-x})^3 \right]_0^9 = -\frac{2}{3} (0 - 27) = \underline{\underline{18}}.$$

b) Bruker sylinderskall-metoden for å finne volumet ved rotasjon om y-aksen:

$$V = \int_{x=0}^{x=9} 2\pi x \cdot y dx = 2\pi \int_0^9 x \sqrt{9-x} dx.$$

Samme substitusjon som før gir

$$x = 9 - u$$

slik at

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^9 x \sqrt{9-x} dx = 2\pi \int_9^0 (9-u) \sqrt{u} (-du) = 2\pi \int_9^0 \left(-9u^{\frac{1}{2}} + u^{\frac{3}{2}} \right) du \\ &= 2\pi \int_0^9 \left(9u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{3}{2}} \right) du = 2\pi \left[9 \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} \right]_0^9 = 2\pi \left(6 \cdot \sqrt{9}^3 - \frac{2}{5} \cdot \sqrt{9}^5 - 0 + 0 \right) \\ &= 2\pi \left(6 \cdot 27 - \frac{2}{5} \cdot 243 \right) = \underline{\underline{\frac{648}{5} \pi}} \end{aligned}$$

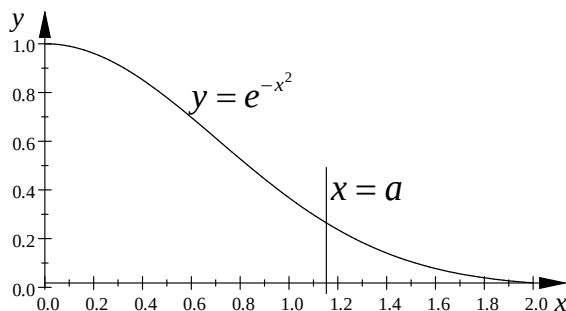
Vi kan også bruke skivemetoden. Da må vi benytte at

$$y = \sqrt{9-x} \Leftrightarrow x = 9 - y^2.$$

Volumet blir

$$\begin{aligned} V &= \int_{y=0}^{y=3} \pi x^2 dy = \pi \int_0^3 (9 - y^2)^2 dy = \pi \int_0^3 (81 - 18y^2 + y^4) dy \\ &= \pi \left[81y - 18 \cdot \frac{1}{3} y^3 + \frac{1}{5} y^5 \right]_0^3 = \pi \left(81 \cdot 3 - 6 \cdot 3^3 + \frac{1}{5} \cdot 3^5 - 0 \right) = \underline{\underline{\frac{648}{5} \pi}} \end{aligned}$$

Oppgave 5



Bruker sylinderskall-metoden:

$$V = \int_{x=0}^{x=a} 2\pi x \cdot y \cdot dx = \pi \int_0^a 2xe^{-x^2} dx.$$

Substitusjonen

$$u = -x^2$$

gir

$$du = -2x dx,$$

slik at det ubestemte integralet blir

$$\pi \int -e^u du = \underline{-\pi e^u + C}.$$

Altså er

$$V = \left[-\pi e^{-x^2} \right]_0^a = -\pi e^{-a^2} + \pi = \underline{\pi(1 - e^{-a^2})}.$$

Når $a \rightarrow \infty$ vil $e^{-a^2} \rightarrow 0$, slik at $\lim_{a \rightarrow \infty} V = \pi$.

Oppgave 6

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{\frac{1-x}{2}}, \quad x \in [0, \infty).$$

a) Innsetting viser at

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \underline{0}.$$

Bruker L'Hôpitals regel:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \cdot e^{\frac{1-x}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{e^{\frac{x-1}{2}}} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2}e^{\frac{x-1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x} \cdot e^{\frac{x-1}{2}}} = \underline{0}.$$

$$\text{b)} \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{\frac{1-x}{2}} + \sqrt{x} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) e^{\frac{1-x}{2}} = \underline{\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) \cdot \frac{1}{2} e^{\frac{1-x}{2}}}.$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \frac{1}{2}e^{\frac{1-x}{2}} + \left(x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)e^{\frac{1-x}{2}} \\ &= \frac{1}{4}\left(-x^{-\frac{3}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\right)e^{\frac{1-x}{2}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{x}}{4}\left(-\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 1\right)e^{\frac{1-x}{2}}}} \end{aligned}$$

Maks/min. når $f'(x) = 0$, d.v.s. når

$$\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \underline{x=1}.$$

Da er

$$f(1) = \sqrt{1} \cdot e^0 = \underline{1}.$$

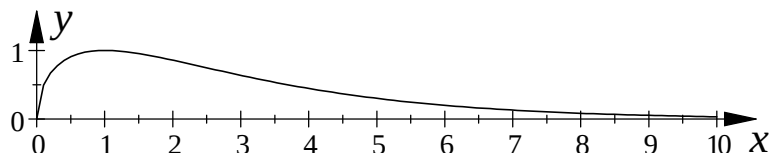
Dessuten er

$$f''(1) = \frac{\sqrt{1}}{4}\left(-\frac{1}{1^2} - \frac{2}{1} + 1\right) \cdot 1 = -\frac{1}{2} < 0,$$

slik at punktet (1, 1) er et maks.punkt.

Videre får vi et min.punkt i (0, 0) fordi f alltid er ≥ 0 .

Da har vi nok informasjon til å tegne grafen:



- c) Når flata avgrenset av grafen til f , x -aksen, og linja $x = 4$ roterer om x -aksen, finner vi volumet som framkommer ved å bruke skivemetoden:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 \pi \cdot (f(x))^2 dx = \pi \int_0^4 \left(\sqrt{x} \cdot e^{\frac{1-x}{2}} \right)^2 dx = \pi \int_0^4 x e^{1-x} dx = \pi e \int_0^4 x \cdot e^{-x} dx \\ &= \pi e \left(\left[x \cdot \left(-e^{-x} \right) \right]_0^4 + \int_0^4 1 \cdot e^{-x} dx \right) = \pi e \left(-[x \cdot e^{-x}]_0^4 - [e^{-x}]_0^4 \right) \\ &= \pi e \left(-4e^{-4} + 0 - e^{-4} + 1 \right) = \pi e (1 - 5e^{-4}) = \underline{\underline{\pi(e - 5e^{-3})}} \end{aligned}$$

Oppgave 7

- a) Grafen til

$$y = f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

skjærer linja $y = 4$ når

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 4 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \vee \cos x = -\frac{1}{2}.$$

Vi kan bare bruke løsningen

$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}\pi.$$

Da blir arealet:

$$A = \int_0^{\frac{1}{3}\pi} \left(4 - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = [4x - \tan x]_0^{\frac{1}{3}\pi} = 4 \cdot \frac{1}{3}\pi - \tan\left(\frac{1}{3}\pi - 0 + \tan 0\right) = \underline{\underline{\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}}}.$$

- b) Bruker sylinderskall-metoden for å finne volumet av rotasjonslegemet ved rotasjon om y -aksen:

$$V = \int_0^{\frac{1}{3}\pi} 2\pi x \left(4 - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = 2\pi \left(\int_0^{\frac{1}{3}\pi} 4x dx - \int_0^{\frac{1}{3}\pi} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx \right).$$

$$\int_0^{\frac{1}{3}\pi} 4x dx = [2x^2]_0^{\frac{1}{3}\pi} = 2\left(\frac{1}{3}\pi\right)^2 - 0 = \underline{\underline{\frac{2}{9}\pi^2}}.$$

$$\begin{aligned} \int x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \overset{u}{x} \cdot \overset{v'}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \overset{u}{x} \cdot \overset{v}{\tan x} - \int \overset{u'}{1} \cdot \overset{v}{\tan x} dx = x \cdot \tan x - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ &= \underline{\underline{x \cdot \tan x + \ln(\cos x) + C}} \end{aligned}$$

Foretar først delvis integrasjon med

$$u = x \Rightarrow u' = 1$$

og

$$v' = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftarrow v = \tan x.$$

Deretter substitusjonen

$$t = \cos x \Rightarrow \frac{dt}{dx} = -\sin x$$

som gir

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{-dt}{t} = -\ln t + C = -\ln(\cos x) + C.$$

Alt i alt blir

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \left(\frac{2}{9}\pi^2 - \left[x \cdot \tan x + \ln(\cos x) \right]_0^{\frac{1}{3}\pi} \right) \\ &= 2\pi \left(\frac{2}{9}\pi^2 - \left(\frac{1}{3}\pi \cdot \tan\left(\frac{1}{3}\pi\right) + \ln\left(\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)\right) - 0 - \ln(\cos 0) \right) \right) \\ &= 2\pi \left(\frac{2}{9}\pi^2 - \left(\frac{1}{3}\pi \cdot \sqrt{3} + \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 0 - \ln 1 \right) \right) = \underline{\underline{2\pi \left(\frac{2}{9}\pi^2 - \frac{1}{3}\pi \cdot \sqrt{3} + \ln 2 \right)}} \end{aligned}$$

Oppgave 8

$$y = f(x) = 2 - 3e^{-x} + 2e^{-\frac{1}{2}x}, \quad x \geq 0.$$

a) $y' = -3(-e^{-x}) + 2e^{-\frac{1}{2}x} \left(-\frac{1}{2}\right) = 3e^{-x} - e^{-\frac{1}{2}x}.$

Vi har ekstremalpunkt når

$$\begin{aligned} y' = 0 &\Leftrightarrow 3e^{-x} - e^{-\frac{1}{2}x} = 0 \Leftrightarrow 3 - e^{\frac{1}{2}x} = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \ln 3 \Leftrightarrow x = \underline{\underline{2\ln 3}} \end{aligned}$$

Sjekker fortegnet på y'' :

$$y'' = -3e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$$

som ved innsetting av $x = 2\ln 3$ gir

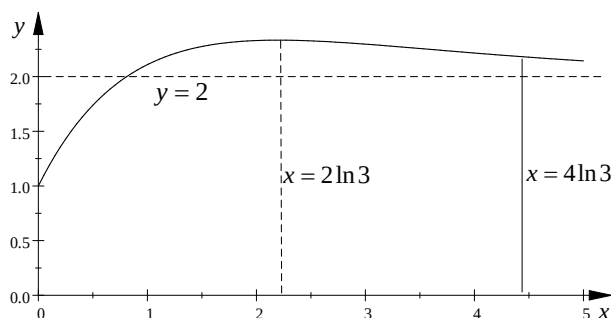
$$y'' = -3e^{-2\ln 3} + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2} \cdot 2\ln 3} = -3(e^{\ln 3})^{-2} + \frac{1}{2}(e^{\ln 3})^{-1} = -3 \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{6} < 0$$

slik at dette punktet er et lokalt maksimumspunkt med funksjonsverdi

$$\begin{aligned} y &= f(2\ln 3) = 2 - 3 \cdot e^{-2\ln 3} + 2e^{-\frac{1}{2} \cdot 2\ln 3} = 2 - 3 \cdot (e^{\ln 3})^{-2} + 2 \cdot (e^{\ln 3})^{-1} \\ &= 2 - 3 \cdot \frac{1}{3^2} + 2 \cdot \frac{1}{3} = 2 - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{7}{3}}} \end{aligned}$$

Dessuten må endepunktet $x = 0$ være et lokalt ekstremalpunkt. Funksjonsverdien blir

$$y = f(0) = 2 - 3 \cdot e^{-0} + 2e^{-\frac{1}{2} \cdot 0} = 2 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = \underline{\underline{1}}.$$



Grafen blir da som vist ovenfor.

Vi ser direkte at når $x \rightarrow \infty$, vil $y \rightarrow 2 - 0 + 0 = \underline{2}$. Videre vet vi at funksjonen er kontinuerlig. Da kan vi slå fast at punktet $(0, 1)$ er et lokalt (men ikke globalt) minimum, mens punktet $(2\ln 3, \frac{7}{3})$ er et globalt maksimum, mens $y = 2$ er en asymptote.

b) Bruker skivemetoden for å beregne volumet ved rotasjon om x-aksen:

$$V = \int_{x=0}^{x=4\ln 3} \pi y^2 \cdot dx = \pi \int_0^{4\ln 3} (2 - 3e^{-x} + 2e^{-\frac{1}{2}x})^2 \cdot dx$$

Nå er

$$\begin{aligned} ((2 - 3e^{-x}) + 2e^{-\frac{1}{2}x})^2 &= (2 - 3e^{-x})^2 + 2 \cdot (2 - 3e^{-x}) \cdot 2e^{-\frac{1}{2}x} + (2e^{-\frac{1}{2}x})^2 \\ &= 4 - 12e^{-x} + 9e^{-2x} + 8e^{-\frac{1}{2}x} - 12e^{-\frac{3}{2}x} + 4e^{-x} \\ &= 4 + 8e^{-\frac{1}{2}x} - 8e^{-x} - 12e^{-\frac{3}{2}x} + 9e^{-2x} \end{aligned}$$

Da blir

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{4\ln 3} (4 + 8e^{-\frac{1}{2}x} - 8e^{-x} - 12e^{-\frac{3}{2}x} + 9e^{-2x}) dx = \pi \left[4x - 16e^{-\frac{1}{2}x} + 8e^{-x} + 8e^{-\frac{3}{2}x} - \frac{9}{2}e^{-2x} \right]_0^{4\ln 3} \\ &= \pi \left(4 \cdot 4\ln 3 - 16 \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot 4\ln 3} + 8e^{-4\ln 3} + 8e^{-\frac{3}{2} \cdot 4\ln 3} - \frac{9}{2}e^{-2 \cdot 4\ln 3} - (0 - 16 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 8 \cdot 1 - \frac{9}{2} \cdot 1) \right) \\ &= \pi \left(16\ln 3 - 16 \cdot 3^{-2} + 8 \cdot 3^{-4} + 8 \cdot 3^{-6} - \frac{9}{2} \cdot 3^{-8} + \frac{9}{2} \right) = \pi \left(16\ln 3 + \frac{688}{243} \right) \end{aligned}$$

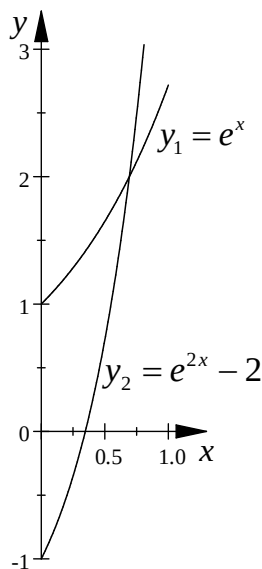
Oppgave 9

$$y_1 = f_1(x) = e^x \quad \text{og} \quad y_2 = f_2(x) = e^{2x} - 2.$$

a) Finner først skjæringspunktene mellom grafene:

$$e^x = e^{2x} - 2 \Leftrightarrow (e^x)^2 - e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 + 8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \underline{2}$$

fordi den negative løsningen ikke kan brukes. Altså skjærer grafene hverandre når $x = \ln 2$.



Arealet av flata som avgrenses av grafene og y-aksen blir

$$\begin{aligned} A &= \int_{x=0}^{x=\ln 2} (y_1 - y_2) dx \\ &= \int_0^{\ln 2} (e^x - e^{2x} + 2) dx = \left[e^x - \frac{1}{2}e^{2x} + 2x \right]_0^{\ln 2} \\ &= e^{\ln 2} - \frac{1}{2}e^{2\ln 2} + 2\ln 2 - e^0 + \frac{1}{2}e^0 - 2 \cdot 0 \\ &= 2 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{2} - 0 = \underline{\underline{2\ln 2 - \frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

b) Bruker sylinderskall-metoden for å finne volumet av rotasjonslegemet når flata roterer om y-aksen:

$$V = \int_{x=0}^{x=\ln 2} 2\pi x (y_1 - y_2) dx = 2\pi \int_0^{\ln 2} x (e^x - e^{2x} + 2) dx$$

Vi får to integral av typen

$$\int x \cdot e^{ax} dx = x \cdot \frac{1}{a} e^{ax} - \int 1 \cdot \frac{1}{a} e^{ax} dx = \frac{1}{a} x e^{ax} - \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} e^{ax} + C = \underline{\underline{\frac{1}{a^2} (ax - 1) e^{ax} + C}}.$$

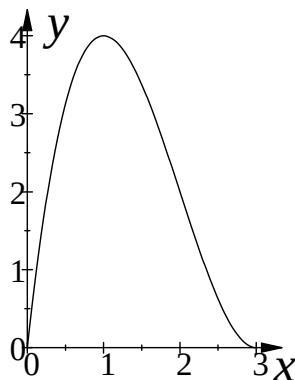
Ved å sette inn henholdsvis $a = 1$ og $a = 2$, får vi

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{\ln 2} (xe^x - xe^{2x} + 2x) dx = 2\pi \left[\frac{1}{1^2}(x-1)e^x - \frac{1}{2^2}(2x-1)e^{2x} + x^2 \right]_0^{\ln 2} \\ &= 2\pi \left(\left((\ln 2 - 1) \underbrace{e^{\ln 2}}_{=2} - \frac{1}{4}(2\ln 2 - 1) \underbrace{e^{2\ln 2}}_{=2^2=4} + (\ln 2)^2 \right) - \left((0-1)e^0 - \frac{1}{4}(0-1)e^0 + 0 \right) \right) \\ &= 2\pi \left(2\ln 2 - 2 - 2\ln 2 + 1 + (\ln 2)^2 + 1 - \frac{1}{4} \right) = 2\pi \left((\ln 2)^2 - \frac{1}{4} \right) \end{aligned}$$

Oppgave 10

$$y = x(3-x)^2, \quad 0 \leq x \leq 3$$

Starter med å tegne graf:



a1) Arealet av flata blir

$$\begin{aligned} A &= \int_0^3 x(3-x)^2 dx = \int_0^3 (9x - 6x^2 + x^3) dx \\ &= \left[9 \cdot \frac{1}{2}x^2 - 6 \cdot \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 \right]_0^3 \\ &= \frac{9}{2} \cdot 3^2 - 2 \cdot 3^3 + \frac{1}{4} \cdot 3^4 - 0 = \underline{\underline{\frac{27}{4}}} \end{aligned}$$

a2) Når linja $x = k$ skal dele flata i to like store deler, må

$$\begin{aligned} \int_0^k x(3-x)^2 dx &= \frac{1}{2}A \\ \Leftrightarrow \frac{9}{2} \cdot k^2 - 2 \cdot k^3 + \frac{1}{4} \cdot k^4 - 0 &= \frac{27}{8} \end{aligned}$$

Når likningen løses med dataverktøy, får vi kun en brukbar reell løsning:

$$k \approx \underline{\underline{1.157}}$$

b1) Bruker skivemetoden for å finne volumet ved rotasjon om x-aksen:

$$V_1 = \int_0^3 \pi y^2 dx = \pi \int_0^3 (x(3-x)^2)^2 dx = \underline{\underline{\frac{81}{10}\pi}}.$$

b2) Bruker sylinderskallmetoden for å finne volumet ved rotasjon om y-aksen:

$$V_2 = \int_{x=0}^{x=3} 2\pi x \cdot y \cdot dx = 2\pi \int_0^3 x \cdot x(3-x)^2 dx = \underline{\underline{\frac{81}{5}\pi}}.$$

b3) Ved rotasjon om linja $x = -1$ brukes sylinderskallmetoden. Radien i sylinderskallene blir

$$r = x - (-1) = x + 1,$$

slik at volumet blir

$$V_3 = \int_{x=0}^{x=3} 2\pi r \cdot y \cdot dx = 2\pi \int_0^3 (x+1)x(3-x)^2 dx = \underline{\underline{\frac{297}{10}\pi}}.$$

b4) Ved rotasjon om linja $y = 5$ brukes skivemetoden, men skivene får hull i midten. Ei skive i avstand x fra y-aksen får ytre radius $R = 5$ og et hull med radius $r = 5 - y$. Arealet av hver skive blir da

$$A = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(5^2 - (5-y)^2) = \pi(5^2 - 5^2 + 10y - y^2) = \underline{\underline{\pi(10y - y^2)}}$$

slik at volumet av rotasjonslegemet blir

$$V_4 = \int_{x=0}^{x=3} A \cdot dx = \int_{x=0}^{x=3} \pi(10y - y^2) dx.$$

Ved fornuftig bruk av "klipp-og-lim" på dataverktøyet (eller ved å definere y som en funksjon av x) kan dette integralet løses uten først å finne integranden som funksjon av x . Resultatet blir

$$V_4 = \underline{\underline{\frac{3267}{70}\pi}}.$$

Oppgave 11

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad f_1(x) &= f_2(x) \Leftrightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1 = \frac{1}{8}e^x \Leftrightarrow 4e^x + 4e^{-x} - 8 = e^x \\ &\Leftrightarrow 3e^x + 4e^{-x} - 8 = 0 \Leftrightarrow 3(e^x)^2 - 8e^x + 4 = 0 \\ e^x &= \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{6} = \begin{cases} 2 \\ \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \ln 2}} \vee \underline{\underline{x = \ln\left(\frac{2}{3}\right)}}. \end{aligned}$$

De tilhørende y -verdiene finnes enklast ved å sett inn i f_2 :

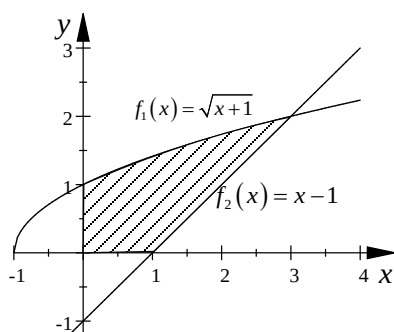
$$\text{Når } x = \ln 2, \text{ blir } y = \frac{1}{8}e^{\ln 2} = \frac{1}{8} \cdot 2 = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}.$$

$$\text{Når } x = \ln\left(\frac{2}{3}\right), \text{ blir } y = \frac{1}{8}e^{\ln\frac{2}{3}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{12}}}.$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad A &= \int_{\ln(\frac{2}{3})}^{\ln 2} \left(\frac{1}{8}e^x - \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1 \right) \right) dx = \int_{\ln(\frac{2}{3})}^{\ln 2} \left(-\frac{3}{8}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} + 1 \right) dx \\ &= \left[-\frac{3}{8}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} + x \right]_{\ln(\frac{2}{3})}^{\ln 2} \\ &= \left(-\frac{3}{8} \cdot e^{\ln 2} + \frac{1}{2} \cdot e^{-\ln 2} + \ln 2 \right) - \left(-\frac{3}{8} \cdot e^{\ln(\frac{2}{3})} + \frac{1}{2} \cdot e^{-\ln(\frac{2}{3})} + \ln\left(\frac{2}{3}\right) \right) \\ &= -\frac{3}{8} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2^{-1} + \ln 2 + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} - \ln 2 + \ln 3 = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \ln 3 \\ &= \underline{\underline{\ln 3 - 1}} \end{aligned}$$

Oppgave 12

a)



Må først finne skjæringspunktet mellom grafene:

$$\sqrt{x+1} = x-1 \Rightarrow x+1 = x^2 - 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=3}} \vee \underline{\underline{x=0}}$$

Det er åpenbart at vi skal bruke løsningen $\underline{\underline{x=0}}$.

Jeg velger å dele flata opp i to deler: venstre del avgrenset av koordinataksene, grafen til $y = \sqrt{x+1}$, og den rette linja $x=1$, og høyre del avgrenset av linja $x=1$ og grafene til de to funksjonene.

Volumet av rotasjonslegemet som framkommer når venstre del roterer blir

$$V_1 = \int_0^1 \pi (\sqrt{x+1})^2 dx = \pi \int_0^1 (x+1) dx = \pi \left[\frac{1}{2}x^2 + x \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{2} \cdot 1^2 + 1 - 0 \right) = \underline{\underline{\frac{3}{2}\pi}}.$$

Når høyre del roterer, gir skivemetoden skiver med hull i, slik at arealet av ei skive i avstand x fra y -aksen blir

$$A = \pi (\sqrt{x+1})^2 - \pi (x-1)^2 = \pi (x+1 - x^2 + 2x - 1) = \pi (-x^2 + 3x).$$

Da blir volumet av rotasjonslegemet

$$\begin{aligned} V_2 &= \int_1^3 A \cdot dx = \int_1^3 \pi(-x^2 + 3x) dx = \pi \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_1^3 \\ &= \pi \left(\left(-\frac{1}{3} \cdot 3^3 + \frac{3}{2} \cdot 3^2 \right) - \left(-\frac{1}{3} \cdot 1^3 + \frac{3}{2} \cdot 1^2 \right) \right) = \pi \left(-9 + \frac{27}{2} + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} \right) = \frac{10}{3}\pi \end{aligned}$$

Samlet volum blir da

$$V = V_1 + V_2 = \frac{3}{2}\pi + \frac{10}{3}\pi = \underline{\underline{\frac{29}{6}\pi}}.$$

- b) Vi ser at et volum på 4π ligger mellom $V_1 = \frac{3}{2}\pi$ og $V = \frac{29}{6}\pi$. Dette medfører at den rette linja $x = a$ som skal gi et rotasjonsvolum på 4π må ligge mellom $x = 1$ og $x = 3$. Vi får derfor likningen

$$\begin{aligned} V_1 + \int_1^a A \cdot dx &= 4\pi \Leftrightarrow \frac{3}{2}\pi + \int_1^a \pi(-x^2 + 3x) dx = 4\pi \Leftrightarrow \int_1^a \pi(-x^2 + 3x) dx = \frac{5}{2}\pi \\ \Leftrightarrow \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_1^a &= \frac{5}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{3}a^3 + \frac{3}{2}a^2 + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2a^3 - 9a^2 = -22 \end{aligned}$$

Når denne likningen løses med dataverktøy, er det kun løsningen

$$a = \underline{\underline{2.175}}$$

som kan brukes.

Oppgave 13

- a) Finner skjæringspunktene mellom grafene. Setter derfor

$$y = f(x) = \frac{5}{x}$$

inn i likningen

$$x^2 + y^2 = 26:$$

$$x^2 + \left(\frac{5}{x}\right)^2 = 26 \Leftrightarrow (x^2)^2 + 25 - 26x^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{26 \pm \sqrt{26^2 - 4 \cdot 25}}{2} = \frac{26 \pm 24}{2} = \begin{cases} 25 & \Leftrightarrow x = \pm 5 \\ 1 & \Leftrightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

Siden vi kun kan bruke positive x -verdier, blir skjæringspunktene (5,1) og (1,5).

- b) Bruker skivemetoden: En skive i avstand x fra origo har areal

$$A = \pi y_1^2 - \pi y_2^2 = \pi \left((26 - x^2) - \left(\frac{5}{x}\right)^2 \right) = \pi (26 - x^2 - 25x^{-2}).$$

Rotasjonslegemets volum blir

$$\begin{aligned} V &= \int_{x=1}^{x=5} A \cdot dx = \int_1^5 \pi (26 - x^2 - 25x^{-2}) dx = \pi \left[26x - \frac{1}{3}x^3 + 25x^{-1} \right]_1^5 \\ &= \pi \left(130 - \frac{125}{3} + 5 - 26 + \frac{1}{3} - 25 \right) = \underline{\underline{\frac{128}{3}\pi}} \end{aligned}$$

- c) Bruker sylinderskallmetoden: Et sylinderskall med y -aksen som symmetriakse har en overflate

$$A = 2\pi x(y_1 - y_2) = 2\pi x \left(\sqrt{26 - x^2} - \frac{5}{x} \right)$$

slik at volumet av legemet blir

$$V = \int_{x=1}^{x=5} A \cdot dx = \int_1^5 2\pi x \left(\sqrt{26 - x^2} - \frac{5}{x} \right) dx = 2\pi \left(\int_1^5 x\sqrt{26 - x^2} dx - 5 \int_1^5 dx \right).$$

For å løse det første integralet, substituerer jeg

$$u = 26 - x^2 \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = -2x \Leftrightarrow x dx = -\frac{1}{2} du.$$

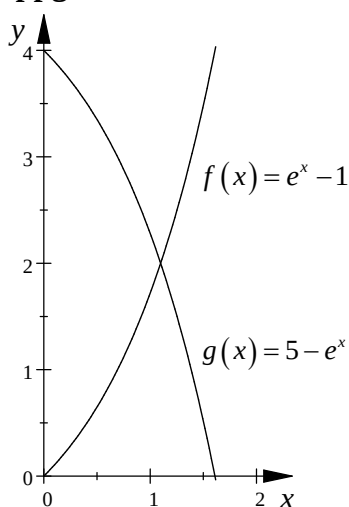
Da blir

$$\begin{aligned} \int_1^5 x\sqrt{26-x^2} dx &= \int_{u=25}^{u=1} -\frac{1}{2}\sqrt{u} du = \frac{1}{2} \int_1^{25} u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}+1} \left[u^{\frac{3}{2}} \right]_1^{25} \\ &= \frac{1}{3} \left(\sqrt{25}^3 - \sqrt{1}^3 \right) = \frac{1}{3} (125 - 1) = \underline{\underline{\frac{124}{3}}} \end{aligned}$$

slik at

$$V = 2\pi \left(\frac{124}{3} - 5[x]_1^5 \right) = 2\pi \left(\frac{124}{3} - 5(5-1) \right) = \underline{\underline{\frac{128}{3}\pi}}.$$

Oppgave 14



a) Finner skjæringspunkt:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \Leftrightarrow e^x - 1 = 5 - e^x \\ \Leftrightarrow 2e^x &= 6 \Leftrightarrow e^x = 3 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \ln 3}} \end{aligned}$$

Da er

$$y = e^{\ln 3} - 1 = 3 - 1 = \underline{\underline{2}}.$$

b) Benytter skivemetoden. Ei skive i avstand x fra y -aksen har areal

$$\begin{aligned} A &= \pi(5 - e^x)^2 - \pi(e^x - 1)^2 \\ &= \pi(25 - 10e^x + (e^x)^2) - \pi((e^x)^2 - 2e^x + 1) \\ &= \underline{\underline{\pi(24 - 8e^x)}} \end{aligned}$$

Da blir volumet

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\ln 3} A \cdot dx = \int_0^{\ln 3} \pi(24 - 8e^x) dx = \pi[24x - 8e^x]_0^{\ln 3} \\ &= \pi(24\ln 3 - 8e^{\ln 3} - 0 + 8e^0) = \pi(24\ln 3 - 8 \cdot 3 - 0 + 8) = \underline{\underline{(24\ln 3 - 16)\pi}} \end{aligned}$$

Oppgave 15

$$a) \quad \int x \cdot e^{ax} dx = x \cdot \frac{1}{a} e^{ax} - \int 1 \cdot \frac{1}{a} e^{ax} dx = \frac{1}{a} x e^{ax} - \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} e^{ax} + C = \underline{\underline{\left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right) e^{ax} + C}}.$$

$$bI) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^{ax}} = \frac{0}{e^0} = \frac{0}{1} = 0.$$

$$bII) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{ax}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right)^{\text{L'Hôpital}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{ae^{ax}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{når } x < 0 \\ e^{-\frac{x}{2}} - e^{-x} & \text{når } x \geq 0 \end{cases}$$

c) Betrakter kun $x \geq 0$. Da er

$$f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} + e^{-x} = e^{-x} \left(-\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + 1 \right).$$

Siden $e^{-x} > 0$ for alle endelige verdier av x , har vi maksimalpunkt når

$$-\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}} = 2 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \ln 2 \Leftrightarrow x = \underline{\underline{2 \ln 2}} = \ln 2^2 = \underline{\underline{\ln 4}}.$$

Da er

$$f_{\max} = f(2 \ln 2) = e^{-\frac{1}{2} \cdot 2 \ln 2} - e^{-2 \ln 2} = (e^{\ln 2})^{-1} - (e^{\ln 2})^{-2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}.$$

Vi er sikre på at dette er maksimumsverdi (og ikke minimum) fordi f er kontinuerlig samtidig som vi fra del b vet at $f(0) = 0$.

$$d) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 0 + \int_0^{\infty} (e^{-\frac{x}{2}} - e^{-x}) dx = [-2e^{-\frac{x}{2}} + e^{-x}]_0^{\infty} = -0 + 0 + 2e^0 - e^0 = \underline{\underline{1}}.$$

$$\begin{aligned} e) \quad \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx &= 0 + \int_0^{\infty} x(e^{-\frac{x}{2}} - e^{-x}) dx = \int_0^{\infty} x e^{-\frac{1}{2}x} dx - \int_0^{\infty} x e^{-x} dx \\ &= \left[\left(\frac{x}{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{(-\frac{1}{2})^2} \right) e^{-\frac{1}{2}x} \right]_0^{\infty} - \left[\left(\frac{x}{-1} - \frac{1}{(-1)^2} \right) e^{-x} \right]_0^{\infty} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (-2x e^{-\frac{1}{2}x} - 4e^{-\frac{1}{2}x}) - 2 \cdot 0 \cdot e^0 + 4e^0 - \lim_{x \rightarrow \infty} (-x e^{-x} - e^{-x}) + 0 \cdot e^0 - e^0 \\ &= 0 - 0 - 0 + 4 - 0 + 0 - 0 - 1 = \underline{\underline{3}} \end{aligned}$$

f) Bruker skivemetoden. Hver skive har da et areal

$$A = \pi (e^{-\frac{x}{2}} - e^{-x})^2 = \pi \left((e^{-\frac{x}{2}})^2 - 2e^{-\frac{x}{2}} \cdot e^{-x} + (e^{-x})^2 \right) = \pi (e^{-x} - 2e^{-\frac{3}{2}x} + e^{-2x}).$$

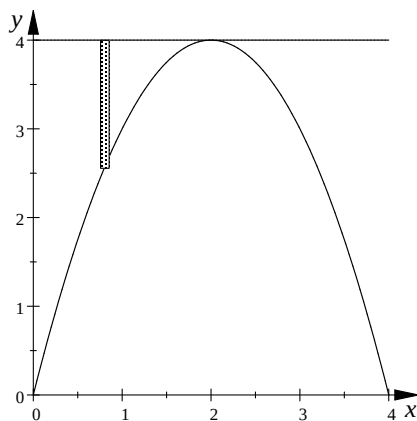
Volumet av rotasjonslegemet blir

$$\begin{aligned} V &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{x=0}^{x=a} A \cdot dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \pi (e^{-x} - 2e^{-\frac{3}{2}x} + e^{-2x}) dx \\ &= \pi \cdot \lim_{a \rightarrow \infty} \left[-e^{-x} - 2 \cdot \left(-\frac{2}{3} e^{-\frac{3}{2}x} \right) - \frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^a \\ &= \pi \cdot \lim_{a \rightarrow \infty} \left((-e^{-a} - 2 \cdot (-\frac{2}{3} e^{-\frac{3}{2}a}) - \frac{1}{2} e^{-2a}) - (-e^0 - 2 \cdot (-\frac{2}{3} e^0) - \frac{1}{2} e^0) \right) \\ &= \pi \cdot \left(0 + 1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \right) = \underline{\underline{\frac{1}{6} \pi}} \end{aligned}$$

Oppgave 16

$y = f(x) = 4x - x^2$, linja $y = 4$ og y -aksen.

a)



Skjæring mellom $y = 4x - x^2$ og $y = 4$ når

$$4x - x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}}$$

Ei loddrett stripe i avstand x fra y -aksen har høyde

$$h = 4 - f(x) = 4 - (4x - x^2) = \underline{\underline{x^2 - 4x + 4}}.$$

Arealet av flata blir da

$$\begin{aligned} A &= \int_{x=0}^{x=2} h \cdot dx = \int_0^2 (x^2 - 4x + 4) dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 - 2x^2 + 4x \right]_0^2 \\ &= \left(\frac{1}{3} \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 \right) - 0 = \frac{8}{3} - 8 + 8 = \underline{\underline{\frac{8}{3}}} \end{aligned}$$

b) Massesenteret har koordinatene (x_C, y_C) . Da er

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{1}{A} \int_0^2 x \cdot (4 - f(x)) dx = \frac{1}{\frac{8}{3}} \int_0^2 x \cdot (x^2 - 4x + 4) dx = \frac{3}{8} \int_0^2 (x^3 - 4x^2 + 4x) dx \\ &= \frac{3}{8} \left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{4}{3} x^3 + 2x^2 \right]_0^2 = \frac{3}{8} \left(\left(\frac{1}{4} \cdot 2^4 - \frac{4}{3} \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 \right) - 0 \right) = \frac{3}{8} \left(4 - \frac{32}{3} + 8 \right) = \frac{1}{2} \\ y_C &= \frac{1}{2A} \int_{x=0}^{x=2} (4^2 - f(x)^2) dx = \frac{1}{2 \cdot \frac{8}{3}} \int_0^2 (16 - (4x - x^2)^2) dx \\ &= \frac{3}{16} \int_0^2 (16 - 16x^2 + 8x^3 - x^4) dx = \frac{3}{16} \left[16x - \frac{16}{3} x^3 + 2x^4 - \frac{1}{5} x^5 \right]_0^2 \\ &= \frac{3}{16} \left(\left(16 \cdot 2 - \frac{16}{3} \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^4 - \frac{1}{5} \cdot 2^5 \right) - 0 \right) = \frac{3}{16} \left(32 - \frac{128}{3} + 32 - \frac{32}{5} \right) = \frac{14}{5} \end{aligned}$$

c) Bruker sylinderskallmetoden for å finne volumet ved rotasjon om y-aksen:

$$\begin{aligned} V &= \int_{x=0}^{x=2} 2\pi x \cdot h \cdot dx = 2\pi \int_0^2 x(x^2 - 4x + 4) dx = 2\pi \int_0^2 (x^3 - 4x^2 + 4x) dx \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{4}{3} x^3 + 2x^2 \right]_0^2 = 2\pi \left(\left(\frac{1}{4} \cdot 2^4 - \frac{4}{3} \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 \right) - 0 \right) = \frac{8}{3} \pi \end{aligned}$$

d) Når flata roterer om linja $y = 4$, får vi et legeme som kan deles opp i skiver med radius

$$r = 4 - f(x) = 4 - (4x - x^2) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2.$$

Volumet av rotasjonslegemet blir da

$$\begin{aligned} V &= \int_{x=0}^{x=2} \pi r^2 \cdot dx = \pi \int_0^2 ((x - 2)^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (x^4 - 4x^3 \cdot 2 + 6x^2 \cdot 2^2 - 4x \cdot 2^3 + 2^4) dx \\ &= \pi \int_0^2 (x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16) dx = \pi \left[\frac{1}{5} x^5 - 2x^4 + 8x^3 - 16x^2 + 16x \right]_0^2 \\ &= \pi \left(\left(\frac{1}{5} \cdot 2^5 - 2 \cdot 2^4 + 8 \cdot 2^3 - 16 \cdot 2^2 + 16 \cdot 2 \right) - 0 \right) = \pi \left(\frac{32}{5} - 32 + 64 - 64 + 32 \right) = \frac{32}{5} \pi \end{aligned}$$

Oppgave 17

$$\text{a1) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{-bx}}{1 - e^{-x}} = \left(\frac{0}{1 - 1} \right) \stackrel{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 \cdot e^{-bx} + x \cdot (-b) e^{-bx}}{e^x} = \frac{1 - 0}{1} = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{a2) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x e^{-bx}}{1 - e^{-x}} &= \left(\frac{\infty \cdot 0}{1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{bx} - e^{(b-1)x}} \stackrel{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{b e^{bx} - (b-1) e^{(b-1)x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{bx} (b - (b-1) e^{-x})} = 0 \end{aligned}$$

b) Bruker delvis integrasjon med

$$u = x \Rightarrow u' = 1 \text{ og } v' = e^{-bx} \Leftarrow v = -\frac{1}{b} e^{-bx}.$$

$$\int x e^{-bx} dx = x \cdot \left(-\frac{1}{b} e^{-bx} \right) - \int 1 \cdot \left(-\frac{1}{b} e^{-bx} \right) = -\frac{1}{b} x e^{-bx} - \frac{1}{b^2} e^{-bx} + C.$$

c) Flatas areal er

$$A = \int_0^a e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_0^a = 1 - e^{-a}.$$

I) Kaller tyngdepunktets koordinater $(\bar{x}, \bar{y})$. Da er:

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_0^a x \cdot e^{-x} dx = \frac{1}{A} \left[-xe^{-x} - e^{-x} \right]_0^a = \frac{-ae^{-a} - e^{-a} + 1}{1 - e^{-a}} = 1 - \frac{ae^{-a}}{1 - e^{-a}}.$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{A} \int_0^a \frac{1}{2} (e^{-x})^2 dx = \frac{1}{2A} \int_0^a e^{-2x} dx = \frac{1}{2A} \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^a = -\frac{1}{4} \frac{e^{-2a} - 1}{1 - e^{-a}} \\ &= \frac{1}{4} \frac{(1 - e^{-a})(1 + e^{-a})}{1 - e^{-a}} = \frac{1}{4} (1 + e^{-a}) \end{aligned}$$

$$\text{II) } \lim_{a \rightarrow \infty} \bar{x} = 1 - \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{ae^{-a}}{1 - e^{-a}} = 1 - 0 = 1.$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \bar{y} = \frac{1}{4} \lim_{a \rightarrow \infty} (1 + e^{-a}) = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}.$$

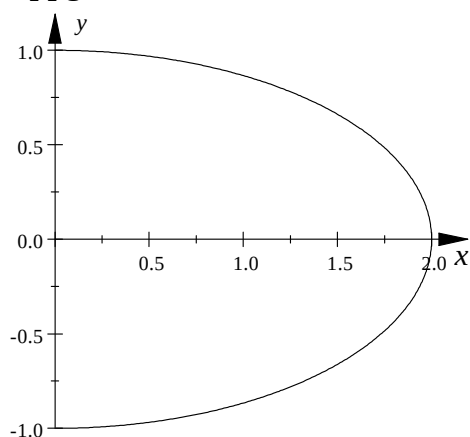
$$\text{III) } \lim_{a \rightarrow 0} \bar{x} = 1 - \lim_{a \rightarrow 0} \frac{ae^{-a}}{1 - e^{-a}} = 1 - 1 = 0.$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \bar{y} = \frac{1}{4} \lim_{a \rightarrow 0} (1 + e^{-a}) = \frac{1}{4} \cdot (1 + 1) = \frac{1}{2}.$$

IV) Bruker skivemetoden for å finne volumet når arealet dreies om x-aksen:

$$V = \int_0^a \pi (e^{-x})^2 dx = \pi \int_0^a e^{-2x} dx = \pi \left(-\frac{1}{2} \right) \left[e^{-2x} \right]_0^a = -\frac{1}{2} \pi (e^{-2a} - 1) = \frac{1}{2} \pi (1 - e^{-2a}).$$

Oppgave 18



$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1 \Leftrightarrow y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2^2}}$$

Lager striper med bredde dx i avstand x fra y-aksen.
Hver stripe har areal

$$dA = 2y \cdot dx = 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{2^2}} dx$$

slik at flatas statiske moment om y-aksen blir

$$M_y = \int_{x=0}^{x=2} x \cdot dA = \int_0^2 x \cdot 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{2^2}} dx = \frac{8}{3}.$$

Siden arealet av ellipsen er πab , blir arealet av flata

$$A = \frac{1}{2} \pi \cdot a \cdot b = \frac{1}{2} \pi \cdot 2 \cdot 1 = \pi$$

slik at massesenterets x-koordinat blir

$$x_C = \frac{M_y}{A} = \frac{\frac{8}{3}}{\pi} = \frac{8}{3\pi}.$$

Av symmetri-grunner blir massesenterets y-koordinat

$$\underline{\underline{y_C = 0.}}$$

Oppgave 19

$$\rho(x) = \frac{dm}{dx} = 1 + \sqrt{x}(2-x) \text{ for } 0 \leq x \leq 2.$$

a) Stavens masse blir

$$\begin{aligned} m &= \int_{x=0}^{x=2} dm = \int_0^2 \rho(x) dx = \int_0^2 \left(1 + 2\sqrt{x} - x^{\frac{3}{2}}\right) dx = \left[x + 2 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}\right]_0^2 \\ &= 2 + \frac{4}{3} \cdot 2^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} \cdot 2^{\frac{5}{2}} = 2 + \frac{8}{3} \sqrt{2} - \frac{8}{5} \sqrt{2} = 2 + \frac{16}{15} \sqrt{2} \end{aligned}$$

b) Stavens massesenter har x-koordinat

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{1}{m} \int_{x=0}^{x=2} x \cdot dm = \frac{1}{m} \int_0^2 x \cdot (1 + \sqrt{x}(2-x)) dx = \frac{1}{m} \int_0^2 \left(x + 2x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{5}{2}}\right) dx \\ &= \frac{1}{m} \left[\frac{1}{2} x^2 + 2 \cdot \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}}\right]_0^2 = \frac{1}{m} \left(\left(\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot 2^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{7} \cdot 2^{\frac{7}{2}}\right) - 0\right) \\ &= \frac{1}{2 + \frac{16}{15} \sqrt{2}} \cdot \left(2 + \frac{16}{5} \sqrt{2} - \frac{16}{7} \sqrt{2}\right) = \frac{2 + \frac{32}{35} \sqrt{2}}{2 + \frac{16}{15} \sqrt{2}} \end{aligned}$$

c) Trehetsmomentet om y-aksen er

$$\begin{aligned} I_y &= \int_{x=0}^{x=2} x^2 dm = \int_0^2 x^2 (1 + \sqrt{x}(2-x)) dx = \int_0^2 \left(x^2 + 2x^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{7}{2}}\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 + 2 \cdot \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{9} x^{\frac{9}{2}}\right]_0^2 = \left(\frac{1}{3} \cdot 2^3 + 2 \cdot \frac{2}{7} \cdot 2^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{9} \cdot 2^{\frac{9}{2}}\right) - 0 \\ &= \frac{8}{3} + \frac{32}{7} \sqrt{2} - \frac{32}{9} \sqrt{2} = \frac{8}{3} + \frac{64}{63} \sqrt{2} \end{aligned}$$

Oppgave 20

$$f(x) = e^{-x}, \quad x \geq 0.$$

a) Flatas areal blir

$$A = \int_0^{\ln 2} e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{\ln 2} = 1 - e^{-\ln 2} = 1 - 2^{-1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Tyngdepunktets x-koordinat blir

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{A} \int_0^{\ln 2} x \cdot e^{-x} dx = \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \left(\left[x \cdot (-e^{-x})\right]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} 1 \cdot (-e^{-x}) dx\right) = 2[-xe^{-x} - e^{-x}]_0^{\ln 2} \\ &= 2[-(x+1)e^{-x}]_0^{\ln 2} = 2 \cdot \left(-(\ln 2 + 1)e^{-\ln 2} + 1 \cdot e^0\right) = 2 \cdot \left(-(\ln 2 + 1) \cdot \frac{1}{2} + 1\right) = \underline{\underline{1 - \ln 2}} \end{aligned}$$

Tyngdepunktets y-koordinat blir

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{A} \int_0^{\ln 2} \frac{1}{2} \cdot (e^{-x})^2 dx = \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\ln 2} e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} [e^{-2x}]_0^{\ln 2} = -\frac{1}{2} \cdot (e^{-2 \ln 2} - e^0) \\ &= -\frac{1}{2} (2^{-2} - 1) = \underline{\underline{\frac{3}{8}}} \end{aligned}$$

b) Trehetsmomentet om y-aksen er gitt ved

$$I_y = \int_{x=0}^{x=\ln 2} x^2 dm.$$

Nå er massetettheten

$$\rho = \frac{m}{A} = \frac{dm}{dA} = \frac{dm}{y \cdot dx} \Leftrightarrow dm = \frac{m}{A} \cdot y \cdot dx.$$

Da blir

$$\begin{aligned} I_y &= \frac{m}{A} \int_0^{\ln 2} x^2 e^{-x} dx = \frac{m}{\frac{1}{2}} \left[(-x^2 - 2x - 2) e^{-x} \right]_0^{\ln 2} \\ &= 2m \left(\left(-(\ln 2)^2 - 2 \cdot \ln 2 - 2 \right) \cdot \underbrace{e^{-\ln 2}}_{=(e^{\ln 2})^{-1} = \frac{1}{2}} + 2 \cdot e^0 \right) \\ &= 2m \left(-\frac{1}{2} (\ln 2)^2 - \ln 2 - 1 + 2 \right) = \underline{\underline{m \left(2 - (\ln 2)^2 - 2 \ln 2 \right)}} \end{aligned}$$

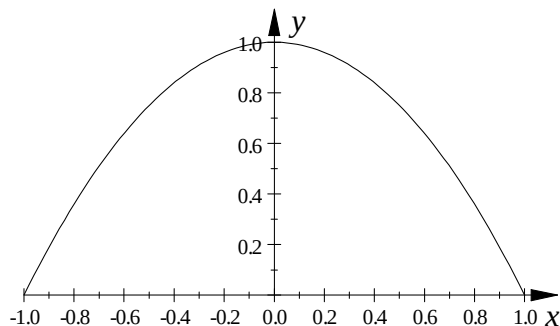
Under veis har vi benyttet delvis integrasjon samt at

$$\int x e^{-x} dx = (-1 - x) e^{-x} + C,$$

og fått

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{-x} dx &= \int \overset{u}{x} \cdot \left(\overset{v'}{x e^{-x}} \right) dx = \overset{u}{x} \cdot \left(\overset{v}{-x-1} \right) e^{-x} - \int \overset{u'}{1} \cdot \left(\overset{v}{-x-1} \right) e^{-x} dx \\ &= (-x^2 - x) e^{-x} + \int x e^{-x} dx + \int e^{-x} dx = (-x^2 - x) e^{-x} + (-x - 1) e^{-x} - e^{-x} + C \\ &= \underline{\underline{(-x^2 - 2x - 2) e^{-x} + C}} \end{aligned}$$

Oppgave 21



Grafen til

$$f(x) = 1 - x^2$$

skjærer x-aksen når

$$1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \underline{x = \pm 1}.$$

Arealet av flata er

$$\begin{aligned} A &= \int_{x=-1}^{x=1} y dx = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \left[x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-1}^1 \\ &= 1 - \frac{1}{3} \cdot 1^3 - (-1) + \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 \\ &= 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}} \end{aligned}$$

Flatas tetthet er

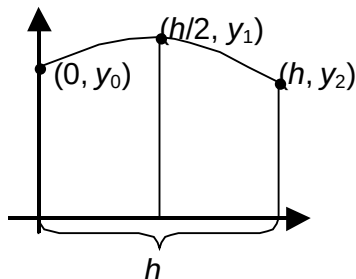
$$\rho = \frac{m}{A} = \frac{dm}{dA} \Leftrightarrow dm = \frac{m}{A} dA = \frac{m}{\frac{4}{3}} \cdot y dx = \frac{3}{4} m \cdot (1 - x^2) dx.$$

Tregghetsmomentet om y-aksen blir da

$$\begin{aligned} I_y &= \int_{x=-1}^{x=1} x^2 \cdot dm = \int_{-1}^1 x^2 \cdot \frac{3}{4} m \cdot (1 - x^2) dx = \frac{3}{4} m \int_{-1}^1 (x^2 - x^4) dx = \frac{3}{4} m \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{5} x^5 \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{3}{4} m \left(\frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{5} \cdot 1^5 - \frac{1}{3} (-1)^3 + \frac{1}{5} (-1)^5 \right) = \frac{3}{4} m \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3}{4} m \cdot \frac{4}{15} = \underline{\underline{\frac{1}{5} m}} \end{aligned}$$

4. Tillegg

Utleddning av Simpsons formel.



Utleddningen av Simpsons formel blir minst kronglete dersom vi legger inn et hjelpe-koordinatsystem som vist til venstre. Bredden av stripeparet settes til

$$h = 2\Delta x = 2 \frac{b-a}{2n} = \frac{b-a}{n}.$$

De tre punktene gis koordinater $(0, y_0)$, $(\frac{h}{2}, y_1)$ og (h, y_2) .

Vi ønsker å finne a , b og c slik at de tre punktene ligger på grafen til $y = ax^2 + bx + c$.

Da blir arealet under grafen

$$\int_0^h (ax^2 + bx + c) dx = \left[\frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx \right]_0^h = \frac{1}{3}ah^3 + \frac{1}{2}bh^2 + ch = \frac{1}{6}h \cdot (2ah^2 + 3bh + 6c).$$

Når de tre punktene ligger på grafen til $y = ax^2 + bx + c$, er disse tre likningene oppfylt:

1. $y_0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$
2. $y_1 = a\left(\frac{h}{2}\right)^2 + b \cdot \frac{h}{2} + c = \frac{1}{4}ah^2 + \frac{1}{2}bh + c$
3. $y_2 = ah^2 + bh + c$

Vi kan nå finne a , b og c uttrykt ved y_0 , y_1 , y_2 og h , og deretter sette inn i areal-formelen. Men vi skal være lurere. Vi multipliserer likning 2 med 4, og legger sammen de tre likningene. Da får vi

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = c + 4\left(\frac{1}{4}ah^2 + \frac{1}{2}bh + c\right) + (ah^2 + bh + c) = 2ah^2 + 3bh + 6c.$$

Men høyresiden er jo nettopp det som står inni parentesen i areal-formelen. Altså er arealet under grafen

$$\Delta A = \frac{1}{6}h \cdot (y_0 + 4y_1 + y_2) = \frac{b-a}{6n} (y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Men dette er jo kun arealet av *ett* stripepar. Når vi legger sammen bidragene av alle stripeparene, får vi

$$\begin{aligned} A &= \frac{b-a}{6n} (y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{b-a}{6n} (y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots + \frac{b-a}{6n} (y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_b) \\ &= \frac{b-a}{6n} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_b) \end{aligned}$$

Og dette er jo nettopp Simpsons formel.

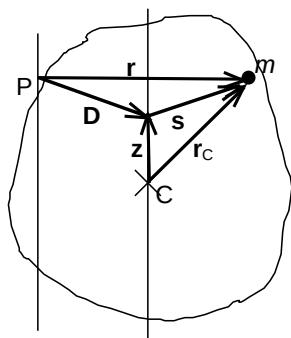
Bevis for Steiners setning.

Vi skal nå bevise Steiners setning:

La I_C være treghetsmomentet for et legeme med masse m om en akse gjennom massesenteret. La I_P være treghetsmomentet for dette legemet om en annen akse som er parallell med aksene gjennom massesenteret, i avstand D fra denne. Da er

$$I_P = I_C + mD^2$$

Bevis:



Figuren viser et legeme med massesenter C. Legemet består av småbiter med masse m_i . Gjennom massesenteret er det trukket en akse, og treghetsmomentet om denne aksene er

$$I_C = \sum m_i s_i^2$$

der vi summerer over hele legemet (på figuren er indeksene i ikke tatt med for oversiktens skyld). Det er også tegnet inn en annen akse gjennom P, parallell med den første i avstand D .

Treghetsmomentet om aksene gjennom P er

$$I_P = \sum m_i r_i^2.$$

Figuren må oppfattes slik at vektorene $\mathbf{D}$, $\mathbf{r}$ og $\mathbf{s}$ ligger i et plan vinkelrett på de to aksene. Da blir

$$\mathbf{r}_i^2 = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i = (\mathbf{D} + \mathbf{s}_i) \cdot (\mathbf{D} + \mathbf{s}_i) = D^2 + 2\mathbf{D} \cdot \mathbf{s}_i + \mathbf{s}_i^2$$

slik at

$$\begin{aligned} I_P &= \sum m_i r_i^2 = \sum m_i (D^2 + 2\mathbf{D} \cdot \mathbf{s}_i + \mathbf{s}_i^2) = D^2 \sum m_i + 2\mathbf{D} \cdot \sum m_i \mathbf{s}_i + \sum m_i \mathbf{s}_i^2 \\ &= D^2 \cdot m + 2\mathbf{D} \cdot \sum m_i \mathbf{s}_i + I_C \end{aligned}$$

Vi må nå vise at

$$\mathbf{D} \cdot \sum m_i \mathbf{s}_i = 0.$$

Det gjør vi ved å sette

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{r}_{c,i} - \mathbf{z}_i$$

slik at

$$\mathbf{D} \cdot \sum m_i \mathbf{s}_i = \mathbf{D} \cdot \sum m_i (\mathbf{r}_{c,i} - \mathbf{z}_i) = \mathbf{D} \cdot \sum m_i \mathbf{r}_{c,i} - \sum m_i \mathbf{D} \cdot \mathbf{z}_i.$$

Her blir

$$\sum m_i \mathbf{D} \cdot \mathbf{z}_i = 0$$

fordi $\mathbf{D}$ står vinkelrett på $\mathbf{z}_i$, og

$$\sum m_i \mathbf{r}_{c,i} = 0$$

fordi denne summen beregnes med massesenteret som origo. Du husker sikkert at massesenterets posisjon er $\mathbf{R}_C = \frac{1}{m} \sum m_i \mathbf{r}_{c,i}$, slik at summen må bli lik null når origo faller sammen med massesenteret. Dermed står vi igjen med at $I_P = D^2 \cdot m + I_C$, og det var nettopp det vi skulle vise.

5. Småoppgaver i teksten

5.1. Oppgaver

Du finner løsningsforslag ved å klikke på oppgavenummeret.

Oppgave 1.2.1

Løs integralene nedenfor:

a) $\int_1^2 \frac{x^2 + x - 1}{x} dx$

b) $\int_0^3 (x + 2)^2 dx$

c) $\int_1^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx$

d) $\int_0^1 \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx$

Oppgave 1.2.2

Beregn arealet som avgrenses av:

a) Grafen til $y = f(x) = \sin x$ når $0 \leq x \leq \pi$, og x -aksen.

b) Grafen til funksjonen f gitt nedenfor, og x -aksen:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{når } 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \\ \cos x & \text{når } \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Oppgave 1.3.1

Beregn integralene nedenfor:

a) $\int e^{-t} dt$

b) $\int e^{3t} dt$

c) $\int \frac{1}{x-3} dx$

d) $\int \frac{2}{3x+1} dx$

e) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} dx$

f) $\int x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$

Oppgave 1.3.2

Beregn de bestemte integralene nedenfor:

a) $\int_1^4 \frac{x}{x^2 + 9} dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos x dx$

c) $\int_0^2 3x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$

Oppgave 1.4.1

Beregn integralene nedenfor:

a) $\int \frac{1}{x^2 - 4x} dx$

b) $\int \frac{x+4}{x^2 - 2x} dx$

c) $\int \frac{x-3}{x^2 - 4} dx$

d) $\int \frac{1}{x^2 - 7x + 12} dx$

Oppgave 1.4.2

Beregn integralene nedenfor:

a) $\int \frac{x-1}{x^2(x-2)} dx$

b) $\int \frac{x^2 + 2}{x(x^2 + 1)} dx$

Oppgave 1.5.1

Beregn integralene nedenfor:

a) $\int x \ln x dx$

b) $\int x^2 e^x dx$

c) $\int \sqrt{x} \cdot \ln x dx$

d) $\int x^2 \ln x dx$

Oppgave 1.5.2

Beregn integralene nedenfor:

a) $\int_0^1 x \ln(x+1) dx$ (Hint: Vis at $\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$).

b) $\int \frac{2x^3}{x^2 - 9} dx$

c) $\int_0^2 \frac{4x}{\sqrt{2x^2+1}} dx$

d) $\int (2x+1)(x^2+x)^2 dx$

e) $\int_0^3 x\sqrt{x+1} dx$

f) $\int_0^1 \frac{x}{x^4+1} dx$

Oppgave 1.6.1

Beregn integralet:

$$\int \frac{2x+1}{x^2-2x+10} dx$$

Oppgave 1.6.2

Beregn integralet:

$$\int \frac{x+10}{x^4+6x^3+10x^2} dx$$

Oppgave 1.6.3

Beregn integralet:

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$$

Oppgave 1.6.4

Beregn integralene nedenfor:

a) $\int \cos x \cdot \sin^2 x dx$

b) $\int \sin x \cdot \tan x dx$

c) $\int \sqrt{1-\cos x} dx$ (Hint: Bruk en formel for halve vinkler).

Oppgave 1.6.5

Beregn integralene nedenfor ved hjelp av de substitusjonene som er antydnet:

a) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$ Hint: Bruk substitusjonen $x = 2 \sin t$.

b) $\int_0^3 \frac{x^2}{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}} dx$ Hint: Bruk bl.a substitusjonen $x = 3 \tan t$.

Oppgave 1.7.1

Beregn disse integralene dersom de eksisterer:

- a) $\int_0^{\infty} e^{-2x} dx$
- b) $\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2 + 1} dx$
- c) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4} dx$

Oppgave 1.7.2

Beregn $\int_0^1 f(x) dx$ dersom dette integralet eksisterer, når

- a) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$
- b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- c) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
- d) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

Oppgave 1.8.1

Bruk Simpsons formel til å beregne en tilnærmet verdi for

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

ved å dele intervallet fra 0 til π inn i 4 like store intervaller.

Oppgave 1.8.2

En ingeniør vil finne ut hvor mange liter vann som renner gjennom et rør i løpet av ett minutt. Han monterer derfor en strømningsmåler som måler vannstrømmen i liter pr sekund, og registrerer vannstrømmen hvert 10. sekund. Resultatene ble:

Tid (sekund)	0	10	20	30	40	50	60
Vannstrøm (liter pr sekund)	2.16	2.69	3.12	2.47	2.30	2.91	3.25

Bruk Simpsons formel til å beregne en tilnærmet verdi for antall liter vann som rant gjennom røret i løpet av dette minuttet.

Oppgave 2.1.1

- a) Ei flate avgrenses av grafene til de to funksjonene

$$f(x) = x^2 - 6$$

og

$$g(x) = -x^2 + 2x + 6.$$

Beregn arealet av flata.

- b) Ei flate avgrenses av y-aksen og grafene til de to funksjonene

$$f(x) = \tan x$$

og

$$g(x) = \sqrt{2} \cos x$$

der $0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$ for begge funksjonene. Beregn arealet av flata.

Oppgave 2.1.2

- a) Ei flate avgrenses av grafen til funksjonen

$$y = f(x) = 1 - \ln x,$$

linja $x = 1$ og x -aksen. Finn arealet av flata på to måter:

- 1) Ved å legge vertikale striper med bredde dx .
- 2) Ved å legge horisontale striper med bredde dy .

- b) Ei flate avgrenses av x -aksen og av grafene til de to funksjonene

$$y = f(x) = +\sqrt{x+3}$$

og

$$y = g(x) = -x + 3$$

Finn arealet av flata på to måter:

- 1) Ved å legge vertikale striper med bredde dx .
- 2) Ved å legge horisontale striper med bredde dy .

Oppgave 2.2.1

- a) Ei flate avgrenses av grafen til $y = f(x) = e^{-2x}$, x -aksen, y -aksen, og den rette linja $x = \ln 2$. Finn volumet av det omdreiningslegemet som framkommer når denne flata roterer en gang om x -aksen.

- b) Ei flate avgrenses av grafene til $y = f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ og $y = g(x) = \sqrt{x-1}$. Finn volumet av det omdreiningslegemet som framkommer når denne flata roterer en gang om x -aksen.

- c) Ei flate avgrenses av x -aksen og grafene til $y = f(x) = -x + 4$ og $y = g(x) = +\sqrt{x+2}$. Finn volumet av det omdreiningslegemet som framkommer når denne flata roterer en gang om x -aksen.

Oppgave 2.2.2

- a) Ei flate avgrenses av grafen til $y = f(x) = +\sqrt{4-x}$, x -aksen, og y -aksen. Finn volumet av det omdreiningslegemet som framkommer når denne flata roterer en gang om y -aksen.

- b) Ei flate avgrenses av grafen til $y = f(x) = \ln(5-x)$, x -aksen, og y -aksen. Finn volumet av det omdreiningslegemet som framkommer når denne flata roterer en gang om y -aksen.

- c) Vi har funksjonene $y = f(x) = x$ og $y = g(x) = x^2 - 6$, og skal begrense oss til $x \geq 0$. Grafene til disse to funksjonene samt x -aksen avgrenser ei flate. Finn volumet av det omdreiningslegemet som framkommer når denne flata roterer en gang om y -aksen.

Oppgave 2.2.3

- a) Ei flate avgrenses av grafen til $y = f(x) = 2e^{-x}$ og de to rette linjene $x = \ln 4$ og $y = 2$. Finn volumet av det omdreiningslegemet som framkommer når denne flata roterer en gang om linja $y = 2$.
- b) Ei flate avgrenses av grafen til $y = f(x) = x^2$, x -aksen, og den rette linja $x = 2$. Finn volumet av det omdreiningslegemet som framkommer når denne flata roterer en gang om linja $x = 2$.

Oppgave 2.2.4

- a) Ei flate avgrenses av grafen til $y = f(x) = e^x$, x -aksen, y -aksen og den rette linja $x = \ln 4$. Finn volumet av det omdreiningslegemet som framkommer når denne flata roterer en gang om y -aksen.
- b) Ei flate avgrenses av y -aksen og av grafene til $y = f(x) = x^2$ og $y = g(x) = 6 - x$. Finn volumet av det omdreiningslegemet som framkommer når denne flata roterer en gang om y -aksen.

Oppgave 2.2.5

- a) Ei flate avgrenses av grafen til $y = f(x) = \tan x$, x -aksen, og den rette linja $x = \frac{1}{4}\pi$. Bruk sylinderskallmetoden til å finne volumet av det omdreiningslegemet som framkommer når denne flata roterer en gang om x -aksen. (Om nødvendig kan integral løses med data-verktøy).
- b) Ei flate avgrenses av grafene til $y = f(x) = \ln x$ og $y = g(x) = 1 - x$, og den rette linja $y = 1$. Bruk sylinderskallmetoden til å finne volumet av det omdreiningslegemet som framkommer når denne flata roterer en gang om x -aksen.

Oppgave 2.3.1

- a) Beregn lengden av grafen til funksjonen $y = f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ fra $x = 0$ til $x = 5$.
- b) Beregn lengden av grafen til funksjonen $y = f(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$ fra $x = 0$ til $x = \ln 2$.

Oppgave 2.4.1

- a) Vis at arealet av sideflaten til en rett, sirkulær kjegle med grunnflateradius R og høyde H er

$$A = \frac{1}{2} R \cdot S$$

der $S = \sqrt{R^2 + H^2}$ er lengden av en sidekant.

Hint: Dann kjeglen ved å rotere grafen til $y = f(x) = \frac{R}{H}x$ om x -aksen.

- b) Beregn arealet av den rotasjonsflata som dannes når grafen til funksjonen

$$y = f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x, \quad 1 \leq x \leq 3$$

roterer en gang rundt y-aksen.

Oppgave 2.5.1

- a) Vi har gitt funksjonen

$$y = f(x) = x^{\frac{3}{2}}, \quad 0 \leq x \leq 4.$$

Beregn massesenteret til det omdreiningslegemet som framkommer når:

- 1) Flata som avgrenses av grafen til f og den rette linja $x = 4$ roterer en gang om x -aksen.
- 2) Flata som avgrenses av grafen til f og den rette linja $y = 8$ roterer en gang om y -aksen.

- b) Ei flate avgrenses av x -aksen og grafen til funksjonen

$$y = f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{når } 0 \leq x < 4 \\ 4 - \frac{1}{2}x & \text{når } 4 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

Beregn massesenteret til det omdreiningslegemet som framkommer når denne flata roterer en gang om x -aksen.

Oppgave 2.5.2

- a) Grafen til funksjonen

$$y = f(x) = +\sqrt{R^2 - x^2}, \quad -R \leq x \leq R$$

blir en halvsirkel med radius R . Finn massesenteret til den flata som avgrenses av halvsirkelen og x -aksen.

- c) Ei flate avgrenses av y -aksen, den rette linja $y = 4$ og grafen til funksjonen

$$y = f(x) = e^x.$$

Finn massesenteret til denne flata.

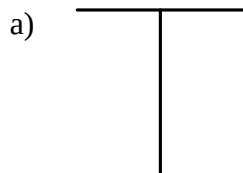
Oppgave 2.5.3

Grafen til funksjonen

$$y = f(x) = +\sqrt{R^2 - x^2}, \quad -R \leq x \leq R$$

blir en halvsirkel med radius R . Finn massesenteret til denne grafen.

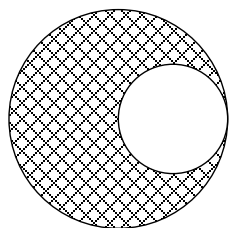
Oppgave 2.5.4



Vi danner en T ved at to tynne, homogene, jamntykk stenger som begge har masse m og lengde L sveises sammen.
Hvor er massesenteret til dette legemet?

- b)

Ei jamntykk, homogen skive har radius R . Vi klipper ut et sirkelformet hull med radius $r = \frac{1}{2}R$ slik at sentrum i hullet ligger en avstand $\frac{1}{2}R$ fra skivas sentrum. Se figuren til venstre.



Hvor er massesenteret til skiva etter at hullet ble klipt ut?

Oppgave 2.6.1

En rett, tynn stav er spisset til mot den ene enden, slik at tettheten er gitt ved

$$\rho(x) = \rho_0 \cdot \frac{x}{L}, \quad 0 \leq x \leq L.$$

Her er staven plassert på x -aksen med den spisse enden i origo, og tettheten er gitt i kg/m.

a) Vis at stavens masse er $m = \frac{1}{2}\rho_0 L$.

Hint: Benytt at et lite masse-element er $dm = \rho \cdot dx$.

b) Hvor ligger stavens massesenter?

c) Finn stavens treghetsmoment uttrykt ved m og L

1) om y -aksen.

2) om en akse vinkelrett på staven gjennom stavens massesenter.

Oppgave 2.6.2

a) Finn treghetsmomentet til et kvadrat med sidelengde a og masse m om en akse langs en av kvadrates sidekanter.

b) Ei flate med masse m avgrenses av grafen til $y = f(x) = 4 - x^2$ og x -aksen.

1) Finn flatas treghetsmoment om y -aksen.

2) Finn flatas treghetsmoment om x -aksen.

Oppgave 2.6.3

a) Finn treghetsmomentet til et kvadrat med sidelengde a og masse m om en akse vinkelrett på flata gjennom et av hjørnene.

Hint: Benytt resultatet fra Oppgave 2.6.2a.

b) Ei flate med masse m avgrenses av grafen til

$$y = f(x) = 4 - x^2$$

og x -aksen. Finn flatas treghetsmoment om en akse vinkelrett på flata gjennom origo.

Hint: Benytt resultatet fra Oppgave 2.6.2b.

Oppgave 2.6.4

a) Et rotasjonslegeme dannes ved at flata som avgrenses av x -aksen og grafen til

$$y = f(x) = 4 - x^2$$

roteres en gang om y -aksen. Finn treghetsmomentet om y -aksen til dette rotasjonslegemet når legemet har masse m .

b) Et rotasjonslegeme dannes ved at flata som avgrenses av x -aksen, y -aksen, grafen til

$$y = f(x) = \frac{4}{x+1}$$

og den rette linja $x = 3$ roteres en gang om y -aksen. Finn treghetsmomentet om y -aksen til dette rotasjonslegemet når legemet har masse m .

- c) Et rotasjonslegeme dannes ved at flata som avgrenses av x -aksen, y -aksen, grafen til

$$y = f(x) = \ln x$$

og den rette linja $y = 1$ roteres en gang om y -aksen. Finn treghetsmomentet om y -aksen til dette rotasjonslegemet når legemet har masse m .

Oppgave 2.6.5

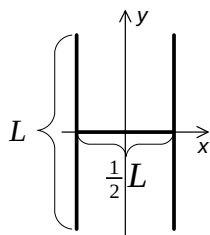
I disse oppgavene kan du få bruk for at:

En tynn stang med masse m og lengde L har

- Treghetsmoment $I_C = \frac{1}{12}mL^2$ om en akse vinkelrett på stanga gjennom massesenteret.
- Treghetsmoment $I_A = \frac{1}{3}mL^2$ om en akse gjennom et endepunkt vinkelrett på stanga.

Et kvadrat med sidekant L og masse m har treghetsmoment $I_x = \frac{1}{3}mL^2$ om en akse langs en sidekant.

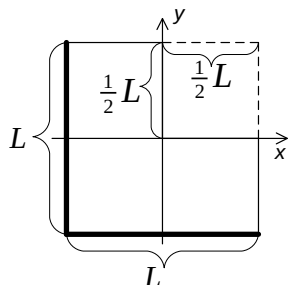
a)



En plant legeme med form som en H dannes ved at en jamntykk, homogen stav kuttes i tre deler. To av dem er like og har lengde L . De legges parallelt og forbindes i sine midtpunkter med den tredje delen som har lengde $\frac{1}{2}L$ slik figuren til venstre viser. Hele legemet har masse m .

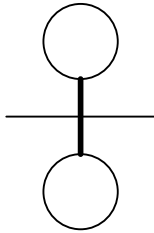
- 1) Beregn legemets treghetsmoment om x -aksen.
- 2) Beregn legemets treghetsmoment om y -aksen.
- 3) Beregn legemets treghetsmoment om en akse vinkelrett på legemet gjennom origo.

b)



Vi starter med ei kvadratisk plate med sidelengde L . Fra det ene hjørnet fjerner vi et kvadrat med sidelengde $\frac{1}{2}L$. Vi forsterker plata med en tynn stav langs hver av de hele sidene slik figuren til venstre viser. Plata har masse m etter at hjørnet ble klipt bort. Hver av forsterker-stavene har også masse m . Beregn legemets treghetsmoment om en akse parallell med en av de forsterkede sidene gjennom midtpunktet av den andre forsterkede siden slik figuren til venstre viser.

Oppgave 2.6.6

- a)  To kuler som hver har masse m og radius R er forbundet med en lett stang som har lengde $2R$. Bestem legemets treghetsmoment om en akse vinkelrett på stanga gjennom stangas midtpunkt.
- Du kan benytte at treghetsmomentet for ei kule med masse m og radius R om en akse gjennom kulas sentrum er $I = \frac{2}{5}mR^2$.

- b) Finn treghetsmomentet til et kvadrat med sidekant L og masse m om en akse vinkelrett på kvadratet gjennom dets massesenter.

Du kan benytte at i oppgave 2.6.3 fant vi at treghetsmomentet om en akse vinkelrett på planet gjennom et hjørne er $\frac{2}{3}mL^2$.

5.2. Løsning på småoppgaver.

Oppgave 1.2.1

- a)
$$\int_1^2 \frac{x^2 + x - 1}{x} dx = \int_1^2 \left(x + 1 - \frac{1}{x} \right) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + x - \ln|x| + C \right]_1^2$$
$$= \left(\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2 - \ln 2 \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot 1^2 + 1 - \ln 1 \right) = (4 - \ln 2) - \frac{3}{2} = \underline{\underline{\frac{5}{2} - \ln 2}}$$
- b)
$$\int_0^3 (x+2)^2 dx = \int_0^3 (x^2 + 4x + 4) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x + C \right]_0^3$$
$$= \left(\frac{1}{3} \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 0^3 + 2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 \right) = 39 - 0 = \underline{\underline{39}}$$
- c)
$$\int_1^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^4 \left(\frac{x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \int_1^4 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} \right) dx$$
$$= \left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} - \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x^{-\frac{1}{2}+1} + C \right]_1^4 = \left[\frac{1}{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \right]_1^4 = \left[\frac{2}{3} x \cdot x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} \right]_1^4$$
$$= \left[\sqrt{x} \cdot \left(\frac{2}{3}x - 2 \right) \right]_1^4 = \left(\sqrt{4} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 4 - 2 \right) \right) - \left(\sqrt{1} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1 - 2 \right) \right) = 2 \cdot \frac{2}{3} - 1 \cdot \left(-\frac{4}{3} \right) = \underline{\underline{\frac{8}{3}}}$$
- d)
$$\int_0^1 \frac{x^2-1}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^2+1-2}{x^2+1} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{x^2+1} \right) dx = \left[x - 2 \arctan x + C \right]_0^1$$
$$= (1 - 2 \arctan 1) - (0 - 2 \arctan 0) = \left(1 - 2 \cdot \frac{\pi}{4} \right) - (0 - 2 \cdot 0) = 1 - \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{1 - \frac{\pi}{2}}}$$

Oppgave 1.2.2

- a)
$$A = \int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x + C]_0^\pi = (-\cos \pi - (-\cos 0)) = -(-1) + 1 = \underline{\underline{2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad A &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left(-\cos \frac{\pi}{4} - (-\cos 0)\right) + \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + 1 + 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} = \underline{\underline{2 - \sqrt{2}}} \end{aligned}$$

Oppgave 1.3.1

Deloppgave a) og b) løses enklest med formelen $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$.

$$\text{a)} \quad \int e^{-t} dt = \frac{1}{-1}e^{-t} + C = \underline{\underline{-e^{-t} + C}}.$$

$$\text{b)} \quad \int e^{3t} dt = \underline{\underline{\frac{1}{3}e^{3t} + C}}.$$

Deloppgave c) og d) løses enklest med formelen $\int \frac{1}{x-a} dx = \ln|x-a| + C$.

$$\text{c)} \quad \int \frac{1}{x-3} dx = \underline{\underline{\ln|x-3| + C}}.$$

$$\text{d)} \quad \int \frac{2}{3x+1} dx = \frac{2}{3} \int \frac{1}{x+\frac{1}{3}} dx = \underline{\underline{\frac{2}{3} \ln|x+\frac{1}{3}| + C}}.$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad \int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx &= \int \frac{\cancel{x}}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2\cancel{x}} du = \frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} u^{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{-1+2} u^{\frac{1}{2}} + C \\ &= \sqrt{u} + C = \underline{\underline{\sqrt{x^2+4} + C}} \end{aligned}$$

Her har vi benyttet substitusjonen

$$u = x^2 + 4 \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2x} du.$$

$$\text{f)} \quad \int x^2 \sqrt{x^3+1} dx = \int \cancel{x^2} \sqrt{u} \cdot \frac{1}{3\cancel{x^2}} du = \frac{1}{3} \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}+1} u^{\frac{1}{2}+1} + C = \underline{\underline{\frac{2}{9}(x^3+1)^{\frac{3}{2}} + C}}.$$

Her har vi benyttet substitusjonen

$$u = x^3 + 1 \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2 \Leftrightarrow dx = \frac{1}{3x^2} du.$$

Oppgave 1.3.2

$$\text{a)} \quad \int_1^4 \frac{x}{x^2+9} dx$$

Braker substitusjonen

$$u = x^2 + 9 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow dx = \frac{du}{2x}.$$

Ser også at når $x=1$ blir $u=1^2+9=10$, og når $x=4$ blir $u=4^2+9=25$.

Da blir

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{x}{x^2+9} dx &= \int_{u=10}^{u=25} \frac{\cancel{x}}{u} \cdot \frac{du}{2\cancel{x}} = \frac{1}{2} \int_{10}^{25} \frac{du}{u} = \left[\frac{1}{2} \ln u + C \right]_{10}^{25} = \frac{1}{2} \ln 25 - \frac{1}{2} \ln 10 \\ &= \ln \left(25^{\frac{1}{2}} \right) - \ln \left(10^{\frac{1}{2}} \right) = \ln \sqrt{25} - \ln \sqrt{10} = \underline{\underline{\ln 5 - \ln \sqrt{10}}} = \underline{\underline{\ln 5 - \frac{1}{2} \ln 10}} \end{aligned}$$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos x \, dx$

Bruker substitusjonen

$$u = \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Leftrightarrow dx = \frac{du}{\cos x}.$$

Ser også at når $x = 0$ blir $u = \sin 0 = 0$, og når $x = \frac{\pi}{2}$ blir $u = \sin \frac{\pi}{2} = 1$.

Da blir

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos x \, dx = \int_{u=0}^{u=1} u \cdot \cancel{\cos x} \cdot \frac{du}{\cancel{\cos x}} = \int_0^1 u \, du = \left[\frac{1}{2} u^2 + C \right]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

c) $\int_0^2 3x^2 \sqrt{x^3 + 1} \, dx$

Bruker substitusjonen

$$u = x^3 + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2 \Leftrightarrow dx = \frac{du}{3x^2}.$$

Ser også at når $x = 0$ blir $u = 0^3 + 1 = 1$, og når $x = 2$ blir $u = 2^3 + 1 = 9$.

Da blir

$$\begin{aligned} \int_0^2 3x^2 \sqrt{x^3 + 1} \, dx &= \int_{u=1}^{u=9} \cancel{3x^2} \sqrt{u} \cdot \frac{du}{\cancel{3x^2}} = \int_1^9 u^{\frac{1}{2}} \, du = \left[\frac{1}{\frac{1}{2} + 1} u^{\frac{1}{2} + 1} + C \right]_1^9 \\ &= \left[\frac{2}{3} u \cdot \sqrt{u} \right]_1^9 = \frac{2}{3} \cdot (9 \cdot \sqrt{9} - 1 \cdot \sqrt{1}) = \frac{2}{3} (27 - 1) = \underline{\underline{\frac{52}{3}}} \end{aligned}$$

Oppgave 1.4.1

a) $\int \frac{1}{x^2 - 4x} \, dx = \int \frac{-\frac{1}{4}}{x} \, dx + \int \frac{\frac{1}{4}}{x - 4} \, dx = -\frac{1}{4} \ln|x| + \frac{1}{4} \ln|x - 4| + C = \underline{\underline{\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x - 4}{x} \right| + C}}.$

Delbrøkoppspaltingen gjøres slik:

$$\frac{1}{x^2 - 4x} = \frac{1}{x(x - 4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 4} = \frac{A(x - 4) + Bx}{x(x - 4)} = \frac{(A + B)x - 4A}{x(x - 4)}$$

Telleren skal være lik på venstre og høyre side:

$$-4A = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{A = -\frac{1}{4}}}.$$

$$A + B = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{B = -A = \frac{1}{4}}}.$$

b) $\int \frac{x + 4}{x^2 - 2x} \, dx = \int \frac{-2}{x} \, dx + \int \frac{3}{x - 2} \, dx = -2 \ln|x| + 3 \ln|x - 2| + C = \underline{\underline{\ln \frac{|x - 2|^3}{x^2} + C}}$

Delbrøkoppspaltingen gjøres slik:

$$\frac{x + 4}{x^2 - 2x} = \frac{x + 4}{x(x - 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} = \frac{A(x - 2) + Bx}{x(x - 2)} = \frac{(A + B)x - 2A}{x(x - 2)}$$

Telleren skal være lik på venstre og høyre side:

$$-2A = 4 \Leftrightarrow \underline{\underline{A = -2}}.$$

$$A + B = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{B = 1 - A = 1 - (-2) = 3}}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad \int \frac{x-3}{x^2-4} dx &= \int \frac{\frac{5}{4}}{x+2} dx + \int \frac{-\frac{1}{4}}{x-2} dx = \frac{5}{4} \ln|x+2| - \frac{1}{4} \ln|x-2| + C \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{(x+2)^5}{x-2} \right| + C \end{aligned}$$

Delbrøkoppspaltingen gjøres slik:

$$\begin{aligned} \frac{x-3}{x^2-4} &= \frac{x-3}{(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(x+2)}{(x+2)(x-2)} \\ &= \frac{(A+B)x + (-2A+2B)}{(x+2)(x-2)} \end{aligned}$$

Telleren skal være lik på venstre og høyre side:

$$A+B=1 \quad (1)$$

$$-2A+2B=-3 \quad (2)$$

Vi multipliserer (1) med 2 og legger sammen likningene:

$$4B=-1 \Leftrightarrow B=-\frac{1}{4}.$$

$$\text{Fra (1) får vi nå: } A=1-B=1-\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{4}.$$

d) Nøkkelen er at

$$x^2-7x+12=(x-4)(x-3).$$

Da blir

$$\frac{1}{x^2-7x+12} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3) + B(x-4)}{x^2-7x+12} = \frac{(A+B)x + (-3A-4B)}{x^2-7x+12}$$

Telleren skal være lik på venstre og høyre side:

$$A+B=0$$

$$-3A-4B=1$$

Vi multipliserer første likning med 4 og legger sammen. Da får vi

$$A=1,$$

som direkte gir

$$A+B=0 \Leftrightarrow B=-A=-1.$$

Altså er

$$\int \frac{1}{x^2-7x+12} dx = \int \left(\frac{1}{x-4} + \frac{-1}{x-3} \right) dx = \ln|x-4| - \ln|x-3| + C = \ln \left| \frac{x-4}{x-3} \right| + C.$$

Oppgave 1.4.2

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \int \frac{x-1}{x^2(x-2)} dx &= \int \frac{\frac{1}{2}}{x^2} dx + \int \frac{-\frac{1}{4}}{x} dx + \int \frac{\frac{1}{4}}{x-2} dx = \frac{1}{2} \int x^{-2} dx - \frac{1}{4} \ln|x| + \frac{1}{4} \ln|x-2| + C \\ &= \frac{1}{2} \cdot (-x^{-1}) + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x} \right| - \frac{1}{2x} + C \end{aligned}$$

Delbrøkoppspalter:

$$\begin{aligned}\frac{x-1}{x^2(x-2)} &= \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-2} = \frac{A(x-2) + Bx(x-2) + Cx^2}{x^2(x-2)} \\ &= \frac{Ax - 2A + Bx^2 - 2Bx + Cx^2}{x^2(x-2)} = \frac{(B+C)x^2 + (A-2B)x - 2A}{x^2(x-2)}\end{aligned}$$

Dette gir likningene

$$B + C = 0$$

$$A - 2B = 1$$

$$-2A = -1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}.$$

Så nøster vi opp:

$$A - 2B = 1 \Leftrightarrow B = \frac{1}{2}(A - 1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{1}{4}$$

$$B + C = 0 \Leftrightarrow C = -B = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } \int \frac{x^2+2}{x(x^2+1)} dx &= \int \frac{2}{x} dx + \int \frac{-x}{x^2+1} dx = 2\ln|x| - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx \\ &= 2\ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C = \ln x^2 - \ln(x^2+1)^{\frac{1}{2}} + C = \ln \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} + C\end{aligned}$$

Delbrøkoppspalter:

$$\begin{aligned}\frac{x^2+2}{x(x^2+1)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)x}{x(x^2+1)} = \frac{Ax^2 + A + Bx^2 + Cx}{x(x^2+1)} \\ &= \frac{(A+B)x^2 + Cx + A}{x(x^2+1)}\end{aligned}$$

Dette gir likningene

$$A = 2$$

$$C = 0$$

$$A + B = 1 \Leftrightarrow B = 1 - A = 1 - 2 = -1$$

Under integrasjonen har jeg benyttet substitusjonen

$$u = x^2 + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow 2x dx = du.$$

Da blir

$$\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \int \frac{du}{u} = \ln u = \ln(x^2+1)$$

der det ikke er nødvendig med absoluttverditegn fordi $x^2 + 1$ alltid er positiv.

Oppgave 1.5.1

$$\begin{aligned}\text{a) } \int x^u \ln x dx &= \frac{1}{2} x^2 \ln|x| - \int \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} x^2 \ln|x| - \frac{1}{2} \int x dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \ln|x| - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} x^2 + C = \frac{1}{2} x^2 \left(\ln|x| - \frac{1}{2} \right) + C\end{aligned}$$

Her er det lett både å integrere og å derivere x , mens vi helst vil derivere $\ln x$.

Derfor velger vi:

$$u' = x \Leftrightarrow u = \int x dx = \frac{1}{2} x^2.$$

$$v = \ln x \Rightarrow v' = \frac{1}{x}.$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + C \\ &= \underline{\underline{e^x (x^2 - 2x + 2) + C}} \end{aligned}$$

Vi velger å derivere x^2 for å komme fram til et enklere uttrykk. Det er også enkelt å integrere e^x :

$$v' = e^x \quad \Leftarrow \quad v = \int e^x dx = e^x.$$

$$u = x^2 \quad \Rightarrow \quad u' = 2x.$$

Det siste integralet løses på samme måte (se Eksempel 5.1a i hoved-notatet).

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad \int \sqrt{x} \cdot \ln x dx &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln|x| - \int \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln|x| - \frac{2}{3} \int x^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln|x| - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \underline{\underline{\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} (\ln|x| - \frac{2}{3}) + C}} \end{aligned}$$

Som før vil vi helst derivere $\ln x$, samtidig som det er enkelt å integrere $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Da får vi:

$$u' = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad \Leftarrow \quad u = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} x^{\frac{1}{2} + 1} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$$

$$v = \ln x \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad \int x^2 \cdot \ln x dx &= \frac{1}{3} x^3 \cdot \ln|x| - \int \frac{1}{3} x^3 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{3} x^3 \cdot \ln|x| - \frac{1}{3} \int x^2 dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 \cdot \ln|x| - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} x^3 + C = \underline{\underline{\frac{1}{3} x^3 (\ln|x| - \frac{1}{3}) + C}} \end{aligned}$$

Foretrekker å derivere $\ln x$ framfor å integrere, og må derfor integrere x^2 . Får da:

$$u' = x^2 \quad \Leftarrow \quad u = \frac{1}{3} x^3$$

$$v = \ln x \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{1}{x}$$

Oppgave 1.5.2

$$\text{a)} \quad \int x \cdot \ln(x+1) dx = \frac{1}{2} x^2 \cdot \ln(x+1) - \int \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{x+1} dx = \frac{1}{2} x^2 \cdot \ln(x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x+1} dx$$

For å løse det siste integralet, må jeg foreta en polynomdivisjon:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{x+1} &= (x^2 + 0x + 0) : (x+1) = x - 1 + \frac{1}{x+1} \\ &\quad \underline{-(x^2 + x)} \\ &\quad \quad -x \\ &\quad \quad \underline{-(-x-1)} \\ &\quad \quad \quad 1 \end{aligned}$$

Følgelig er

$$\int \frac{x^2}{x+1} dx = \int \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x+1| + C$$

slik at

$$\begin{aligned} \int x \cdot \ln(x+1) dx &= \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x+1) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x+1| + C \right) \\ &= \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C_1 \end{aligned}$$

Til slutt settes grensene inn:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \cdot \ln(x+1) dx &= \left[\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|x+1| \right]_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \ln 2 - \frac{1}{4} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2}\ln 2 \right) - \left(0 - 0 + 0 - \frac{1}{2}\ln 1 \right) \\ &= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

b) Her må vi starte med en polynomdivisjon:

$$\begin{aligned} (2x^3 + 0x^2 + 0x + 0) : (x^2 - 9) &= 2x + \frac{18x}{x^2 - 9} \\ \underline{-(2x^3 + 0x^2 - 18x)} & \\ 18x & \end{aligned}$$

Deretter følger en delbrøkkoppspalting:

$$\frac{18x}{x^2 - 9} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3) + B(x+3)}{(x+3)(x-3)} = \frac{(A+B)x + (-3A+3B)}{x^2 - 9}$$

Her må vi ha

$$A + B = 18$$

$$-3A + 3B = 0$$

Multipliserer øverste likning med 3 og legger sammen:

$$6B = 54 \Leftrightarrow B = 9,$$

som videre gir

$$A + B = 18 \Leftrightarrow A = 18 - B = 18 - 9 = 9.$$

Dermed blir

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3}{x^2 - 9} dx &= \int \left(2x + \frac{9}{x+3} + \frac{9}{x-3} \right) dx = \underline{\underline{x^2 + 9\ln|x+3| + 9\ln|x-3| + C}} \\ &= x^2 + 9\ln(|x+3|)(|x-3|) + C = \underline{\underline{x^2 + 9\ln(|x^2 - 9|) + C}} \end{aligned}$$

c) Vi bruker substitusjonen

$$u = 2x^2 + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 4x \Leftrightarrow dx = \frac{du}{4x}.$$

Videre ser vi at når $x = 0$ blir $u = 2 \cdot 0^2 + 1 = 1$, og når $x = 2$ blir $u = 2 \cdot 2^2 + 1 = 9$.

Da blir

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{4x}{\sqrt{2x^2 + 1}} dx &= \int_{u=1}^{u=9} \frac{\cancel{4x}}{\sqrt{u}} \frac{du}{\cancel{4x}} = \int_1^9 u^{-\frac{1}{2}} du = \left[\frac{1}{-\frac{1}{2}+1} u^{-\frac{1}{2}+1} + C \right]_1^9 \\ &= \left[2u^{\frac{1}{2}} \right]_1^9 = 2 \left[\sqrt{u} \right]_1^9 = 2(\sqrt{9} - \sqrt{1}) = 2(3-1) = \underline{\underline{4}} \end{aligned}$$

d) For all del! Ikke multipliser ut faktorene i integranden! Bruk heller at

$$u = x^2 + x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x + 1 \Leftrightarrow dx = \frac{du}{2x + 1}$$

Da blir

$$\int (2x+1)(x^2+x)^2 dx = \int \cancel{(2x+1)} u^2 \frac{du}{\cancel{2x+1}} = \int u^2 du = \frac{1}{3} u^3 + C = \underline{\underline{\frac{1}{3}(x^2+x)^3 + C}}.$$

e) $\int_0^3 x\sqrt{x+1} dx.$

Her er det enklest å benytte substitusjonen

$$u = x + 1 \Leftrightarrow x = u - 1 \Leftrightarrow dx = du.$$

Da ser vi at når $x = 0$ blir $u = 0 + 1 = 1$, og når $x = 3$ blir $u = 3 + 1 = 4$. Dermed blir

$$\begin{aligned} \int_0^3 x\sqrt{x+1} dx &= \int_1^4 (u-1)\sqrt{u} du = \int_1^4 \left(u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\right) du = \left[\frac{1}{\frac{3}{2}+1} u^{\frac{3}{2}+1} - \frac{1}{\frac{1}{2}+1} u^{\frac{1}{2}+1} \right]_1^4 \\ &= \left[\frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \left(\frac{2}{5} \sqrt{4^5} - \frac{2}{3} \sqrt{4^3} \right) - \left(\frac{2}{5} \sqrt{1^5} - \frac{2}{3} \sqrt{1^3} \right) \\ &= \frac{2}{5} \cdot 32 - \frac{2}{3} \cdot 8 - \frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{116}{15}}} \end{aligned}$$

f) $\int_0^1 \frac{x}{x^4+1} dx = \int_0^1 \frac{x}{(x^2)^2+1} dx = \int_0^1 \frac{\frac{1}{2} du}{u^2+1} = \frac{1}{2} [\arctan u]_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{8}}}.$

Her har vi brukt substitusjonen

$$u = x^2 \Leftrightarrow du = 2x dx \Leftrightarrow x dx = \frac{1}{2} du.$$

Denne gangen fører ikke substitusjonen til at grensene endres.

Oppgave 1.6.1

$$\int \frac{2x+1}{x^2-2x+10} dx$$

Ser at nevneren ikke kan faktoriseres i reelle førstegradsfaktorer.

Prøver først substitusjonen

$$u = x^2 - 2x + 10 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x - 2 \Leftrightarrow du = (2x - 2) dx.$$

Omformer derfor telleren:

$$\int \frac{2x+1}{x^2-2x+10} dx = \int \frac{2x-2+3}{x^2-2x+10} dx = \int \frac{2x-2}{x^2-2x+10} dx + \int \frac{3}{x^2-2x+10} dx.$$

Nå kan det første integralet løses med den nevnte substitusjonen:

$$\int \frac{2x-2}{x^2-2x+10} dx = \int \frac{du}{u} = \ln u + C = \ln(x^2 - 2x + 10) + C$$

der det ikke er nødvendig med absoluttverditegn fordi $x^2 - 2x + 10$ alltid er positiv.

Det andre integralet omformes slik:

$$\begin{aligned} \int \frac{3}{x^2-2x+10} dx &= \int \frac{3}{(x^2-2x+1)+9} dx = \int \frac{3}{(x-1)^2+9} dx \\ &= \int \frac{3}{9\left(\left(\frac{x-1}{3}\right)^2+1\right)} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{x-1}{3}\right)^2+1} dx \end{aligned}$$

Bruker nå substitusjonen

$$u = \frac{x-1}{3} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow du = \frac{1}{3} dx.$$

Da blir

$$\int \frac{3}{x^2 - 2x + 10} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{x-1}{3}\right)^2 + 1} dx = \int \frac{du}{u^2 + 1} = \arctan u + C = \arctan\left(\frac{x-1}{3}\right) + C.$$

Samler trådene:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+1}{x^2-2x+10} dx &= \int \frac{2x-2}{x^2-2x+10} dx + \int \frac{3}{x^2-2x+10} dx \\ &= \ln(x^2-2x+10) + \arctan\left(\frac{x-1}{3}\right) + C \end{aligned}$$

Oppgave 1.6.2

$$\int \frac{x+10}{x^4+6x^3+10x^2} dx$$

Ser at nevneren kan skrives

$$x^4 + 6x^3 + 10x^2 = x^2(x^2 + 6x + 10)$$

der den siste faktoren ikke kan faktoriseres i reelle førstegradsfaktorer. Prøver derfor delbrøkkoppstillingen

$$\begin{aligned} \frac{x+10}{x^4+6x^3+10x^2} &= \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx+D}{x^2+6x+10} \\ &= \frac{A(x^2+6x+10) + Bx(x^2+6x+10) + (Cx+D)x^2}{x^2(x^2+6x+10)} \\ &= \frac{Ax^2+6Ax+10A+Bx^3+6Bx^2+10Bx+Cx^3+Dx^2}{x^2(x^2+6x+10)} \\ &= \frac{(B+C)x^3 + (A+6B+D)x^2 + (6A+10B)x + 10A}{x^2(x^2+6x+10)} \end{aligned}$$

Nøster opp bakfra, og ser at

$$10A=10 \Leftrightarrow A=1$$

$$6A+10B=1 \Leftrightarrow 10B=1-6=-5 \Leftrightarrow B=-\frac{1}{2}$$

$$A+6B+D=0 \Leftrightarrow D=-A-6B=-1-6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=2$$

$$B+C=0 \Leftrightarrow C=-B=\frac{1}{2}$$

Dermed har vi at

$$\int \frac{x+10}{x^4+6x^3+10x^2} dx = \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{-\frac{1}{2}}{x} dx + \int \frac{\frac{1}{2}x+2}{x^2+6x+10} dx.$$

De to første integralene er greie:

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C.$$

$$\int \frac{-\frac{1}{2}}{x} dx = -\frac{1}{2} \ln|x| + C.$$

Det siste integralet er verre. Den naturlige substitusjonen er

$$u = x^2 + 6x + 10 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x + 6 \Leftrightarrow du = (2x + 6)dx.$$

Omformer derfor telleren slik:

$$\frac{1}{2}x + 2 = \frac{1}{4}(2x + 8) = \frac{1}{4}(2x + 6) + \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{4}(2x + 6) + \frac{1}{2}.$$

Da blir

$$\int \frac{\frac{1}{2}x + 2}{x^2 + 6x + 10} dx = \frac{1}{4} \int \frac{2x + 6}{x^2 + 6x + 10} dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{x^2 + 6x + 10} dx.$$

der

$$\int \frac{2x + 6}{x^2 + 6x + 10} dx = \int \frac{du}{u} = \ln u + C = \ln(x^2 + 6x + 10) + C.$$

For å løse det siste integralet, benytter jeg at

$$x^2 + 6x + 10 = x^2 + 6x + 9 + 1 = (x + 3)^2 + 1,$$

slik at substitusjonen

$$u = x + 3 \Rightarrow du = dx$$

gir

$$\begin{aligned} \int \frac{\frac{1}{2}}{x^2 + 6x + 10} dx &= \int \frac{\frac{1}{2}}{(x + 3)^2 + 1} dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{u^2 + 1} du = \frac{1}{2} \arctan u + C \\ &= \frac{1}{2} \arctan(x + 3) + C \end{aligned}$$

Samler trådene, og får

$$\int \frac{x + 10}{x^4 + 6x^3 + 10x^2} dx = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \ln|x| + \frac{1}{4} \ln(x^2 + 6x + 10) + \frac{1}{2} \arctan(x + 3) + C.$$

Oppgave 1.6.3

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$$

Vi oppfatter dette som $\int_1^e \frac{1}{x} \cdot \ln x dx$, og benytter delvis integrasjon. Vi fortrekker å derivere $\ln x$, og må derfor integrere $\frac{1}{x}$. Da får vi:

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \ln x dx = \left[(\ln x) \cdot \ln x \right]_1^e - \int_1^e (\ln x) \cdot \left(\frac{1}{x} \right) dx.$$

Men det siste integralet er jo det samme som det integralet vi startet med. Vi har altså fått en likning med dette integralet som ukjent. Vi løser denne likningen, og får

$$2 \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \left[(\ln x)^2 \right]_1^e \Leftrightarrow \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} ((\ln e)^2 - (\ln 1)^2) = \frac{1}{2} (1^2 - 0^2) = \frac{1}{2}$$

Oppgave 1.6.4

a) Benytter substitusjonen

$$u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx.$$

Da blir

$$\int \cos x \cdot \sin^2 x \, dx = \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + C = \underline{\underline{\frac{1}{3}\sin^3 x + C}}.$$

$$\text{b)} \quad \int \sin x \cdot \tan x \, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \cos x \, dx = \int \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} \cdot \cos x \, dx.$$

Hensikten med disse omformingene er å kunne bruke substitusjonen

$$u = \sin x \Rightarrow du = \cos x \, dx.$$

Da blir

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} \cdot \cos x \, dx &= \int \frac{u^2}{1 - u^2} du = - \int \frac{u^2}{u^2 - 1} du = - \int \frac{u^2 - 1 + 1}{u^2 - 1} du \\ &= - \int \left(1 + \frac{1}{u^2 - 1} \right) du = -u - \int \frac{1}{(u+1)(u-1)} du \\ &= -u - \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{u-1} - \frac{\frac{1}{2}}{u+1} \right) du \\ &= -u - \frac{1}{2} \ln|u-1| + \frac{1}{2} \ln|u+1| + C = -\sin x + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right) + C \end{aligned}$$

Her har jeg benyttet at $-1 \leq \sin x \leq 1$ slik at $|\sin x - 1| = 1 - \sin x$ og $|1 + \sin x| = 1 + \sin x$. Dette kan omformes videre slik:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right) &= \frac{1}{2} \ln \frac{(1 + \sin x)^2}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \frac{1}{2} \ln \frac{(1 + \sin x)^2}{1 - \sin^2 x} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{(1 + \sin x)^2}{\cos^2 x} = \ln \left(\frac{(1 + \sin x)^2}{\cos^2 x} \right)^{\frac{1}{2}} = \ln \frac{1 + \sin x}{|\cos x|} \end{aligned}$$

Dermed blir

$$\int \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} \cdot \cos x \, dx = \ln \frac{1 + \sin x}{|\cos x|} - \sin x + C.$$

c) Benytter at

$$\sin\left(\frac{1}{2}x\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \Leftrightarrow \sqrt{1 - \cos x} = \sqrt{2} \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$$

Da blir

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 - \cos x} \, dx &= \int \sqrt{2} \sin\left(\frac{1}{2}x\right) dx = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \left(-\cos\left(\frac{1}{2}x\right) \right) + C = -2\sqrt{2} \cos\left(\frac{1}{2}x\right) + C \\ &= -2\sqrt{2} \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} + C = \underline{\underline{-2\sqrt{1 + \cos x} + C}} \end{aligned}$$

Oppgave 1.6.5

$$\text{a)} \quad \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} dx$$

Substitusjonen $x = 2 \sin t$ gir nå

$$\frac{dx}{dt} = 2 \cos t \Leftrightarrow dx = 2 \cos t \, dt$$

og

$$\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - 4 \sin^2 t} = 2\sqrt{1 - \sin^2 t} = 2 \cos t.$$

Videre ser vi at når $x = 0$ blir $t = 0$, og når $x = \sqrt{3}$ blir $\sin t = \frac{1}{2}\sqrt{3} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{3}$.

Da blir

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx = \int_0^{\frac{1}{3}\pi} \frac{4\sin^2 t}{2\cos t} \cdot 2\cos t dt = 4 \int_0^{\frac{1}{3}\pi} \sin^2 t dt.$$

Dette siste integralet løses enklest når vi husker at

$$\cos(2t) = 1 - 2\sin^2 t \Leftrightarrow \sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t)).$$

Da blir

$$\begin{aligned} 4 \int_0^{\frac{1}{3}\pi} \sin^2 t dt &= 2 \int_0^{\frac{1}{3}\pi} (1 - \cos(2t)) dt = 2 \left[t - \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_0^{\frac{1}{3}\pi} \\ &= 2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} - 0 + 0 \right) = \underline{\underline{\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}}} \end{aligned}$$

b)
$$\int_0^3 \frac{x^2}{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}} dx$$

Substitusjonen $x = 3\tan t$ gir nå

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3}{\cos^2 t} \Leftrightarrow dx = \frac{3dt}{\cos^2 t}$$

og

$$(x^2+9)^{\frac{3}{2}} = (9\tan^2 t + 9)^{\frac{3}{2}} = 9^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} \right)^{\frac{3}{2}} = 27 \left(\frac{1}{\cos^2 t} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{27}{\cos^3 t}.$$

Videre ser vi at når $x = 0$ blir $t = 0$, og når $x = 3$ blir $\tan t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4}$.

Da blir

$$\int_0^3 \frac{x^2}{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{9\tan^2 t}{\frac{27}{\cos^3 t}} \cdot \frac{3dt}{\cos^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t}{\frac{1}{\cos t}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t}{\cos t} dt.$$

Dette integralet har vi løst i Oppgave 1.6.4b. Vi stjeler resultatet derfra, og får

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{x^2}{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}} dx &= \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{\sin^2 t}{\cos t} dt = \left[\ln \frac{1+\sin t}{|\cos t|} - \sin t \right]_0^{\frac{1}{4}\pi} \\ &= \ln \frac{1+\sin(\frac{1}{4}\pi)}{|\cos(\frac{1}{4}\pi)|} - \sin(\frac{1}{4}\pi) - \ln \frac{1+0}{1} + 0 = \ln \left(\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{2}\sqrt{2} - 0 \\ &= \ln \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{2} = \ln \frac{2\sqrt{2}+2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ &= \underline{\underline{\ln(\sqrt{2}+1) - \frac{1}{2}\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

Oppgave 1.7.1

a)
$$\int_0^\infty e^{-2x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-2x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{-2} e^{-2x} \right]_0^b = \frac{1}{-2} \left(\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-2b} - e^0 \right) = \frac{1}{-2} (0 - 1) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

b)
$$\int_1^\infty \frac{x}{x^2+1} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_1^b \frac{2x}{x^2+1} dx$$

Substitusjonen

$$u = x^2 + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow du = 2x dx$$

gir

$$\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \int \frac{du}{u} = \ln u + C = \ln(x^2 + 1) + C$$

slik at

$$\int_1^\infty \frac{x}{x^2+1} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_1^b \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln(x^2 + 1)]_1^b = \frac{1}{2} \cdot (\lim_{b \rightarrow \infty} (\ln(b^2 + 1)) - \ln 1)$$

Men grenseverdien i uttrykket ovenfor går mot uendelig, slik at integralet går mot uendelig.

$$c) \quad \int_0^\infty \frac{1}{x^2 + 4} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{4\left(\frac{x^2}{4} + 1\right)} dx = \frac{1}{4} \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} dx.$$

Substitusjonen

$$u = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow dx = 2 du$$

gir

$$\int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} dx = \int \frac{1}{u^2 + 1} \cdot 2 du = 2 \arctan u + C = 2 \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

slik at

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{x^2 + 4} dx &= \frac{1}{4} \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{4} \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \left[2 \arctan\left(\frac{x}{2}\right) \right]_0^b \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\lim_{b \rightarrow \infty} \arctan\left(\frac{b}{2}\right) - \arctan 0 \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \underline{\underline{\frac{1}{4} \pi}} \end{aligned}$$

Oppgave 1.7.2

Vi ser at i alle oppgavene vil $f(x) \rightarrow \infty$ når $x \rightarrow 1^-$. Vi må derfor benytte at

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{b \rightarrow 1^-} \int_0^b f(x) dx.$$

$$\begin{aligned} a) \quad \int \frac{1}{1-x^2} dx &= \int \frac{-1}{(x-1)(x+1)} dx = \int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1} \right) dx = -\frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x+1| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + C \end{aligned}$$

Her har jeg hoppet over detaljer i delbrøkkoppstillingen. Setter inn grenser, og får

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x^2} dx = \lim_{b \rightarrow 1^-} \left[\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \right]_0^b = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow 1^-} \left(\ln \frac{1+b}{1-b} - \ln \frac{1+0}{1-0} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\lim_{b \rightarrow 1^-} \frac{1+b}{1-b} \right) - 0$$

Men denne grenseverdien eksisterer ikke. Følgelig divergerer integralet.

$$b) \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{b \rightarrow 1^-} [\arcsin x]_0^b = \lim_{b \rightarrow 1^-} (\arcsin b) - \arcsin 0 = \frac{1}{2} \pi - 0 = \underline{\underline{\frac{1}{2} \pi}}$$

$$c) \quad \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{b \rightarrow 1^-} \int_0^b \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Benytter substitusjonen

$$u = 1 - x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2x \Leftrightarrow dx = \frac{-du}{2x}.$$

Da blir

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{\cancel{x}}{\sqrt{u}} \cdot \left(\frac{-du}{2\cancel{x}} \right) = -\frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} u^{-\frac{1}{2}+1} + C \\ &= -\sqrt{u} + C = -\sqrt{1-x^2} + C \end{aligned}$$

slik at

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{b \rightarrow 1^-} \int_0^b \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{b \rightarrow 1^-} \left[-\sqrt{1-x^2} \right]_0^b = -\lim_{b \rightarrow 1^-} \sqrt{1-b^2} + \sqrt{1-0} = \underline{\underline{1}}.$$

$$d) \quad \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{b \rightarrow 1^-} \int_0^b \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

For å løse dette integralet, benytter jeg den trigonometriske substitusjonen

$$x = \sin t \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \cos t & \Leftrightarrow dx = \cos t dt \\ \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t \end{cases}$$

Da blir

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{\sin^2 t}{\cancel{\cos t}} \cdot \cancel{\cos t} dt = \int \sin^2 t dt = \int \frac{1}{2}(1 - \cos(2t)) dt \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin(2t) + C}} \end{aligned}$$

Her har jeg benyttet at

$$\cos(2t) = 1 - 2\sin^2 t \Leftrightarrow \sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t)).$$

For å gjeninnføre x , benytter jeg at

$$\sin(2t) = 2\sin t \cos t = 2\sin t \cdot \sqrt{1-\sin^2 t} = 2x \cdot \sqrt{1-x^2}$$

mens $t = \arcsin x$, slik at

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \arcsin x - \frac{1}{4} \cdot 2x\sqrt{1-x^2} + C = \underline{\underline{\frac{1}{2}(\arcsin x - x\sqrt{1-x^2}) + C}}.$$

Da blir

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \lim_{b \rightarrow 1^-} \int_0^b \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow 1^-} \left[\arcsin x - x\sqrt{1-x^2} \right]_0^b \\ &= \frac{1}{2} \left(\lim_{b \rightarrow 1^-} (\arcsin b) - b\sqrt{1-b^2} - \arcsin 0 + 0\sqrt{1-0^2} \right) \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\pi - 0 - 0 + 0 \right) = \frac{1}{4}\pi}} \end{aligned}$$

Oppgave 1.8.1

Når intervallet fra 0 til π deles inn i 4 like store intervaller, blir $2n = 4 \Leftrightarrow n = 2$. Da blir

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx &\approx \frac{\pi-0}{6 \cdot 2} \left(1 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} + 2 \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} + 4 \cdot \frac{\sin \frac{3\pi}{4}}{\frac{3\pi}{4}} + 1 \cdot \frac{\sin \pi}{\pi} \right) \\ &= \frac{\pi}{12} \left(1 + 4 \cdot \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{\pi}{4}} + 2 \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{2}} + 4 \cdot \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{3\pi}{4}} + 0 \right) \approx \underline{\underline{1.852}}\end{aligned}$$

Under veis har jeg benyttet at

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Oppgave 1.8.2

Dersom vi kaller vannstrømmen (målt i liter pr sekund) for $q(t)$, blir samlet vannmengde (målt i liter)

$$\int_0^{60} q(t) dt.$$

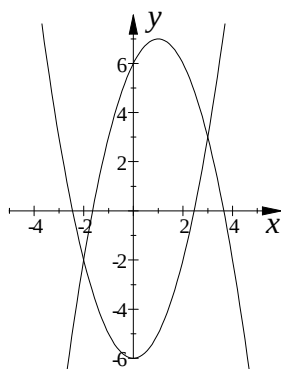
Når intervallet fra 0 til 60 deles inn i 6 like store delintervaller, blir $2n = 6 \Leftrightarrow n = 3$.

Da blir

$$\begin{aligned}\int_0^{60} q(t) dt &\approx \frac{60-0}{6 \cdot 3} (1 \cdot 2.16 + 4 \cdot 2.69 + 2 \cdot 3.12 + \dots + 4 \cdot 2.91 + 1 \cdot 3.25) \\ &\approx \underline{\underline{161.77}}\end{aligned}$$

Oppgave 2.1.1

a)

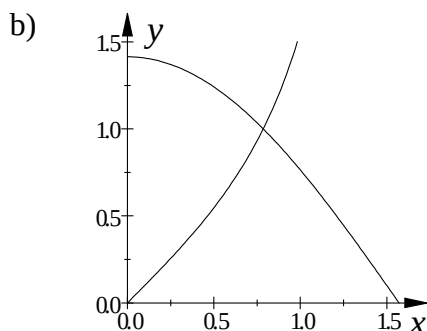


Situasjonen er illustrert til venstre. Vi må først finne skjæringspunktene mellom grafene:

$$\begin{aligned}f(x) &= g(x) \Leftrightarrow x^2 - 6 = -x^2 + 2x + 6 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 12 &= 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \\ x &= \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}\end{aligned}$$

Vi ser at grafen til $g(x) = -x^2 + 2x + 6$ ligger over grafen til $f(x) = x^2 - 6$ i det aktuelle området. Da blir arealet

$$\begin{aligned}A &= \int_{-2}^3 (g(x) - f(x)) dx = \int_{-2}^3 ((-x^2 + 2x + 6) - (x^2 - 6)) dx = \int_{-2}^3 (-2x^2 + 2x + 12) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 12x \right]_{-2}^3 = \left(-\frac{2}{3} \cdot 3^3 + 3^2 + 12 \cdot 3 \right) - \left(-\frac{2}{3} \cdot (-2)^3 + (-2)^2 + 12 \cdot (-2) \right) \\ &= -18 + 9 + 36 - \frac{16}{3} - 4 + 24 = \underline{\underline{\frac{125}{3}}}\end{aligned}$$



Situasjonen er illustrert til venstre. Vi må først finne skjæringspunktet mellom grafene:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \Leftrightarrow \tan x = \sqrt{2} \cos x \\ \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} &= \sqrt{2} \cos x \\ \Leftrightarrow \sin x &= \sqrt{2} \cos^2 x = \sqrt{2} (1 - \sin^2 x) \\ \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin^2 x + \sin x - \sqrt{2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot \sqrt{2} \cdot (-\sqrt{2})}}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2\sqrt{2}} = \frac{-1 \pm 3}{2\sqrt{2}} = \begin{cases} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ = \frac{-4}{2\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Her er kun løsningen $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}\pi$ brukbar.

Vi ser at grafen til $g(x) = \sqrt{2} \cos x$ ligger over grafen til $f(x) = \tan x$ i det aktuelle området. Da blir arealet

$$A = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} (\sqrt{2} \cos x - \tan x) dx = \sqrt{2} \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \cos x dx - \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{\sin x}{\cos x} dx.$$

Her er

$$\sqrt{2} \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \cos x dx = \sqrt{2} [\sin x]_0^{\frac{1}{4}\pi} = \sqrt{2} (\sin(\frac{1}{4}\pi) - \sin 0) = \sqrt{2} (\frac{1}{2}\sqrt{2} - 0) = 1.$$

Det siste integralet løses med substitusjonen

$$u = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \Leftrightarrow \sin x dx = -du.$$

Videre ser vi at når $x = 0$ blir $u = \cos 0 = 1$, og når $x = \frac{1}{4}\pi$ blir $u = \cos(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

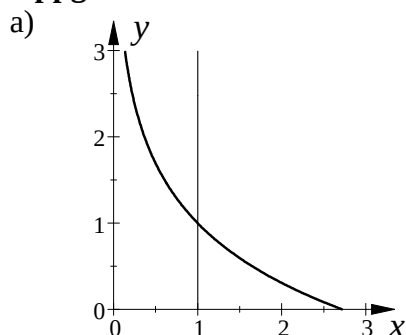
Da blir

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{\sin x}{\cos x} dx &= \int_1^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{-du}{u} = [\ln u]_{\frac{1}{2}\sqrt{2}}^1 = (\ln 1 - \ln(\frac{1}{2}\sqrt{2})) \\ &= 0 - (\ln \sqrt{2} - \ln 2) = \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

Alt i alt blir

$$A = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} (\sqrt{2} \cos x - \tan x) dx = \underline{\underline{1 - \frac{1}{2} \ln 2}} = \underline{\underline{1 - \ln \sqrt{2}}}.$$

Oppgave 2.1.2



På figuren til venstre er grafen til $y = f(x) = 1 - \ln x$ tegnet med tykk strek, mens grafen til $x = 1$ er tegnet med tynn strek. I skjæringspunktet er

$$y = 1 - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$$

Grafen til $y = 1 - \ln x$ skjærer x -aksen når

$$1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e.$$

Det arealet som avgrenses, er da

$$\begin{aligned} A &= \int_1^e (1 - \ln x) dx = \left[x - (x \ln x - x) \right]_1^e = \left[2x - x \ln x \right]_1^e \\ &= (2e - e \cdot \ln e) - (2 \cdot 1 - 1 \cdot \ln 1) = 2e - e \cdot 1 - 2 + 1 \cdot 0 = \underline{\underline{e - 2}} \end{aligned}$$

For å løse det ubestemte integralet $\int \ln x dx$, har jeg oppfattet det som $\int 1 \cdot \ln x dx$ og benyttet delvis integrasjon.

Når $y = 1 - \ln x$, blir

$$\ln x = 1 - y \Leftrightarrow x = e^{1-y} = e^1 \cdot e^{-y} = e \cdot e^{-y}.$$

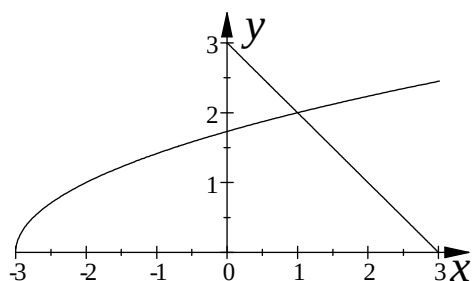
Når stripene legges horisontalt, blir lengden av ei stripe i avstand y fra x -aksen

$$l = x - 1 = e \cdot e^{-y} - 1.$$

Da blir arealet

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (e \cdot e^{-y} - 1) dy = \left[e(-e^{-y}) - y \right]_0^1 = (-e \cdot e^{-1} - 1) - (-e \cdot e^0 - 0) \\ &= -e^{1-1} - 1 + e = \underline{\underline{e - 2}} \end{aligned}$$

b)



På figuren til venstre ser du grafene til

$$f(x) = \sqrt{x+3} \text{ og } g(x) = -x+3.$$

Grafene skjærer x -aksen når

$$\sqrt{x+3} = 0 \Leftrightarrow x = -3$$

og når

$$-x+3 = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

Dessuten skjærer grafene hverandre når

$$\sqrt{x+3} = -x+3 \Rightarrow x+3 = (-x+3)^2 \Leftrightarrow x+3 = x^2 - 6x + 9$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2} = \left\{ \frac{6}{2}, \frac{1}{2} \right\}$$

Av figuren ser vi at det er løsningen $x = 1$ som skal brukes. Da er

$$y = -1 + 3 = \underline{2}.$$

(Løsningen $x = 6$ gir et skjæringspunkt mellom $g(x)$ og grafen til $y = -\sqrt{x+3}$ når $y = -3$).

Når stripene legges vertikalt, må vi dele flata inn i to deler:

$$A = \int_{-3}^1 \sqrt{x+3} dx + \int_1^3 (-x+3) dx.$$

Det første integralet løses med substitusjonen

$$u = x+3 \Leftrightarrow x = u-3 \Rightarrow dx = du.$$

Da blir

$$\begin{aligned} A &= \int_0^4 \sqrt{u} du + \int_1^3 (-x+3) dx = \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 + \left[-\frac{1}{2} x^2 + 3x \right]_1^3 \\ &= \frac{2}{3} \left(4^{\frac{3}{2}} - 0 \right) + \left(-\frac{1}{2} \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 \right) - \left(-\frac{1}{2} \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 \right) = \frac{2}{3} \cdot 8 - \frac{9}{2} + 9 + \frac{1}{2} - 3 = \underline{\underline{\frac{22}{3}}} \end{aligned}$$

Når stripene legges horisontalt, må vi først finne x uttrykt ved y for de to funksjonene. Vi får:

$$y = \sqrt{x+3} \Rightarrow y^2 = x+3 \Leftrightarrow x = y^2 - 3$$

$$y = -x+3 \Leftrightarrow x = 3-y$$

Ei stripe i avstand y fra x -aksen har da lengde

$$l = (3 - y) - (y^2 - 3) = 6 - y - y^2$$

slik at arealet blir

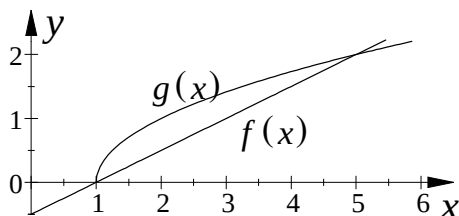
$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 (6 - y - y^2) dy = \left[6y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 \right]_0^2 \\ &= \left(6 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 - \frac{1}{3} \cdot 2^3 \right) - 0 = 12 - 2 - \frac{8}{3} = \frac{22}{3} \end{aligned}$$

Oppgave 2.2.1

a) Volumet blir

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\ln 2} \pi y^2 dx = \pi \int_0^{\ln 2} (e^{-2x})^2 dx = \pi \int_0^{\ln 2} e^{-4x} dx = \pi \left[\frac{1}{-4} e^{-4x} \right]_0^{\ln 2} \\ &= -\frac{\pi}{4} (e^{-4 \ln 2} - e^0) = \frac{\pi}{4} (1 - (e^{\ln 2})^{-4}) = \frac{\pi}{4} (1 - 2^{-4}) = \frac{\pi}{4} (1 - \frac{1}{16}) = \frac{15}{64} \pi \end{aligned}$$

b)



Vi må først finne skjæringspunktene mellom grafene:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x - 2 = \sqrt{x-1}$$

Kvadrerer:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} &= x - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{4} = 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 &= 0 \end{aligned}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases}$$

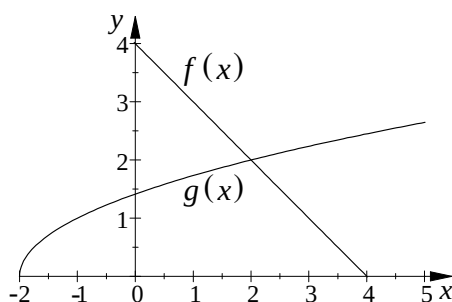
Vi kutter skiver vinkelrett på x -aksen. Hver skive får ytre radius $R_y = g(x) = \sqrt{x-1}$ og indre radius $R_i = f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$. Arealet av ei slik skive blir

$$\begin{aligned} A &= \pi R_y^2 - \pi R_i^2 = \pi \left(\sqrt{x-1}^2 - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \right)^2 \right) = \pi \left(x - 1 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \right) \\ &= \pi \left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{4} \right) \end{aligned}$$

Da blir volumet av omdreingslegemet

$$\begin{aligned} V &= \int_{x=1}^{x=5} A \cdot dx = \int_1^5 \pi \left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{4} \right) dx = \pi \left[-\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{4}x \right]_1^5 \\ &= \pi \left(\left(-\frac{1}{12} \cdot 5^3 + \frac{3}{4} \cdot 5^2 - \frac{5}{4} \cdot 5 \right) - \left(-\frac{1}{12} \cdot 1^3 + \frac{3}{4} \cdot 1^2 - \frac{5}{4} \cdot 1 \right) \right) = \frac{8}{3} \pi \end{aligned}$$

c)



Vi må først finne skjæringspunktet mellom grafene:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x + 4 = \sqrt{x+2}$$

Kvadrerer:

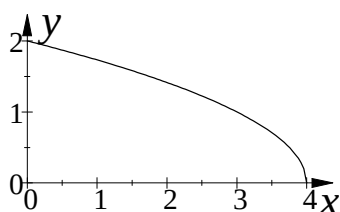
$$\begin{aligned} x^2 - 8x + 16 &= x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \\ x &= \frac{9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 14}}{2} = \frac{9 \pm 5}{2} = \begin{cases} 7 \\ 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Vi ser av grafen at vi skal bruke løsningen $x = 2$. Vi ser også at $g(x) = 0$ når $x = -2$, og at $f(x) = 0$ når $x = 4$. Ved hjelp av grafen ser vi at rotasjonslegemet må deles opp i to deler, ett i området $-2 < x < 2$ og ett i området $2 < x < 4$. Dermed får vi:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-2}^2 \pi (g(x))^2 dx + \int_2^4 \pi (f(x))^2 dx = \pi \int_{-2}^2 (x+2) dx + \pi \int_2^4 (x^2 - 8x + 16) dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{2} x^2 + 2x \right]_{-2}^2 + \pi \left[\frac{1}{3} x^3 - 4x^2 + 16x \right]_2^4 = \pi \left(\left(\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2) \right) \right) \\ &\quad + \pi \left(\left(\frac{1}{3} \cdot 4^3 - 4 \cdot 4^2 + 16 \cdot 4 \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 16 \cdot 2 \right) \right) \\ &= \underline{\underline{\frac{32}{3} \pi}} \end{aligned}$$

Oppgave 2.2.2

a)



Vi ”stabler” skiver med tykkelse dy oppå hverandre.

Siden $y = +\sqrt{4-x}$, blir

$$y^2 = 4 - x \Leftrightarrow x = 4 - y^2$$

som også blir radien i ei skive i avstanden y fra origo.

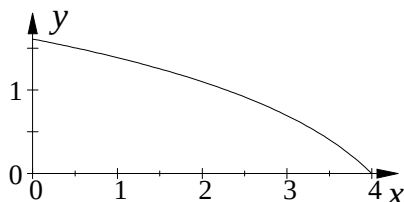
Vi ser at skjæringen med y -aksen inntreffer når

$$x = 0 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

der vi må bruke den positive verdien. Da blir volumet av omdreingslegemet

$$\begin{aligned} V &= \int_{y=0}^{y=2} \pi x^2 dy = \pi \int_0^2 (4 - y^2)^2 dy = \pi \int_0^2 (16 - 8y^2 + y^4) dy = \pi \left[16y - \frac{8}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 \right]_0^2 \\ &= \pi \left(\left(16 \cdot 2 - \frac{8}{3} \cdot 2^3 + \frac{1}{5} \cdot 2^5 \right) - 0 \right) = \underline{\underline{\frac{256}{15} \pi}} \end{aligned}$$

b)



Vi ”stabler” skiver med tykkelse dy oppå

hverandre. Siden $y = \ln(5-x)$, blir

$$5 - x = e^y \Leftrightarrow x = 5 - e^y$$

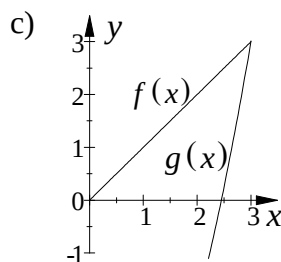
som også blir radien i ei skive i avstanden y fra origo.

Vi ser at vi får skjæring med y -aksen når

$$x = 0 \Leftrightarrow 5 - e^y = 0 \Leftrightarrow e^y = 5 \Leftrightarrow y = \ln 5.$$

Da blir volumet av omdreingslegemet

$$\begin{aligned} V &= \int_{y=0}^{y=\ln 5} \pi x^2 dy = \pi \int_0^{\ln 5} (5 - e^y)^2 dy = \pi \int_0^{\ln 5} (25 - 10e^y + e^{2y}) dy \\ &= \pi \left[25y - 10e^y + \frac{1}{2}e^{2y} \right]_0^{\ln 5} = \pi \left(\left(25 \cdot \ln 5 - 10e^{\ln 5} + \frac{1}{2}(e^{\ln 5})^2 \right) - \left(25 \cdot 0 - 10e^0 + \frac{1}{2}e^0 \right) \right) \\ &= \pi \left(25 \ln 5 - 10 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 5^2 - 0 + 10 - \frac{1}{2} \right) = \underline{\underline{\pi(25 \ln 5 - 28)}} \end{aligned}$$



Grafene skjærer hverandre når

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = x^2 - 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

Kvadrerer:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-6)}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$$

Vi må bruke løsningen $x = 3$. Da er også $y = 3$.

Vi ser av grafen at de "skivene" vi skal stable oppå hverandre, får et hull i midten. Ei skive i avstand y fra origo får ytre radius x_y gitt ved

$$y = 6 - x_y^2 \Leftrightarrow x_y^2 = 6 - y \Leftrightarrow x_y = \sqrt{6 - y},$$

mens den indre "hullets" radius er gitt ved $y = x_i$. Arealet av ei slik flate er da

$$A(y) = \pi x_y^2 - \pi x_i^2 = \pi(6 - y) - \pi y^2 = \pi(6 - y - y^2)$$

slik at volumet av omdreiningslegemet blir

$$\begin{aligned} V &= \int_{y=0}^{y=3} A(y) dy = \int_0^3 \pi(6 - y - y^2) dy = \pi \left[6y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 \right]_0^3 \\ &= \pi \left(\left(6 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 3^2 - \frac{1}{3} \cdot 3^3 \right) - 0 \right) = \underline{\underline{\frac{9}{2}\pi}} \end{aligned}$$

Oppgave 2.2.3

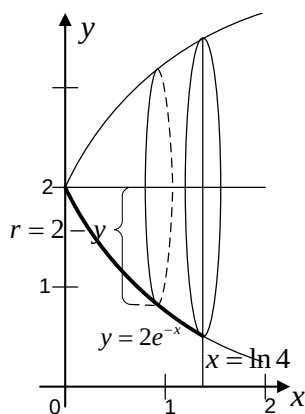
a) Ei skive vinkelrett på rotasjonsaksen i avstand x fra y -aksen har radius

$$r = 2 - y = 2 - 2e^{-x}.$$

Arealet av skiva blir

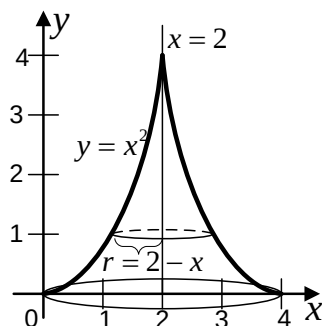
$$A = \pi r^2 = \pi(2 - 2e^{-x})^2 = \pi(4 - 8e^{-x} + 4e^{-2x})$$

slik at volumet av hele rotasjonslegemet blir



$$\begin{aligned} V &= \int_{x=0}^{x=\ln 4} A \cdot dx = \int_0^{\ln 4} \pi(4 - 8e^{-x} + 4e^{-2x}) dx \\ &= \pi \left[4x + 8e^{-x} + 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}e^{-2x} \right) \right]_0^{\ln 4} \\ &= \pi \left(\left(4 \ln 4 + 8e^{-\ln 4} - 2(e^{-\ln 4})^2 \right) - (4 \cdot 0 + 8 \cdot 1 - 2 \cdot 1) \right) \\ &= \pi \left(4 \cdot 2 \ln 2 + 8 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^2 - 0 - 8 + 2 \right) = \underline{\underline{\pi \left(8 \ln 2 - \frac{33}{8} \right)}} \end{aligned}$$

b)



Ei skive vinkelrett på rotasjonsaksen i avstand y fra x -aksen har radius

$$r = 2 - x = 2 - \sqrt{y}$$

der vi har benyttet at

$$y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}.$$

Arealet av skiva blir

$$A = \pi r^2 = \pi(2 - \sqrt{y})^2 = \pi(4 - 4\sqrt{y} + y).$$

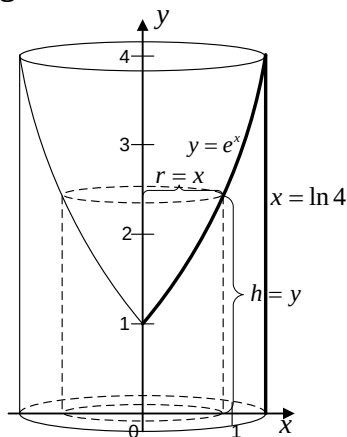
Videre har vi at når $x = 2$ er $y = 2^2 = 4$.

Volumet av hele rotasjonslegemet blir

$$\begin{aligned} V &= \int_{y=0}^{y=4} A \cdot dy = \int_0^4 \pi \left(4 - 4\sqrt{y} + y \right) dy = \pi \left[4y - 4 \cdot \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} y^2 \right]_0^4 \\ &= \pi \left(\left(4 \cdot 4 - \frac{8}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \cdot 4^2 \right) - 0 \right) = \pi \left(16 - \frac{64}{3} + 8 \right) = \underline{\underline{\frac{8}{3}\pi}} \end{aligned}$$

Oppgave 2.2.4

a)



En sylinderflate med radius $r = x$ får høyde $h = y = e^x$.

Flatas areal blir

$$A = 2\pi r \cdot h = 2\pi x e^x$$

slik at volumet av et sylinderskall med tykkelse dx blir

$$dV = A \cdot dx = 2\pi x e^x dx.$$

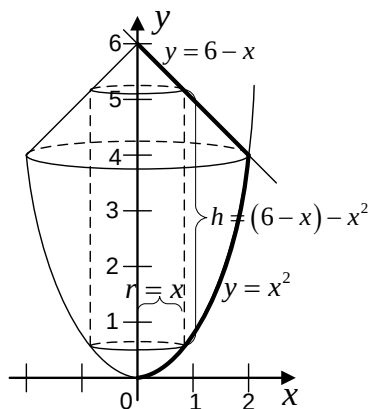
Volumet av omdreiningslegemet blir

$$\begin{aligned} V &= \int_{x=0}^{x=\ln 4} dV = \int_0^{\ln 4} 2\pi x e^x dx = 2\pi \left[x e^x - e^x \right]_0^{\ln 4} \\ &= 2\pi \left((\ln 4 \cdot e^{\ln 4} - e^{\ln 4}) - (0 \cdot 1 - 1) \right) \\ &= 2\pi (4 \ln 4 - 4 + 1) = \underline{\underline{2\pi (8 \ln 2 - 3)}} \end{aligned}$$

Det ubestemte integralet er løst med delvis integrasjon:

$$\int x e^x dx = x e^x - \int 1 \cdot e^x dx = \underline{x e^x - e^x + C}.$$

b)



Finner først skjæringspunktet mellom grafene:

$$x^2 = 6 - x \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

Her er det verdien $x = 2$ vi skal bruke.

En sylinderflate med radius $r = x$ får høyde

$$h = (6 - x) - x^2.$$

Flatas areal blir

$$A = 2\pi r \cdot h = 2\pi x (6 - x - x^2) = 2\pi (6x - x^2 - x^3)$$

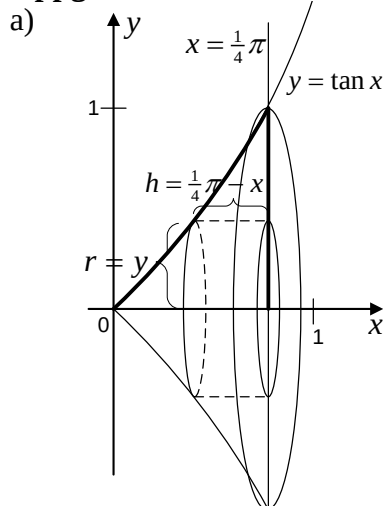
slik at volumet av et sylinderskall med tykkelse dx blir

$$dV = A \cdot dx = 2\pi (6x - x^2 - x^3) dx.$$

Volumet av omdreiningslegemet blir

$$\begin{aligned} V &= \int_{x=0}^{x=2} dV = \int_0^2 2\pi (6x - x^2 - x^3) dx = 2\pi \left[3x^2 - \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^2 \\ &= 2\pi \left(\left(3 \cdot 2^2 - \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{1}{4} \cdot 2^4 \right) - 0 \right) = \underline{\underline{\frac{32}{3}\pi}} \end{aligned}$$

Oppgave 2.2.5



Ei sylinderflate med radius $r = y$ får høyde

$$h = \frac{1}{4}\pi - x = \frac{1}{4}\pi - \arctan y$$

siden $y = \tan x \Leftrightarrow x = \arctan y$.

Grafene skjærer hverandre når $y = \tan\left(\frac{1}{4}\pi\right) = 1$.

Sylinderflatas areal blir

$$A = 2\pi y \cdot h = 2\pi y \left(\frac{1}{4}\pi - \arctan y\right)$$

slik at volumet av et sylinderskall med tykkelse dy blir

$$\begin{aligned} dV &= A \cdot dy = 2\pi y \left(\frac{1}{4}\pi - \arctan y\right) dy \\ &= \left(\frac{1}{2}\pi^2 y - 2\pi y \cdot \arctan y\right) dy \end{aligned}$$

Volumet av omdreiningslegemet blir

$$V = \int_{y=0}^{y=1} dV = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\pi^2 y - 2\pi y \cdot \arctan y\right) dy = \underline{\underline{\pi}}$$

der integrasjonen er foretatt med dataverktøy.

Dersom du insisterer på å løse integralet for hand, kan du starte med en delvis integrasjon:

$$\int y' \cdot \arctan y \, dy = \frac{1}{2} y^2 \cdot \arctan y - \int \frac{1}{2} y^2 \cdot \frac{1}{y^2 + 1} dy.$$

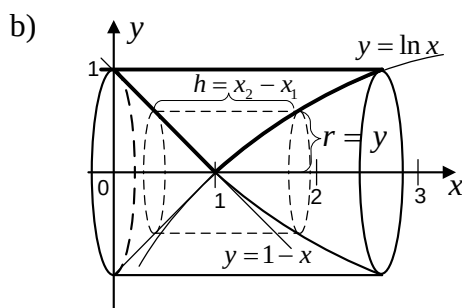
Deretter benytter du at

$$\frac{y^2}{y^2 + 1} = \frac{y^2 + 1 - 1}{y^2 + 1} = 1 - \frac{1}{y^2 + 1}.$$

Dermed blir

$$\int y^2 \cdot \frac{1}{y^2 + 1} dy = \int \left(1 - \frac{1}{y^2 + 1}\right) dy = y - \arctan y + C.$$

Nå gjenstår det "bare" å integrere første ledd, samle trådene og sette inn grensene.



Vi merker oss først at grafene til $y = \ln x$ og $y = 1 - x$

skjærer hverandre i punktet $(1, 0)$. Ei sylinderflate har

radius $r = y$ og høyde $h = x_2 - x_1$ der vi finner x_2 og x_1

slik: For en gitt y -verdi får vi at

$$y = \ln x_2 \Leftrightarrow x_2 = e^y$$

og at

$$y = 1 - x_1 \Leftrightarrow x_1 = 1 - y.$$

Da blir arealet av sylinderflata

$$A = 2\pi r \cdot h = 2\pi y (x_2 - x_1) = 2\pi y (e^y - (1 - y)) = 2\pi (ye^y - y + y^2)$$

slik at et sylinderskall med tykkelse dy får volum

$$dV = 2\pi (ye^y - y + y^2) dy.$$

Volumet av omdreiningslegemet blir

$$\begin{aligned} V &= \int_{y=0}^{y=\ln 2} dV = \int_0^{\ln 2} 2\pi (ye^y - y + y^2) dy = 2\pi \left[ye^y - e^y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 \right]_0^{\ln 2} \\ &= 2\pi \left((1 \cdot e^1 - e^1 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{3} \cdot 1^3) - (0 \cdot 1 - 1 - 0 + 0) \right) = \underline{\underline{\frac{5}{3}\pi}} \end{aligned}$$

Oppgave 2.3.1

a) Når $y = f(x) = x^{\frac{3}{2}}$, blir

$$y' = \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \sqrt{x},$$

slik at

$$\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{9}{4}x}.$$

Da blir graf-lengden

$$\begin{aligned} s &= \int_0^5 \sqrt{1+(y')^2} dx = \int_0^5 \sqrt{1+\frac{9}{4}x} dx = \int_1^{\frac{49}{4}} \sqrt{u} \cdot \frac{4}{9} du = \frac{4}{9} \int_1^{\frac{49}{4}} u^{\frac{1}{2}} du = \frac{4}{9} \cdot \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_1^{\frac{49}{4}} \\ &= \frac{8}{27} \left(\left(\frac{49}{4} \right)^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{8}{27} \left(\frac{343}{8} - 1 \right) = \frac{335}{27} \end{aligned}$$

der jeg har benyttet substitusjonen

$$u = 1 + \frac{9}{4}x \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow dx = \frac{4}{9} du,$$

samt at når $x = 0$ blir $u = 1 + \frac{9}{4} \cdot 0 = 1$ og når $x = 5$ blir $u = 1 + \frac{9}{4} \cdot 5 = \frac{49}{4}$.

b) Når $y = f(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$, blir

$$y' = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x},$$

slik at

$$\begin{aligned} \sqrt{1+(y')^2} &= \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2x}} = \sqrt{\frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2x}} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}e^x\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}e^x \cdot \frac{1}{2}e^{-x} + \left(\frac{1}{2}e^{-x}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}\right)^2} = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} \end{aligned}$$

Da blir graf-lengden

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\ln 2} \sqrt{1+(y')^2} dx = \int_0^{\ln 2} \left(\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} \right) dx = \left[\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} \right]_0^{\ln 2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(e^{\ln 2} - e^{-\ln 2} \right) - \left(e^0 - e^0 \right) \right) = \frac{1}{2} \left(2 - \frac{1}{2} - 1 + 1 \right) = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Oppgave 2.4.1

a) Når $y = f(x) = \frac{R}{H}x$, blir

$$y' = \frac{R}{H},$$

slik at

$$\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\left(\frac{R}{H}\right)^2} = \sqrt{\frac{H^2}{H^2} + \frac{R^2}{H^2}} = \frac{1}{H} \sqrt{H^2 + R^2} = \frac{1}{H} \cdot S.$$

Da blir overflatearealet

$$A = \int_{x=0}^{x=H} y \cdot \sqrt{1+(y')^2} dx = \int_0^H \frac{R}{H} x \cdot \frac{S}{H} dx = \frac{R \cdot S}{H^2} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^H = \frac{1}{2} \frac{R \cdot S}{H^2} (H^2 - 0) = \frac{1}{2} R \cdot S.$$

b) Når $y = f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$, blir

$$y' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^{-1},$$

slik at

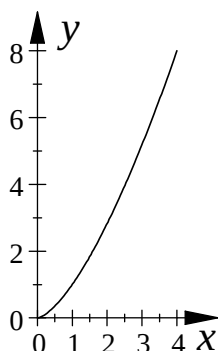
$$\begin{aligned}\sqrt{1+(y')^2} &= \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^{-1}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^{-2}} = \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^{-2}} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}x\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{2}x^{-1} + \left(\frac{1}{2}x^{-1}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^{-1}\right)^2} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^{-1}\end{aligned}$$

Da blir graf-lengden

$$\begin{aligned}A &= \int_{x=0}^{x=3} x \cdot \sqrt{1+(y')^2} dx = \int_0^3 x \cdot \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^{-1}\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^3 (x^2 + 1) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^3 \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{3} \cdot 3^3 + 3 \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 0^3 + 0 \right) \right) = \frac{1}{2} (9 + 3 - 0) = \underline{\underline{6}}\end{aligned}$$

Oppgave 2.5.1

a)



Grafen til $y = f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ er tegnet til venstre. Ved rotasjon om x -aksen blir åpenbart $Y_C = 0$, mens

$$\begin{aligned}X_C &= \frac{\int_{x=0}^{x=4} x \cdot \pi y^2 dx}{\int_{x=0}^{x=4} \pi y^2 dx} = \frac{\int_0^4 x \cdot (x^{\frac{3}{2}})^2 dx}{\int_0^4 (x^{\frac{3}{2}})^2 dx} = \frac{\int_0^4 x^4 dx}{\int_0^4 x^3 dx} \\ &= \frac{\left[\frac{1}{5} x^5 \right]_0^4}{\left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^4} = \frac{\frac{1}{5} (4^5 - 0)}{\frac{1}{4} (4^4 - 0)} = \frac{\frac{1}{5} \cdot 4^5}{4^3} = \underline{\underline{\frac{16}{5}}}\end{aligned}$$

Ved rotasjon om y -aksen må vi integrere i y -retningen. Litt forarbeid må til:

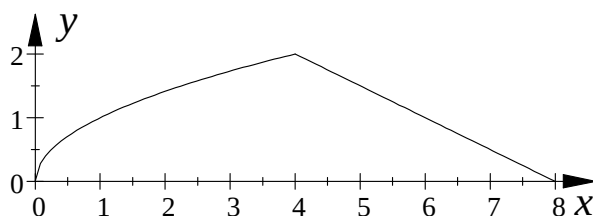
$$y = x^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = y^{\frac{2}{3}}.$$

Videre ser vi at $x = 0 \Leftrightarrow y = 0$, og at $x = 4 \Leftrightarrow y = 4^{\frac{3}{2}} = (4^{\frac{1}{2}})^3 = 2^3 = 8$.

Det er åpenbart at $X_C = 0$, mens

$$\begin{aligned}Y_C &= \frac{\int_{y=0}^{y=8} y \cdot \pi x^2 dy}{\int_{y=0}^{y=8} \pi x^2 dy} = \frac{\int_0^8 y \cdot (y^{\frac{2}{3}})^2 dy}{\int_0^8 (y^{\frac{2}{3}})^2 dy} = \frac{\int_0^8 y^{\frac{7}{3}} dy}{\int_0^8 y^{\frac{4}{3}} dy} = \frac{\left[\frac{3}{10} y^{\frac{10}{3}} \right]_0^8}{\left[\frac{3}{7} y^{\frac{7}{3}} \right]_0^8} \\ &= \frac{\frac{3}{10} (8^{\frac{10}{3}} - 0)}{\frac{3}{7} (8^{\frac{7}{3}} - 0)} = \frac{7 \cdot (8^{\frac{1}{3}})^{10}}{10 \cdot (8^{\frac{1}{3}})^7} = \frac{7 \cdot 2^{10}}{10 \cdot 2^7} = \frac{7 \cdot 8}{10} = \underline{\underline{\frac{28}{5}}}\end{aligned}$$

b)



Grafen til funksjonen

$$y = f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{når } 0 \leq x < 4 \\ 4 - \frac{1}{2}x & \text{når } 4 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

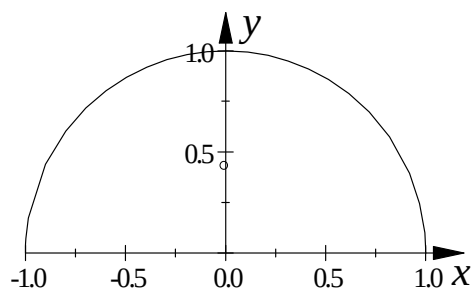
er illustrert til venstre.

Det er åpenbart at ved rotasjon om x -aksen blir $Y_C = 0$. Videre blir

$$\begin{aligned}
 X_C &= \frac{\int_{x=0}^{x=8} x \cdot \pi y^2 dx}{\int_{x=0}^{x=8} \pi y^2 dx} = \frac{\int_0^4 x \cdot (\sqrt{x})^2 dx + \int_4^8 x \cdot (4 - \frac{1}{2}x)^2 dx}{\int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx + \int_4^8 (4 - \frac{1}{2}x)^2 dx} \\
 &= \frac{\int_0^4 x^2 dx + \int_4^8 (16x - 4x^2 + \frac{1}{4}x^3) dx}{\int_0^4 x dx + \int_4^8 (16 - 4x + \frac{1}{4}x^2) dx} = \frac{\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^4 + \left[8x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{16}x^4\right]_4^8}{\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4 + \left[16x - 2x^2 + \frac{1}{12}x^3\right]_4^8} \\
 &= \frac{\frac{1}{3}(4^3 - 0) + (8 \cdot 8^2 - \frac{4}{3} \cdot 8^3 + \frac{1}{16} \cdot 8^4) - (8 \cdot 4^2 - \frac{4}{3} \cdot 4^3 + \frac{1}{16} \cdot 4^4)}{\frac{1}{2}(4^2 - 0) + (16 \cdot 8 - 2 \cdot 8^2 + \frac{1}{12} \cdot 8^3) - (16 \cdot 4 - 2 \cdot 4^2 + \frac{1}{12} \cdot 4^3)} \\
 &= \frac{48}{\frac{40}{3}} = \frac{18}{5}
 \end{aligned}$$

Oppgave 2.5.2

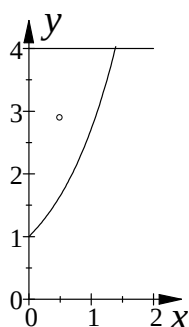
a)



Til venstre ser du halvsirkelen tegnet med $R = 1$. Massesenteret er også tegnet inn som en liten sirkel. Det er åpenbart at $X_C = 0$. For å finne Y_C , legger jeg stripene vertikalt på vanlig måte, og benytter at arealet av en halvsirkel er $A = \frac{1}{2} \cdot \pi R^2$. Da blir

$$\begin{aligned}
 Y_C &= \frac{1}{A} \int_{x=-R}^{x=R} \frac{1}{2} (y^2 - 0^2) dx = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \pi R^2} \cdot \frac{1}{2} \int_{-R}^R (\sqrt{R^2 - x^2}^2 - 0) dx \\
 &= \frac{1}{\pi R^2} \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \frac{1}{\pi R^2} \left[R^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-R}^R \\
 &= \frac{1}{\pi R^2} \left(\left(R^3 - \frac{1}{3} R^3 \right) - \left(R^2 \cdot (-R) - \frac{1}{3} (-R)^3 \right) \right) = \frac{1}{\pi R^2} \cdot \frac{4}{3} R^3 = \frac{4R}{3\pi}
 \end{aligned}$$

b)



Grafen til funksjonen $y = f(x) = e^x$ er illustrert til venstre sammen med linja $y = 4$. Grafene skjærer hverandre når

$$e^x = 4 \Leftrightarrow x = \ln 4.$$

Beregner først arealet:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^{\ln 4} (4 - e^x) dx = [4x - e^x]_0^{\ln 4} = 4 \ln 4 - e^{\ln 4} - 0 + e^0 \\
 &= 4 \ln 4 - 4 + 1 = 4 \ln 4 - 3
 \end{aligned}$$

Her er det enklest å beregne X_C ved å legge stripene vertikalt på vanlig måte. Da blir

$$\begin{aligned} X_C &= \frac{1}{A} \int_0^{\ln 4} x(4 - e^x) dx = \frac{1}{4 \ln 4 - 3} [2x^2 - (x-1)e^x]_0^{\ln 4} \\ &= \frac{1}{4 \ln 4 - 3} ((2(\ln 4)^2 - (\ln 4 - 1)e^{\ln 4}) - (0 - (0-1)e^0)) \\ &= \frac{1}{4 \ln 4 - 3} (2(\ln 4)^2 - 4 \ln 4 + 4 - 1) = \frac{2(\ln 4)^2 - 4 \ln 4 + 3}{4 \ln 4 - 3} \approx \underline{\underline{0.51}} \end{aligned}$$

Under veis har vi benyttet at

$$\int x e^x dx = x e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x e^x - e^x + C = (x-1)e^x + C.$$

For å finne Y_C , er det kanskje lettest å legge stripene horisontalt. Da får vi at

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y,$$

slik at

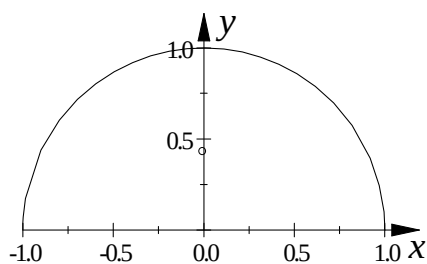
$$\begin{aligned} Y_C &= \frac{1}{A} \int_{y=1}^{y=4} y(x-0) dy = \frac{1}{4 \ln 4 - 3} \int_1^4 y \ln y dy = \frac{1}{4 \ln 4 - 3} \left[\frac{1}{2} y^2 \ln y - \frac{1}{4} y^2 \right]_1^4 \\ &= \frac{1}{4 \ln 4 - 3} \left(\left(\frac{1}{2} \cdot 4^2 \ln 4 - \frac{1}{4} \cdot 4^2 \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot 1^2 \ln 1 - \frac{1}{4} \cdot 1^2 \right) \right) \\ &= \frac{1}{4 \ln 4 - 3} \left(8 \ln 4 - 4 - 0 + \frac{1}{4} \right) = \frac{8 \ln 4 - \frac{15}{4}}{4 \ln 4 - 3} \approx \underline{\underline{2.88}} \end{aligned}$$

Under veis har vi benyttet at

$$\int y \cdot \ln y dy = \frac{1}{2} y^2 \cdot \ln y - \int \frac{1}{2} y^2 \cdot \frac{1}{y} dy = \frac{1}{2} y^2 \ln y - \frac{1}{2} \int y dy = \frac{1}{2} y^2 \ln y - \frac{1}{4} y^2 + C.$$

På figuren er massesenteret tegnet inn som en liten ring.

Oppgave 2.5.3



Til venstre ser du halvsirkelen tegnet med $R=1$. Massesenteret er også tegnet inn som en liten sirkel. Det er åpenbart at $X_C = 0$. For å finne Y_C , benytter jeg at når $y = \sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$ der $u = R^2 - x^2$, blir

$$y' = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{u}} = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}},$$

slik at

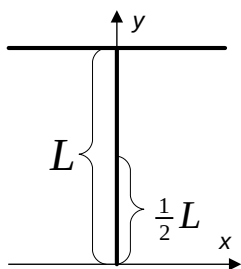
$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{1 + (y')^2} dx = \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right)^2} dx = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx \\ &= \sqrt{\frac{(R^2 - x^2) + x^2}{R^2 - x^2}} dx = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx \end{aligned}$$

Videre benytter jeg at lengden av halvsirkel-grafen blir $L = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R = \pi R$. Da blir

$$\begin{aligned} Y_C &= \frac{1}{L} \int_{x=-R}^{x=R} y ds = \frac{1}{\pi R} \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = \frac{1}{\pi R} \int_{-R}^R R dx = \frac{R}{\pi R} [x]_{-R}^R \\ &= \frac{1}{\pi} (R - (-R)) = \underline{\underline{\frac{2R}{\pi}}} \end{aligned}$$

Oppgave 2.5.4

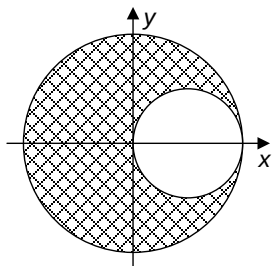
a)



Plasserer T-en i et koordinatsystem slik figuren viser. Det er åpenbart at massesenteret til T-en må ligge på y-aksen slik at $X_C = 0$. Den horisontale staven har sitt massesenter i $(0, L)$, mens den vertikale staven har sitt massesenter i $(0, \frac{1}{2}L)$. Da blir

$$Y_C = \frac{1}{2m} \left(m \cdot L + m \cdot \frac{1}{2}L \right) = \frac{\frac{3}{2}mL}{2m} = \underline{\underline{\frac{3}{4}L}}.$$

b)



Plasserer skiva i et koordinatsystem slik figuren viser. Det er åpenbart at massesenteret må ligge på x-aksen slik at $Y_C = 0$. Lar skiva ha tetthet ρ . Da har den store skiva masse

$$M = \rho \cdot \pi R^2$$

og massesenter i $(0, 0)$.

Den bortklipte skiva har masse

$$m = \rho \cdot \pi r^2 = \rho \cdot \pi \left(\frac{1}{2}R \right)^2 = \frac{1}{4} \rho \pi R^2$$

og massesenter i $(r, 0) = (\frac{1}{2}R, 0)$.

Da blir

$$X_C = \frac{1}{M - m} \left(M \cdot 0 - m \cdot \frac{1}{2}R \right) = \frac{0 - \frac{1}{4} \rho \pi R^2 \cdot \frac{1}{2}R}{\rho \pi R^2 - \frac{1}{4} \rho \pi R^2} = \frac{-\frac{1}{8} \rho \pi R^3}{\frac{3}{4} \rho \pi R^2} = \underline{\underline{-\frac{1}{6}R}}.$$

Oppgave 2.6.1

a)
$$m = \int_{x=0}^{x=L} dm = \int_0^L \rho_0 \cdot \frac{x}{L} dx = \frac{\rho_0}{L} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^L = \frac{\rho_0}{2L} (L^2 - 0^2) = \underline{\underline{\frac{1}{2} \rho_0 L}}.$$

b) Massesenteret må åpenbart ligge på x-aksen, så vi trenger bare å finne X_C .

$$\begin{aligned} X_C &= \frac{1}{m} \int_{x=0}^{x=L} x \cdot dm = \frac{1}{m} \int_0^L x \cdot \rho_0 \frac{x}{L} dx = \frac{1}{\frac{1}{2} \rho_0 L} \cdot \frac{\rho_0}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{2}{L^2} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^L \\ &= \frac{2}{3L^2} (L^3 - 0) = \underline{\underline{\frac{2}{3}L}} \end{aligned}$$

c1) Tregghetsmomentet om y-aksen blir

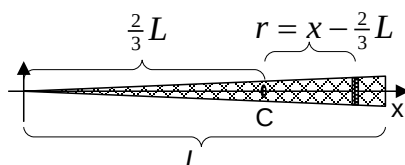
$$I_y = \int_{x=0}^{x=L} x^2 dm = \int_0^L x^2 \cdot \rho_0 \frac{x}{L} dx = \frac{\rho_0}{L} \int_0^L x^3 dx = \frac{\rho_0}{L} \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^L = \frac{\rho_0}{4L} (L^4 - 0) = \underline{\underline{\frac{1}{4} \rho_0 L^3}}.$$

Men vi vet at $m = \frac{1}{2} \rho_0 L \Leftrightarrow \rho_0 = \frac{2m}{L}$

slik at

$$I_y = \frac{1}{4} \rho_0 L^3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{2m}{L} \cdot L^3 = \underline{\underline{\frac{1}{2} m L^2}}.$$

c2) For å finne tregghetsmomentet om en akse gjennom massesenteret parallell med y-aksen, merker vi oss at et lite masse-element i posisjon x har avstand $r = x - \frac{2}{3}L$ fra den nye aksens slik figuren nedenfor viser.



Tregghetsmomentet om akse gjennom massesenteret blir

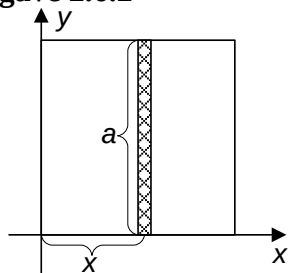
$$\begin{aligned} I_C &= \int_0^L r^2 dm = \int_0^L \left(x - \frac{2}{3}L\right)^2 \cdot \rho_0 \frac{x}{L} \cdot dx = \frac{\rho_0}{L} \int_0^L \left(x^3 - \frac{4}{3}Lx^2 + \frac{4}{9}L^2x\right) dx \\ &= \frac{\rho_0}{L} \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}L \cdot \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{9}L^2 \cdot \frac{1}{2}x^2 \right]_0^L = \frac{\rho_0}{L} \left(\left(\frac{1}{4}L^4 - \frac{4}{9}L^4 + \frac{2}{9}L^4 \right) - 0 \right) \\ &= \frac{\rho_0}{L} \cdot \frac{1}{36}L^4 = \frac{1}{36}\rho_0 L^3 = \frac{1}{36} \cdot \frac{2m}{L} \cdot L^3 = \underline{\underline{\frac{1}{18}mL^2}} \end{aligned}$$

Den siste deloppgaven kan kanskje motivere deg til å lære Steiners setning, som i dette tilfellet gir

$$I_y = I_C + m \cdot \left(\frac{2}{3}L\right)^2 \Leftrightarrow I_C = I_y - \frac{4}{9}mL^2 = \frac{1}{2}mL^2 - \frac{4}{9}mL^2 = \underline{\underline{\frac{1}{18}mL^2}}.$$

Oppgave 2.6.2

a)



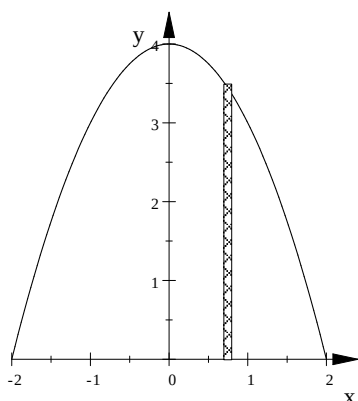
Plasserer kvadratet i koordinatsystemet som vist til venstre. Ei vertikal stripe i avstand x fra y -aksen har masse dm gitt ved

$$\frac{dm}{m} = \frac{dA}{A} \Leftrightarrow dm = m \cdot \frac{a \, dx}{a^2} = m \frac{dx}{a}$$

der m er massen til hele kvadratet. Da blir tregghetsmomentet om y -aksen

$$I_y = \int_0^a x^2 dm = \int_0^a x^2 \cdot \frac{m}{a} dx = \frac{m}{a} \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^a = \frac{1}{3} \frac{m}{a} (a^3 - 0) = \underline{\underline{\frac{1}{3}ma^2}}.$$

b1)



Grafen til $y = 4 - x^2$ skjærer x -aksen når

$$y = 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

Arealet av flata er

$$\begin{aligned} A &= \int_{x=-2}^{x=2} y dx = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \left[4x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-2}^2 \\ &= \left(4 \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 2^3 \right) - \left(4 \cdot (-2) - \frac{1}{3} \cdot (-2)^3 \right) = \underline{\underline{\frac{32}{3}}} \end{aligned}$$

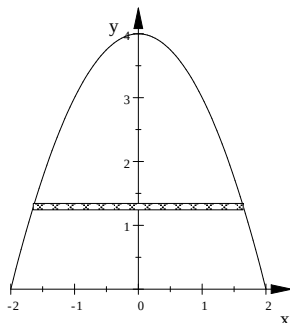
Ei stripe i avstand x fra y -aksen har masse dm gitt ved

$$\frac{dm}{m} = \frac{dA}{A} \Leftrightarrow dm = m \cdot \frac{y \cdot dx}{A} = \frac{3}{32} m (4 - x^2) dx.$$

Da blir tregghetsmomentet om y -aksen

$$\begin{aligned} I_y &= \int_{x=-2}^{x=2} x^2 dm = \int_{-2}^2 x^2 \cdot \frac{3}{32} m (4 - x^2) dx = \frac{3}{32} m \int_{-2}^2 (4x^2 - x^4) dx \\ &= \frac{3}{32} m \left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 \right]_{-2}^2 = \frac{3}{32} m \left(\left(\frac{4}{3} \cdot 2^3 - \frac{1}{5} \cdot 2^5 \right) - \left(\frac{4}{3} \cdot (-2)^3 - \frac{1}{5} \cdot (-2)^5 \right) \right) \\ &= \frac{3}{32} m \left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5} + \frac{32}{3} - \frac{32}{5} \right) = \underline{\underline{\frac{4}{5}m}} \end{aligned}$$

b1)



Når $y = 4 - x^2$ blir $x = \pm\sqrt{4 - y}$,

slik at ei stripe i avstand y fra x -aksen har areal

$$dA = 2\sqrt{4 - y} \cdot dy.$$

Denne stripa har masse dm gitt ved

$$\frac{dm}{m} = \frac{dA}{A} \Leftrightarrow dm = m \cdot \frac{2\sqrt{4 - y} dy}{\frac{32}{3}} = \frac{3}{16} m \sqrt{4 - y} dy$$

Da blir treghetsmomentet om x -aksen

$$I_x = \int_{y=0}^{y=4} y^2 dm = \int_0^4 y^2 \cdot \frac{3}{16} m \sqrt{4 - y} dy = \frac{3}{16} m \int_0^4 y^2 \sqrt{4 - y} dy.$$

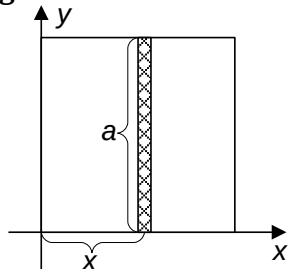
Vi substituerer $u = 4 - y \Leftrightarrow y = 4 - u \Rightarrow dy = -du$.

Videre ser vi at når $y = 0$ er $u = 4$, og når $y = 4$ er $u = 0$. Da blir

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{3}{16} m \int_0^4 y^2 \sqrt{4 - y} dy = \frac{3}{16} m \int_4^0 (4 - u)^2 \sqrt{u} (-du) = \frac{3}{16} m \int_0^4 (16u^{\frac{1}{2}} - 8u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{5}{2}}) du \\ &= \frac{3}{16} m \left[16 \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} - 8 \cdot \frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{7} u^{\frac{7}{2}} \right]_0^4 = \frac{3}{16} m \left(\left(\frac{32}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}} - \frac{16}{5} \cdot 4^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{7} \cdot 4^{\frac{7}{2}} \right) - 0 \right) \\ &= \frac{3}{16} m \left(\frac{32}{3} \cdot 2^3 - \frac{16}{5} \cdot 2^5 + \frac{2}{7} \cdot 2^7 \right) = \frac{3}{16} m \cdot \frac{2048}{105} = \underline{\underline{\frac{128}{35} m}} \end{aligned}$$

Oppgave 2.6.3

a)



Vi har allerede vist at treghetsmomentet om y -aksen er

$$I_y = \frac{1}{3} ma^2.$$

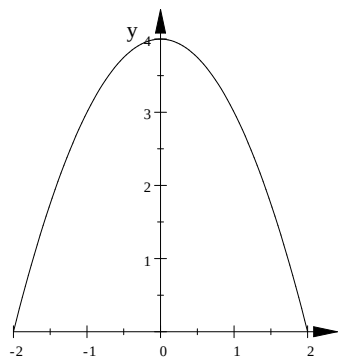
På grunn av symmetrien er også treghetsmomentet om x -aksen

$$I_x = \frac{1}{3} ma^2.$$

Da blir treghetsmomentet om en akse vinkelrett på kvadratet gjennom origo

$$I_z = I_x + I_y = \frac{1}{3} ma^2 + \frac{1}{3} ma^2 = \underline{\underline{\frac{2}{3} ma^2}}.$$

b)



Vi har allerede vist at treghetsmomentet om y -aksen er

$$I_y = \frac{4}{5} m,$$

og at treghetsmomentet om x -aksen er

$$I_x = \frac{128}{35} m.$$

Da er treghetsmomentet om en akse gjennom origo vinkelrett på flata

$$I_z = I_x + I_y = \frac{128}{35} m + \frac{4}{5} m = \underline{\underline{\frac{156}{35} m}}.$$

Oppgave 2.6.4

For alle oppgavene benytter vi at når legemet har masse m og volum V , blir

$$\frac{dm}{dV} = \frac{m}{V} \Leftrightarrow dm = \frac{m}{V} dV$$

slik at treghetsmomentet om y -aksen blir

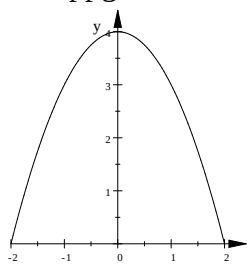
$$I_y = \int x^2 dm = \int x^2 \frac{m}{V} dV = \frac{m}{V} \int x^2 \cdot 2\pi x \cdot h(x) \cdot dx = m \frac{\int x^3 h(x) \cdot dx}{\int 2\pi x \cdot h(x) \cdot dx}$$

$$= m \frac{\int x^3 \cdot h(x) \cdot dx}{\int x \cdot h(x) \cdot dx}$$

der $h(x)$ er høyden av et sylinderskall i avstand x fra y -aksen.

I de to første oppgavene er $h(x) = f(x)$.

a)



Grafen til $y = f(x) = 4 - x^2$ skjærer x -aksen når

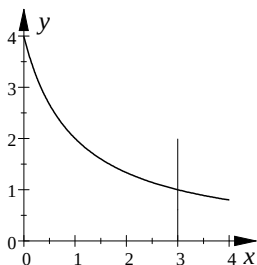
$$4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

Det innerste sylinderskallet får da radius $x = 0$, mens det ytterste får radius $x = 2$. Da blir treghetsmomentet om y -aksen

$$I_y = m \frac{\int_0^2 x^3 \cdot f(x) \cdot dx}{\int_0^2 x \cdot f(x) \cdot dx} = m \frac{\int_0^2 x^3 (4 - x^2) dx}{\int_0^2 x (4 - x^2) dx} = m \frac{\int_0^2 (4x^3 - x^5) dx}{\int_0^2 (4x - x^3) dx}$$

$$= m \frac{\left[x^4 - \frac{1}{6} x^6 \right]_0^2}{\left[2x^2 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^2} = m \frac{2^4 - \frac{1}{6} \cdot 2^6}{2 \cdot 2^2 - \frac{1}{4} \cdot 2^4} = m \cdot \frac{16 - \frac{32}{3}}{8 - 4} = m \cdot \frac{\frac{16}{3}}{4} = \underline{\underline{\frac{4}{3} m}}$$

b)



Når grafen til $y = f(x) = \frac{4}{x+1}$ roterer om y -aksen, får vi et rotasjonslegeme med treghetsmoment

$$I_y = m \frac{\int_0^3 x^3 \cdot \frac{4}{x+1} \cdot dx}{\int_0^3 x \cdot \frac{4}{x+1} \cdot dx} = m \frac{\int_0^3 \frac{x^3}{x+1} dx}{\int_0^3 \frac{x}{x+1} dx}$$

Integralene kan løses på flere måter. En måte er å benytte delbrøkkopp spalting til å skaffe seg et polynom pluss en brøk av formen $\frac{1}{x+1}$ som lett kan integreres. Jeg skal imidlertid benytte en annen strategi. Jeg innfører

$$u = x + 1 \Leftrightarrow x = u - 1 \Rightarrow dx = du.$$

Når jeg samtidig tilpasser grensene, blir

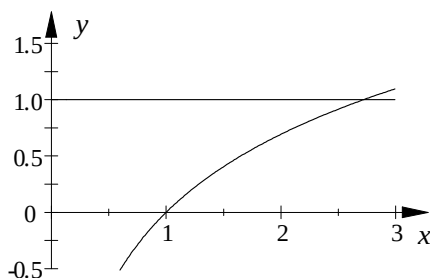
$$I_y = m \frac{\int_0^3 \frac{x^3}{x+1} dx}{\int_0^3 \frac{x}{x+1} dx} = m \frac{\int_1^4 \frac{(u-1)^3}{u} du}{\int_1^4 \frac{u-1}{u} du} = m \frac{\int_1^4 \left(u^2 - 3u + 3 - \frac{1}{u} \right) du}{\int_1^4 \left(1 - \frac{1}{u} \right) du}$$

$$= m \frac{\left[\frac{1}{3} u^3 - \frac{3}{2} u^2 + 3u - \ln u \right]_1^4}{[u - \ln u]_1^4} = m \frac{\left(\frac{64}{3} - 24 + 12 - \ln 4 \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 3 - 0 \right)}{(4 - \ln 4) - (1 - 0)}$$

$$= m \frac{\frac{15}{2} - \ln 4}{3 - \ln 4} = \underline{\underline{\frac{15 - 4 \ln 2}{6 - 4 \ln 2} m}}$$

I den siste omformingen har jeg benyttet at $\ln 4 = \ln(2^2) = 2 \ln 2$.

c)



Grafen til $y = \ln x$ skjærer grafen til $y = 1$ når

$$\ln x = 1 \Leftrightarrow x = e.$$

Her merker vi oss at:

Når $0 \leq x < 1$ er $h(x) = 1$.

Når $1 \leq x \leq e$ er $h(x) = 1 - \ln x$.

Da blir:

$$I_y = m \frac{\int_0^e x^3 \cdot h(x) \cdot dx}{\int_0^e x \cdot h(x) \cdot dx} = m \frac{\int_0^1 x^3 \cdot 1 dx + \int_1^e x^3 \cdot (1 - \ln x) dx}{\int_0^1 x \cdot 1 dx + \int_1^e x \cdot (1 - \ln x) dx} = m \frac{\int_0^e x^3 dx - \int_1^e x^3 \ln x dx}{\int_0^e x dx - \int_1^e x \ln x dx}$$

Delvis integrasjon gir nå

$$\int x' \cdot \overset{u}{\underset{v}{\ln x}} dx = \frac{1}{2} x^2 \cdot \overset{u}{\underset{v}{\ln x}} - \int \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C.$$

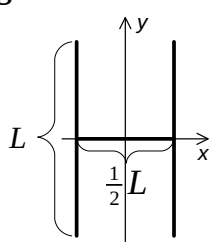
$$\int x^3 \cdot \overset{u}{\underset{v}{\ln x}} dx = \frac{1}{4} x^4 \cdot \overset{u}{\underset{v}{\ln x}} - \int \frac{1}{4} x^4 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{16} x^4 + C.$$

Da blir

$$\begin{aligned} I_y &= m \frac{\int_0^e x^3 dx - \int_1^e x^3 \ln x dx}{\int_0^e x dx - \int_1^e x \ln x dx} = m \frac{\left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^e - \left[\frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{16} x^4 \right]_1^e}{\left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^e - \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 \right]_1^e} \\ &= m \frac{\left(\frac{1}{4} \cdot e^4 - 0 \right) - \left(\frac{1}{4} \cdot e^4 \ln e - \frac{1}{16} \cdot e^4 \right) + \left(\frac{1}{4} \cdot 1^4 \ln 1 - \frac{1}{16} \cdot 1^4 \right)}{\left(\frac{1}{2} \cdot e^2 - 0 \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot e^2 \ln e - \frac{1}{4} \cdot e^2 \right) + \left(\frac{1}{2} \cdot 1^2 \ln 1 - \frac{1}{4} \cdot 1^2 \right)} \\ &= m \frac{\frac{1}{16} e^4 - \frac{1}{16}}{\frac{1}{4} e^2 - \frac{1}{4}} = m \frac{e^4 - 1}{4(e^2 - 1)} = m \frac{(e^2 + 1)(e^2 - 1)}{4(e^2 - 1)} = \underline{\underline{\frac{1}{4} m(e^2 + 1)}} \end{aligned}$$

Oppgave 2.6.5

a)



Når hele legemet har masse m , må hver av de to lange stavene ha masse $\frac{2}{5}m$ mens den korte tverrstaven får masse $\frac{1}{5}m$.

1) Når vi bruker x -aksen som momentakse, vil ikke tverrstaven få noe treghetsmoment, mens hver av de lange stavene får treghetsmoment $\frac{1}{12} \left(\frac{2}{5}m \right) L^2 = \frac{1}{30} mL^2$. Da blir samlet treghetsmoment

$$I_x = 2 \cdot \frac{1}{30} mL^2 = \underline{\underline{\frac{1}{15} mL^2}}$$

2) Når y -aksen er momentakse, vil hver av de lange stavene ha en avstand $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} L = \frac{1}{4} L$ fra denne aksen slik at deres bidrag blir

$$2 \cdot \frac{2}{5} m \cdot \left(\frac{1}{4} L^2 \right) = \frac{1}{20} mL^2.$$

Tverrstaven har masse $\frac{1}{5}m$ og lengde $\frac{1}{2}L$, og får treghetsmoment

$$\frac{1}{12} \left(\frac{1}{5} m \right) \left(\frac{1}{2} L \right)^2 = \frac{1}{240} mL^2.$$

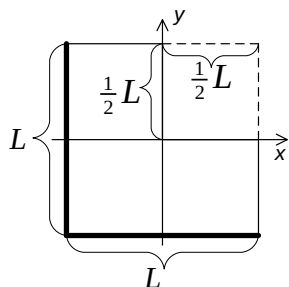
Samlet treghetsmoment om y -aksen for de tre stavene blir da

$$I_y = \frac{1}{20} mL^2 + \frac{1}{240} mL^2 = \underline{\underline{\frac{13}{240} mL^2}}.$$

3) Treghetsmomentet om z -aksen blir

$$I_z = I_x + I_y = \frac{1}{15}mL^2 + \frac{13}{240}mL^2 = \underline{\underline{\frac{29}{240}mL^2}}.$$

b)



Vi kan tenke oss at plata består av 3 kvadrater som hver har sidelengde $\frac{1}{2}L$ og masse $\frac{1}{3}m$, og som har momentaksen langs en sidekant. Hvert av disse kvadratene bidrar da med et treghetsmoment

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}m \cdot \left(\frac{1}{2}L\right)^2 = \frac{1}{36}mL^2.$$

Staven parallelt med akse i avstand $\frac{1}{2}L$ bidrar med

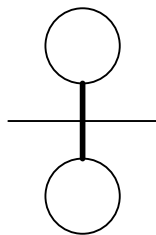
$$m \cdot \left(\frac{1}{2}L\right)^2 = \frac{1}{4}mL^2,$$

mens staven som står vinkelrett på akse bidrar med $\frac{1}{12}mL^2$. Samlet treghetsmoment blir da

$$I_x = 3 \cdot \frac{1}{36}mL^2 + \frac{1}{4}mL^2 + \frac{1}{12}mL^2 = \underline{\underline{\frac{5}{12}mL^2}}.$$

Oppgave 2.6.6

a)



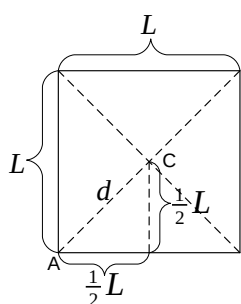
Hver kule har et treghetsmoment om akse gitt ved Steiners setning:

$$I_1 = \frac{2}{5}mR^2 + m \cdot (2R)^2 = \frac{22}{5}mR^2$$

fordi avstanden mellom vår akse og en akse gjennom massesenteret til ei kule er $d = 2R$. Den tynne staven bidrar ikke, slik at legemets treghetsmoment om den gitte akse blir

$$I = 2I_1 = \underline{\underline{\frac{44}{5}mR^2}}.$$

b)



Av figuren ser vi at avstanden d mellom hjørnet A og massesenteret C er gitt ved

$$d^2 = \left(\frac{1}{2}L\right)^2 + \left(\frac{1}{2}L\right)^2 = 2 \cdot \frac{1}{4}L^2 = \frac{1}{2}L^2.$$

Da gir Steiners setning at

$$I_A = I_C + m \cdot d^2$$

$$\Leftrightarrow I_C = I_A - m \cdot d^2 = \frac{2}{3}mL^2 - m \cdot \frac{1}{2}L^2 = \underline{\underline{\frac{1}{6}mL^2}}$$