Bjørn Davidsen

# MATEMATIKK FOR INGENIØRER

## Rekker

# Innhold

# Forord

Kjære student!

I dette heftet skal vi ta opp temaer som ved første øyekast kan virke nokså merkelige. Vi skal skrive vanlige funksjoner som en uendelig sum av enten potensuttrykk eller sinus- og cosinus-ledd. De potensrekkene som framkommer på denne måten kaller vi ***Taylor-rekker***, og de trigonometriske rekkene som framkommer kaller vi ***Fourier-rekker.*** Begge disse rekketypene viser seg å ha overraskende mange nyttige anvendelser. Vi skal også se på noen av disse.

Det er en fordel om du allerede har vært gjennom det første kapitlet i heftet om Tallfølger, siden vi skal bruke noen resultater derfra. Du bør også beherske integrasjon, ettersom vi skal utføre mange integrasjoner når vi kommer til Fourier-rekker.

Her som ellers i matematikken må du legge vekt på å arbeide nøyaktig og oversiktlig. Flere steder vil du råke bort i lange utregninger der uttrykk må forenkles og trekkes sammen. Da er det fort gjort å gjøre små regnefeil som ødelegger alt.

Den viktigste lærdommen du bør sitte igjen med etter å ha gått gjennom kapitlene om Taylor-rekker og Fourer-rekker, er at du vet at det eksisterer slike rekker. Du bør kunne kjenne igjen situasjoner der det er gunstig å hente dem fram, og du bør kunne sette dem opp når du får bruk for dem. Men du trenger ikke å pugge stygge formler, for disse formlene kan du hente fram etter behov.

Med hilsen

Bjørn Davidsen

# 1. Rekker.

## 1.1. Noen innledende definisjoner.

I et eget hefte har vi sett på egenskaper ved *tallfølger*. Nå skal vi *summere* leddene i en tallfølge. Da får vi ei *rekke*. Slike rekker skriver vi gjerne ved hjelp av *summetegn*. Dersom vi summerer et *endelig* antall ledd, skriver vi

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n .$$

Merk at siden første ledd er $a_0$, vil denne rekka få $n+1$ ledd.

Dersom vi summerer *uendelig* mange ledd, skriver vi

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots .$$

I summene ovenfor brukte vi *k* som summasjonsindeks. Vi bruker ofte andre bokstaver, som *i*, *j*, *m*, *n*, *p* osv.

***Eksempel 1.1.1:*** Skriv disse rekkene ledd for ledd:

a) $\sum_{n=1}^{4} \frac{1}{n}$

b) $\sum_{p=0}^{4} \frac{(-1)^{p+1}}{p^2+1}$

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

*Løsning:*

a) $\sum_{n=1}^{4} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}.$

b) $\sum_{p=0}^{4} \frac{(-1)^{p+1}}{p^2+1} = \frac{(-1)^1}{0^2+1} + \frac{(-1)^2}{1^2+1} + \frac{(-1)^3}{2^2+1} + \frac{(-1)^4}{3^2+1} + \frac{(-1)^5}{4^2+1} = -\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{10} - \frac{1}{17}.$

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{(-1)^0}{2\cdot 0+1} + \frac{(-1)^1}{2\cdot 1+1} + \frac{(-1)^2}{2\cdot 2+1} + \frac{(-1)^3}{2\cdot 3+1} + \cdots = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$

Legg merke til den siste rekka i eksemplet ovenfor. Når vi har skrevet ut såpass mange ledd i ei uendelig rekke at det er ”opplagt” hvordan systemet er, skriver vi ofte bare prikker for å markere at rekka inneholder uendelig mange ledd. Noen ganger skriver vi også formelen for ledd nr *n*, slik at rekka i eksempel c) ovenfor blir

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{(-1)^0}{2\cdot 0+1} + \frac{(-1)^1}{2\cdot 1+1} + \frac{(-1)^2}{2\cdot 2+1} + \frac{(-1)^3}{2\cdot 3+1} + \cdots = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots .$$

Oppgave 1.1.1.

Legg spesielt merke til definisjonen av ***n-fakultet*** nedenfor:

Produktet ***n-fakultet*** skrives $n!$, og defineres slik:

$$n! \overset{\text{def.}}{=} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n \text{ når } n \in \mathbb{N}, \qquad 0! = 1$$

Vi kan også benytte en rekursiv definisjon:

$$0! = 1, \qquad n! = (n-1)! \cdot n \text{ der } n \in \mathbb{N}.$$

Det er lett å gjøre feil når vi benytter skrivemåten $n!$, noe eksemplene nedenfor viser:

***Eksempel 1.1.2:*** Forkort brøkene nedenfor:

a) $\dfrac{(n+2)!}{n!}$

b) $\dfrac{(2n)!}{2n!}$

*Løsning:*

a) Av definisjonen får vi at

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n,$$

mens

$$(n+2)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = n! \cdot (n+1) \cdot (n+2).$$

Dermed blir

$$\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{n! \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{n!} = \underline{\underline{(n+1) \cdot (n+2)}}.$$

b) Skrivemåten $(2n)!$ betyr at vi skal multiplisere sammen alle heltallene fra og med 1 til og med $2n$, slik at

$$(2n)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot (n+1) \cdots (2n).$$

Da blir

$$\frac{(2n)!}{2n!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot (n+1) \cdots (2n)}{2 \cdot n!} = \frac{n! \cdot (n+1) \cdots (2n-1) \cdot (2n)}{2 \cdot n!}$$

$$= \frac{(n+1) \cdots (2n-1) \cdot (2n)}{2} = \underline{\underline{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdots (2n-1)}}$$

Nå er vi klar til å se på et par eksempler på rekker:

***Eksempel 1.1.3:*** Skriv de 4 første leddene i disse rekkene:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$

*Løsning:*

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}=\frac{2^0}{0!}+\frac{2^1}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\cdots=\frac{1}{1}+\frac{2}{1}+\frac{4}{1\cdot 2}+\frac{8}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots=\underline{\underline{1+2+2+\tfrac{4}{3}+\cdots}}.$

b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!}=\frac{0!}{0!}+\frac{1!}{(2\cdot 1)!}+\frac{2!}{(2\cdot 2)!}+\frac{3!}{(2\cdot 3)!}+\cdots=\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\cdots$

$=\underline{\underline{1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{120}+\cdots}}$

**Oppgave 1.1.2**.

I eksemplene ovenfor tok vi utgangspunkt i ei rekke skrevet med summetegn, og skrev ut de første leddene i rekka. La oss se på det motsatte problemet: Vi har skrevet ut så mange ledd i ei uendelig rekke at vi ser systemet, og skal skrive rekka ved hjelp av summetegn. Dette problemet har faktisk ikke noen entydig løsning, noe eksemplene nedenfor illustrerer:

***Eksempel 1.1.4:*** Skriv de uendelige rekkene nedenfor med summetegn, gjerne på forskjellige måter:

a) $\frac{1}{4}+\frac{2}{9}+\frac{3}{16}+\frac{4}{25}+\cdots$

b) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots$

*Løsning:*

a) Vi ser at tellerne er de naturlige tallene fra 1 og oppover, mens nevnerne er kvadratene av naturlige tall fra 2 og oppover. Dette kan vi uttrykke for eksempel på de tre måtene som er vist nedenfor:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^2},\qquad \sum_{k=2}^{\infty}\frac{k-1}{k^2},\qquad \sum_{p=0}^{\infty}\frac{p+1}{(p+2)^2}.$$

b) Her skifter teller mellom $+1$ og $-1$, noe vi kan få til med faktoren $(-1)^n$ der $n\in\mathbb{N}$. Vi kan forresten også få det til med faktoren $\cos(n\pi)$ der $n\in\mathbb{N}$. Dersom vi er påpasselige med at første ledd får rett fortegn, kan vi uttrykke rekka for eksempel på de fire måtene som er vist nedenfor:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1},\qquad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+2},\qquad \sum_{p=2}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p},\qquad \sum_{p=2}^{\infty}\frac{\cos(p\cdot\pi)}{p}.$$

**Oppgave 1.1.3**.

## *1.2. Konvergens av rekker.*

La oss starte med et lite eksempel: En dag stiller du deg 2.00 meter fra en vegg, og går mot veggen. Først går du halve avstanden til veggen, d.v.s. 1.00 meter. Så går du halvparten av gjenværende avstand, d.v.s. 0.50 meter. Slik fortsetter du med å gå halvparten av gjenværende avstand inn mot veggen. Det er da innlysende at:

- Den samlede strekningen du går er
  $$1.00\,\mathrm{m} + 0.50\,\mathrm{m} + 0.25\,\mathrm{m} + 0.125\,\mathrm{m} + \cdots .$$
  Dersom vi ser bort fra benevningen *meter*, kan denne rekka skrives slik:
  $$1.00 + 1.00\cdot\tfrac{1}{2} + 1.00\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 1.00\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} 1.00\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-1}.$$
- Du vil aldri komme helt fram til veggen, siden det alltid er et lite stykke igjen. Det vil si at du tilbakelegger en strekning som er mindre enn 2.00 meter. Men du kan komme så nær veggen du vil ved å gå tilstrekkelig mange skritt.

Eksemplet over illustrerer at selv om vi legger sammen uendelig mange positive ledd, kan summen gå mot et fast tall (i vårt tilfelle mot 2). Vi sier at rekka ovenfor ***konvergerer mot 2***.

Dermed har vi bakgrunnen for en naturlig definisjon:

Rekka $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ***konvergerer mot S***

$$\Updownarrow \text{def.}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S .$$

Dersom rekka ikke konvergerer, sier vi at den ***divergerer***.

Merk forskjellen mellom konvergens av *tallfølger* og konvergens av *rekker*. En *tallfølge* konvergerer dersom *ledd* nr. *n* går mot en fast verdi, mens ei *rekke* konvergerer dersom *summen av leddene* går mot en fast verdi.

Den velkjente historien om **Akilles og skilpadda** (Zenons paradoks) er egentlig en mer komplisert variant av vårt innledende eksempel.

Dersom du vil gjennomføre eksperimentet i praksis, må du jo avslutte før eller siden. Dersom du avslutter etter *n* skritt, har du gått en strekning

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 1.00\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-1}.$$

Denne summen kalles for ***den n'te partialsummen*** av rekka $\sum_{k=1}^{\infty} 1.00\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-1}$.

Generelt definerer vi:

Gitt ei uendelig rekke $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

Den $n$'te partialsummen av denne rekka er $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ .

Vi er som regel mest interessert i uendelige rekker. Dersom vi bare sier *rekke*, er det nesten alltid uendelig rekke vi mener dersom det ikke framgår av sammenhengen at rekka har et endelig antall ledd. Når vi jobber med slike uendelige rekker, vil vi alltid være interessert i å fastlegge konvergensegenskapene. Da har vi ofte bruk for setningen nedenfor:

La $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ være den $n$'te partialsummen til rekka $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

Rekka $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerer mot $S$

$\Updownarrow$ def.

$S_n$ konvergerer mot $S$.

***Eksempel 1.2.1*:** Undersøk konvergensen til rekka

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} \cdots + \frac{1}{k(k+1)} + \cdots.$$

*Løsning*: Ved hjelp av delbrøkoppspalting får vi at

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Da kan rekka skrives som

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \cdots$$

Den $n$'te partialsummen blir

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \underline{1 - \frac{1}{n+1}}.$$

Vi ser at

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right) = 1 - 0 = \underline{1}$$

slik at rekka konvergerer mot 1.

**Oppgave 1.2.1**.

I det innledende eksemplet og i Eksempel 1.2.1 ovenfor ble leddene i den uendelige rekka stadig mindre, og konvergerte mot null. Denne egenskapen er et absolutt krav for at rekka skal kunne konvergere. Vi har altså at:

Rekka $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerer

$\Downarrow$

Tallfølgen $\{a_k\}$ konvergerer mot 0.

Merk at implikasjonspila bare går en vei. Vi skal etter hvert se eksempler der tallfølgen $\{a_k\}$ konvergerer mot null, mens den tilhørende rekka $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergerer.

Selv om implikasjonen ovenfor egentlig er innlysende, kan vi spandere på oss et formelt bevis. Fra definisjonen av partialsum får vi at

$$S_n = S_{n-1} + a_n .$$

Så lar vi $n \to \infty$ . Siden rekka konvergerer, er

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S .$$

Da blir

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(S_{n-1} + a_n\right) = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} + \lim_{n\to\infty} a_n \quad \Rightarrow \quad S = S + \lim_{n\to\infty} a_n \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0 .$$

Og det er jo nettopp definisjonen på at tallfølgen konvergerer mot 0.

Det kan være nyttig å sette opp setningen over på denne formen:

Tallfølgen $\{a_k\}$ konvergerer *ikke* mot 0

$\Downarrow$

Rekka $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergerer.

I eksemplene ovenfor har vi klart å finne ut *hva* rekkene konvergerte mot. Men i de fleste tilfellene må vi begrense oss til å avgjøre *om* ei gitt rekke konvergerer eller divergerer, uten å finne *hva* rekka eventuelt konvergerer mot. Vi har da en rekke *konvergenstester* til disposisjon. Vi skal etter hvert se på noen av disse. Men før du går løs på disse testene, skal vi ta en titt på et par viktige rekker som vi ofte støter på: *aritmetiske* rekker og *geometriske* rekker. Spesielt de geometriske rekkene er viktige, både i praktiske anvendelser og i teoretiske analyser.

## *1.3. Aritmetiske og geometriske rekker.*

### 1.3.1. Aritmetiske tallfølger og rekker.

***Aritmetiske tallfølger*** karakteriseres ved at differensen mellom to etterfølgende ledd i tallfølgen er konstant. Dette formuleres rekursivt slik:

En tallfølge $\{a_n\}$ er en ***aritmetisk tallfølge***
$\Updownarrow$ def.
$a_{n+1} = a_n + d$ .

Størrelsen *d* kalles *tallfølgens differens*.

Hvis vi kaller første ledd i tallfølgen for $a_0$, kan vi sette opp:

$$a_1 = a_0 + d$$
$$a_2 = a_1 + d = (a_0 + d) + d = a_0 + 2d$$
$$a_3 = a_2 + d = (a_0 + 2d) + d = a_0 + 3d$$

Slik kan vi fortsette, og får generelt

$$\underline{a_n = a_0 + n \cdot d} \; .$$

Vi ser at hvis $d \neq 0$ vil den aritmetiske tallfølgen divergere fordi leddene aldri kan gå mot noen fast verdi.

Hvis *m* og *n* er to hele tall, blir

$$a_n - a_m = (a_0 + n \cdot d) - (a_0 + m \cdot d) = \underline{(n-m)d} \; .$$

Setter vi $m = 1$, får vi den sammenhengen som vanligvis finnes i formelsamlinger:

$$a_n - a_1 = (n-1)d \quad \Leftrightarrow \quad \underline{a_n = a_1 + (n-1)d} \; .$$

Vi får en ***aritmetisk rekke*** når vi summerer ledd i en aritmetisk tallfølge. Siden aritmetiske tallfølger divergerer, vil også de aritmetiske rekkene divergere.

Vi skal nå finne en formel for den *n*'te partialsummen $S_n$, og lar første ledd være $a_1$.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + (n-1)d).$$

Men vi kan også starte summeringen bakfra i rekka:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1 = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + (a_n - (n-1)d).$$

Vi summerer nå disse to uttrykkene for $S_n$. Da får vi:

$$\begin{aligned} 2S_n &= \big(a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + (n-1)d)\big) \\ &\quad + \big(a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + (a_n - (n-1)d)\big) \\ &= (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots (a_1 + a_n) = n \cdot (a_1 + a_n) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{S_n = \tfrac{n}{2}(a_1 + a_n)}} \end{aligned}$$

***Eksempel 1.3.1:*** I en aritmetisk tallfølge er sjuende ledd lik 12 mens femtende ledd er lik 32. Finn ledd nr. 25.

*Løsning:* Vi finner først *d* ved å benytte at

$$a_n - a_m = (n-m)d \quad \Leftrightarrow \quad d = \frac{a_n - a_m}{n-m} = \frac{32-12}{15-7} = \frac{20}{8} = \underline{\frac{5}{2}}.$$

Da blir

$$a_{25} - a_{15} = (25-15)d \quad \Leftrightarrow \quad a_{25} = a_{15} + 10d = 32 + 10 \cdot \tfrac{5}{2} = \underline{\underline{57}}.$$

***Eksempel 1.3.2:*** I en aritmetisk rekke vet du at summen av de 8 første leddene er lik 20, mens summen av de 12 første leddene er lik 48. Hva er summen av de 20 første leddene i denne rekka?

*Løsning:* Det lureste er kanskje å sette inn uttrykket for $a_n$ i formelen for $S_n$. Da får vi:

$$S_8 = \tfrac{8}{2}(a_1 + a_8) = 4\big(a_1 + (a_1 + (8-1)d)\big) \quad \Leftrightarrow \quad 20 = 8a_1 + 28d \quad \Leftrightarrow \quad 5 = 2a_1 + 7d$$

mens

$$S_{12} = \tfrac{12}{2}(a_1 + a_{12}) = 6\big(a_1 + (a_1 + (12-1)d)\big) \quad \Leftrightarrow \quad 48 = 12a_1 + 66d \quad \Leftrightarrow \quad 8 = 2a_1 + 11d$$

Dette er to likninger med $a_1$ og $d$ som ukjente. Trekker likningene fra hverandre, og får

$$3 = 4d \quad \Leftrightarrow \quad d = \tfrac{3}{4}.$$

Da blir

$$a_1 = \tfrac{1}{2}(5 - 7d) = \tfrac{1}{2}\left(5 - 7 \cdot \tfrac{3}{4}\right) = -\tfrac{1}{8}.$$

Nå blir

$$a_{20} = a_1 + (20-1)d = -\tfrac{1}{8} + 19 \cdot \tfrac{3}{4} = \tfrac{113}{8}$$

slik at

$$S_{20} = \tfrac{20}{2}(a_1 + a_{20}) = 10\left(-\tfrac{1}{8} + \tfrac{113}{8}\right) = \underline{\underline{140}}.$$

Oppgave 1.3.1.

## 1.3.2. Geometriske tallfølger og rekker.

***Geometriske tallfølger*** karakteriseres ved at *forholdet* mellom to etterfølgende ledd i tallfølgen er konstant. Dette formuleres rekursivt slik:

En tallfølge $\{a_n\}$ er en ***geometrisk tallfølge***

$\Updownarrow$ def.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = k \quad \Leftrightarrow \quad a_{n+1} = k \cdot a_n$$

Størrelsen $k$ kalles *tallfølgens kvotient*.

Hvis vi kaller første ledd i tallfølgen for $a_0$, kan vi sette opp:

$$a_1 = k \cdot a_0$$

$$a_2 = k \cdot a_1 = k \cdot (k \cdot a_0) = k^2 \cdot a_0$$

$$a_3 = k \cdot a_2 = k \cdot (k^2 \cdot a_0) = k^3 \cdot a_0$$

Slik kan vi fortsette, og får generelt

$$\underline{a_n = k^n \cdot a_0}.$$

Vi ser at hvis $-1 < k < 1$ vil den geometriske tallfølgen konvergere mot 0.

Hvis *m* og *n* er to hele tall, blir

$$\frac{a_n}{a_m} = \frac{k^n \cdot a_0}{k^m \cdot a_0} = k^{n-m} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{a_n = k^{n-m} \cdot a_m}.$$

Setter vi $m = 1$, får vi den sammenhengen som vanligvis finnes i formelsamlinger:

$$\underline{a_n = k^{n-1} \cdot a_1}$$

Vi får en ***geometrisk rekke*** når vi summerer ledd i en geometrisk tallfølge. Vi skal nå finne en formel for den *n*'te partialsummen $S_n$:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_1 + k \cdot a_1 + k^2 \cdot a_1 + \cdots + k^{n-1} \cdot a_1.$$

Vi multipliserer dette uttrykket med *k*:

$$k \cdot S_n = k \cdot a_1 + k^2 \cdot a_1 + k^3 \cdot a_1 + \cdots + k^n \cdot a_1.$$

Vi trekker nå disse to uttrykkene fra hverandre. Da står vi kun igjen med

$$k \cdot S_n - S_n = \left(k \cdot a_1 + k^2 \cdot a_1 + k^3 \cdot a_1 + \cdots + k^n \cdot a_1\right) - \left(a_1 + k \cdot a_1 + k^2 \cdot a_1 + \cdots + k^{n-1} \cdot a_1\right)$$
$$= k^n \cdot a_1 - a_1 = a_1\left(k^n - 1\right).$$

Da blir

$$(k-1)S_n = \left(k^n - 1\right)a_1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{S_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1}}}.$$

Vi ser at dersom $-1 < k < 1$, blir $\lim_{n \to \infty} k^n = 0$. Da vil den geometriske rekka konvergerer mot

$$S = a_1 \frac{0 - 1}{k - 1} = \underline{\underline{\frac{a_1}{1 - k}}}.$$

Disse resultatene er såpass viktige at vi rammer dem inn:

Summen av de *n* første leddene i ei geometrisk rekke er

$$S_n = a_1 + k \cdot a_1 + k^2 \cdot a_1 + \cdots + k^{n-1} a_1 = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1}.$$

Når $n \to \infty$ vil rekka konvergere dersom $-1 < k < 1$. Da er summen

$$S = a_1 + k \cdot a_1 + k^2 \cdot a_1 + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} a_1 \cdot k^{i-1} = \frac{a_1}{1 - k}.$$

***Eksempel 1.3.3:*** I ei geometrisk rekke er tredje ledd lik 24 mens femte ledd er lik $\frac{32}{3}$. Vis at rekka konvergerer, og finn summen som den uendelige rekka konvergerer mot.

*Løsning:* Vi har at

$$a_5 = k^{5-3} a_3 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{32}{3} = k^2 \cdot 24 \quad \Leftrightarrow \quad k^2 = \tfrac{32}{24 \cdot 3} = \tfrac{4}{9} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{k = \pm \tfrac{2}{3}}.$$

Vi ser at $-1 < k < 1$ slik at rekka konvergerer for begge verdiene av *k*.

Finner $a_1$ ved å benytte at

$$a_3 = k^{3-1}a_1 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = \frac{a_3}{k^2} = \frac{24}{\left(\pm\frac{2}{3}\right)^2} = \underline{54}.$$

Vi får nå to løsninger:
Dersom $k = +\frac{2}{3}$, blir

$$S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{54}{1-\frac{2}{3}} = \underline{\underline{162}}.$$

Dersom $k = -\frac{2}{3}$, blir

$$S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{54}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} = \underline{\underline{\frac{162}{5}}}.$$

***Eksempel 1.3.4:*** Ei geometrisk rekke er gitt ved at første ledd er $a_1 = x$ og kvotienten er $k = -2x$.
a) Skriv ut de første leddene i rekka.
b) Sett opp en formel for det *n*'te leddet i rekka.
c) For hvilke verdier av *x* konvergerer rekka?
d) Finn summen av rekka når den konvergerer.

*Løsning*:
a) De første leddene i rekka blir

$$x, -2x^2, 4x^3, -8x^4, \cdots.$$

b) $$a_n = k^{n-1}\cdot a_1 = (-2x)^{n-1}\cdot x = \underline{\underline{(-2)^{n-1}x^n}}$$

(som kan omformes til mange andre former).
c) Rekka konvergerer når

$$-1 < k < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < -2x < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-1}{-2} > x > \frac{1}{-2} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{-\tfrac{1}{2} < x < \tfrac{1}{2}}}.$$

d) Når rekka konvergerer, er summen

$$S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{x}{1-(-2x)} = \underline{\underline{\frac{x}{1+2x}}}$$

Geometriske rekker dukker opp i mange sammenhenger. De danner for eksempel grunnlaget for beregning av *annuitetslån*.

**Oppgave 1.3.2**.

## *1.4. Noen konvergenstester.*

### 1.4.1. Generelle merknader.

Det er ganske vanlig at vi må nøye oss med å avgjøre *om* ei rekke konvergerer, uten å finne *hva* rekka eventuelt konvergerer mot. Vi har da til disposisjon en rekke ***konvergenstester***. Vi skal nå se på de viktigste av disse.

Før du i det hele tatt benytter en konvergenstest, bør du forvisse deg om at $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Dersom denne grenseverdien ikke er lik null, eller grenseverdien ikke eksisterer, kan du være sikker på at rekka divergerer.

Når du nå skal lære deg disse konvergenstestene, må du merke deg hvilke krav som må være oppfylt for at testen skal kunne anvendes. Men vær klar over at det spiller ingen rolle om kravene ikke er oppfylt for de første leddene av rekka. Vi kan da skille ut disse første leddene i en egen *endelig* rekke, som alltid har en *endelig* sum. Deretter går vi løs på de resterende leddene som oppfyller kravene, som da vil utgjøre en uendelig rekke. Vi sier gjerne at vi kun er interessert i ”*halen*” til rekka. Dette innebærer at formuleringer av typen ”… for alle hele tall $k \geq 1$…” kan oppfattes som ”… det eksisterer et endelig tall $N$ slik at kravene er oppfylt for alle hele tall $k \geq N$ …”.

## 1.4.2. Integraltesten.

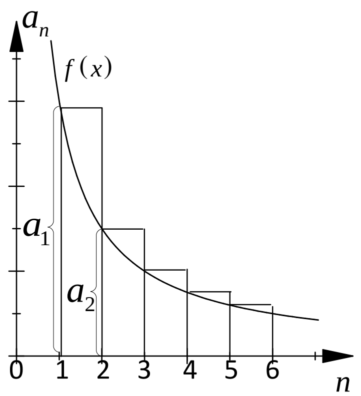
Dette er en konvergenstest som gjelder i dette spesielle tilfellet:

La $\{a_n\}$ være en monotont avtakende tallfølge som konvergerer mot null, der alle leddene er positive.
La $f(x)$ være en funksjon som er kontinuerlig og avtakende for $x \geq 1$, og som er slik at $f(n) = a_n$.
Da gjelder:

$$\int_1^\infty f(x)dx \text{ konvergerer} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^\infty a_k \text{ konvergerer}$$

$$\int_1^\infty f(x)dx \text{ divergerer} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^\infty a_k \text{ divergerer}$$

*Bevis:*




Vi skal først bruke figuren til venstre til å vise at:

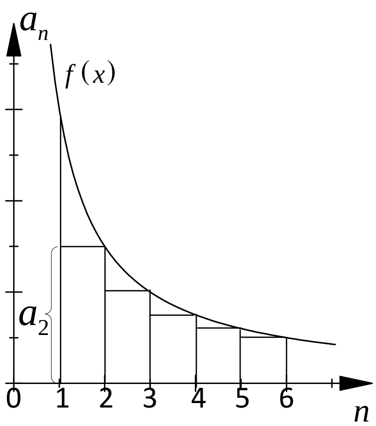
$$\sum_{k=1}^\infty a_k \text{ konvergerer} \quad \Rightarrow \quad \int_1^\infty f(x)dx \text{ konvergerer.}$$

Figuren framstiller grafen til en funksjon $f(x)$ som er positiv, kontinuerlig og avtakende når $x \geq 1$, og som er slik at $f(n) = a_n$. Du ser sikkert at arealet av søylen lengst til venstre er $a_1 \cdot 1 = a_1$, og generelt at arealet av søyle nr. $n$ er $a_n \cdot 1 = a_n$.

Dessuten ser du at samlet areal av alle søylene er større enn arealet under grafen, slik at

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \geq \int_1^\infty f(x)dx \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^\infty a_k \geq \int_1^\infty f(x)dx \geq 0 .$$

Siden rekka $\sum_{k=1}^\infty a_k$ etter forutsetningene skal konvergere, må integralet eksistere.




Så bruker vi figuren til venstre til å vise at:

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \text{ konvergerer } \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergerer.}$$

Av figuren ser du at arealet av søylen lengst til venstre er $a_2 \cdot 1 = a_2$, og generelt at arealet av søyle nr. $n$ er $a_{n+1} \cdot 1 = a_{n+1}$. Dessuten ser du at arealet under grafen er større enn summen av arealene av alle søylene, slik at

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \geq a_2 + a_3 + a_4 + \cdots \geq 0$$

Så legger vi til $a_1$ på begge sider av ulikheten:

$$\int_1^\infty f(x)\,dx + a_1 \geq a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^\infty f(x)\,dx + a_1 \geq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \geq 0\,.$$

Men etter forutsetningene skal $\int_1^\infty f(x)\,dx$ konvergere. Da må også $\int_1^\infty f(x)\,dx + a_1$ eksistere.

Siden $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ligger mellom denne verdien og 0, må $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eksistere slik at rekka konvergerer.

Siste del av setningen kan bevises på tilsvarende måte. Men det er enklere å ta negasjonene av de to bevisene vi allerede har gjennomført. Hvis vi tar negasjonen av implikasjonen

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergerer } \Rightarrow \int_1^\infty f(x)\,dx \text{ konvergerer}$$

får vi

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergerer } \Leftarrow \int_1^\infty f(x)\,dx \text{ divergerer.}$$

Og tar vi negasjonen av implikasjonen

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \text{ konvergerer } \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergerer.}$$

får vi

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \text{ divergerer } \Leftarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergerer.}$$

Til sammen har vi nå bevist hele setningen.

Vi skal nå bruke denne testen til å undersøke konvergensen til to spesielle rekker. Resultatene er viktige, og vil bli mye brukt senere.

***Eksempel 1.4.1*:** Den *harmoniske rekka* er gitt ved

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots.$$

Undersøk om denne rekka konvergerer.

*Løsning*: Vi merker oss først at leddene i rekka bli stadig mindre og konvergerer mot 0. For å kunne bruke integraltesten, danner vi funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

som er kontinuerlig og avtakende når $x \geq 1$. Videre er

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln x\right]_1^{\infty} = \lim_{x\to\infty} \ln x - \ln 1 = \underline{\lim_{x\to\infty} \ln x}\,.$$

Men denne grensen eksisterer ikke. Altså divergerer $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$. Da divergerer også rekka

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

***Eksempel 1.4.2*:** Undersøk om rekka

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

konvergerer.

*Løsning*: Vi merker oss først at leddene i rekka blir stadig mindre og konvergerer mot 0. For å kunne bruke integraltesten, danner vi funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

som er kontinuerlig og avtakende når $x \geq 1$. Videre er

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty} = -\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} - (-1) = -0 + 1 = \underline{1}\,.$$

Altså konvergerer $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$. Da må også

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

konvergere (men vi vet ikke hva rekka konvergerer mot).

Begge disse eksemplene er spesialtilfeller av setningen nedenfor, som du kan bevise selv:

> Rekka $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ kalles *p-rekka*.
>
> Denne rekka konvergerer dersom $p > 1$, og divergerer dersom $p \leq 1$.

[Oppgave 1.4.1](), [Oppgave 1.4.2]().

### 1.4.3. Sammenlikningstesten og grensesammenlikningstesten.

Det er ofte mulig å undersøke om ei rekke konvergerer ved å sammenlikne rekka med ei rekke som du kjenner konvergensegenskapene til. Da benytter du denne setningen, som kalles ***sammenlikningstesten***:

La $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ være to tallfølger, der $a_n \geq b_n \geq 0$ for alle $n \geq 1$.
Da gjelder:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergerer } \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergerer.}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_n \text{ divergerer } \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergerer.}$$

Setningen er egentlig intuitivt innlysende. Den første implikasjonen sier jo at dersom rekka med de største leddene konvergerer, må også rekka med de minste leddene konvergere. Og den siste implikasjonen sier at dersom rekka med de minste leddene divergerer, må også rekka med de største leddene divergere.

Vi spanderer likevel på oss et formelt bevis av den første setningen. Den andre setningen er bare negasjonen av den første. Beviset baserer seg på en setning om tallfølger:

For en **monoton** tallfølge gjelder at:
Tallfølgen er konvergent
$\Updownarrow$
Tallfølgen er begrenset

La $S_n$ være den $n$'te partialsummen til $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, d.v.s. at $S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$.

Siden $b_k \geq 0$ er tallfølgen $\{S_n\}$ monotont voksende. Men $\{S_n\}$ er også begrenset fordi

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \leq \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k .$$

Den første ulikheten følger av at $b_k \leq a_k$ for alle $k \geq 1$, og den siste ulikheten følger av at tallfølgen $\sum_{k=1}^{n} a_k$ er voksende fordi $a_k \geq 0$. Men siden rekka $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerer, må $S_n$ være begrenset. Og setningen over sier at en tallfølge som er monotont voksende og begrenset må konvergere. Altså konvergerer rekka $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Når vi bruker denne testen, sammenlikner vi ofte med ei passende *p*-rekke. Dersom både teller og nevner er polynomer, lar vi *p* være lik forskjellen i grad mellom nevner- og teller-polynomene. Eksemplene nedenfor viser teknikken:

***Eksempel 1.4.3*:** Undersøk om rekka

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}$$

konvergerer eller divergerer.

*Løsning*: Vi ser at nevneren er et førstegradspolynom i *k*, mens telleren er konstant. Det er derfor nærliggende å sammenlikne med ei *p*-rekke av samme type, d.v.s. *p*-rekka $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$.

Denne rekka divergerer, og det er derfor nærliggende å gjette på at også rekka $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}$ divergerer. Vi må da påvise at leddene i rekka $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}$ er større enn tilsvarende ledd i rekka $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$. Men dersom vi skriver ut noen ledd i hver av rekkene, ser vi at det ikke er tilfelle:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

Men dersom vi multipliserer rekka $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ med $\frac{1}{2}$, vil denne rekka fremdeles divergere. Da blir

$$\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots$$

Leddene i denne rekka ser ut til å være mindre enn de tilsvarende leddene i rekka $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}$.

Men vi må vise at det gjelder generelt. Det gjøres slik:

$$\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}=\frac{2k-(2k-1)}{(2k-1)\cdot 2k}=\frac{1}{(2k-1)\cdot 2k}>0 \text{ når } k\geq 1$$

slik at $\frac{1}{2k-1}>\frac{1}{2k}$ for alle $k\geq 1$.

Da må $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}$ divergere fordi $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}$ divergerer.

***Eksempel 1.4.4*:** Undersøk om rekka

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(2k+1)}$$

konvergerer eller divergerer.

*Løsning*: Vi ser at nevneren er et andregradspolynom i *k* mens telleren er en konstant. Da er det nærliggende å sammenlikne med rekka

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

som vi vet konvergerer. Vi skriver ut noen av de første leddene i hver av rekkene, og får

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(2k+1)}=\frac{1}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{21}+\cdots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots$$

Vi ser at de tre første leddene i rekka $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(2k+1)}$ er mindre enn de tilsvarende leddene i rekka $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$. Men vi må vise at det gjelder generelt:

$$\frac{1}{k(2k+1)}-\frac{1}{k^2}=\frac{k^2-k(2k+1)}{k(2k+1)\cdot k^2}=\frac{k^2-2k^2-k}{k^3(2k+1)}=\frac{-k^2-k}{k^3(2k+1)}=\frac{-k-1}{k^2(2k+1)}<0 \text{ når } k\geq 1$$

slik at $\frac{1}{k(2k+1)}<\frac{1}{k^2}$ for alle $k\geq 1$.

Da må $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(2k+1)}$ konvergere fordi $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ konvergerer.

Eksemplene over viser at det kan være plundrete både å finne rett rekke å sammenlikne med, og å vise at leddene i den ene rekka er større enn leddene i den andre rekka. Vi skal derfor utvikle sammenlikningstesten til en annen form som ofte kan være gunstigere i bruk, og som også er mer generell enn sammenlikningstesten. Denne nye formen kalles ***grense-sammenlikningstesten***:

La $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ og $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ være to rekker som begge har bare positive ledd.
Dersom

$$L=\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k}$$

eksisterer og er forskjellig fra 0, så vil enten begge rekkene konvergere, eller begge rekkene vil divergere.

*Bevis*: Dersom betingelsene i setningen er oppfylt, vil det alltid være mulig å finne to positive tall $m$ og $M$ slik at når $k$ er stor nok er

$$0<m<\frac{a_k}{b_k}<M \quad\Leftrightarrow\quad 0<m\cdot b_k<a_k<M\cdot b_k\,.$$

Anta først at $\sum_{k=k_0}^{\infty}a_k$ konvergerer. Siden $m\cdot b_k<a_k$, får vi at

$$\sum_{k=k_0}^{\infty}m\cdot b_k<\sum_{k=k_0}^{\infty}a_k \quad\Leftrightarrow\quad m\cdot\sum_{k=k_0}^{\infty}b_k<\sum_{k=k_0}^{\infty}a_k \quad\Leftrightarrow\quad \sum_{k=k_0}^{\infty}b_k<\frac{1}{m}\cdot\sum_{k=k_0}^{\infty}a_k$$

Men siden $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerer, må også $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergere.

Anta så at $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergerer. Siden $a_k < M \cdot b_k$, får vi at

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k < \sum_{k=k_0}^{\infty} M \cdot b_k \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k < M \cdot \sum_{k=k_0}^{\infty} b_k \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=k_0}^{\infty} b_k > \frac{1}{M} \cdot \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$$

Men siden $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergerer, må også $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergere.

Resten av setningen følger ved å invertere disse to implikasjonene.

I Eksempel 1.4.3. og 1.4.4 så vi at det kan være plundrete å bruke sammenlikningstesten. Vi skal nå se på de samme rekkene på nytt, men nå med grensesammenlikningstesten.

***Eksempel 1.4.5*:** Undersøk konvergensen til de to rekkene:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(2k+1)}$

*Løsning*:

a) Siden telleren er konstant mens nevneren er et førstegradspolynom i *k*, er det naturlig å sammenlikne med $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ som vi vet divergerer:

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{2k-1}}{\frac{1}{k}} \cdot \frac{(2k-1)k}{(2k-1)k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{2k-1} \cdot \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2-\frac{1}{k}} = \underline{\frac{1}{2}}.$$

Grenseverdien eksisterer og er forskjellig fra null.

Altså må $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}$ divergere fordi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergerer.

b) Siden telleren er konstant mens nevneren er et andregradspolynom i *k*, er det naturlig å sammenlikne med $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ som vi vet konvergerer:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k(2k+1)}}{\frac{1}{k^2}} \cdot \frac{k^2(2k+1)}{k^2(2k+1)} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{2k+1} \cdot \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{k}} = \underline{\frac{1}{2}}.$$

Grenseverdien eksisterer og er forskjellig fra null.

Altså må $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$ konvergere fordi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergerer.

Oppgave 1.4.3.

### 1.4.4. Alternerende rekker.

Vi kommer ofte bort i rekker der annethvert ledd er positivt og annethvert ledd er negativt. Slike rekker kalles ***alternerende***, og defineres formelt slik:

Ei rekke der leddene er vekselvis positive og negative, kalles ***alternerende***.

Slike rekker kan skrives på formen

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k \quad \text{eller} \quad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} a_k \quad \text{der } a_k > 0 \text{ for alle } k \in \mathbb{N},$$

avhengig av om første ledd er negativt eller positivt.

Merk at definisjonen er slik at $a_k$ alltid er positiv. Det alternerende fortegnet ligger i faktoren $(-1)^k$ eller $(-1)^{k+1}$.

***Eksempel 1.4.6***: Rekka

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

kalles *den alternerende harmoniske rekka*.

Vi har en ganske enkel konvergenstest for alternerende rekker:

Dersom leddene i ei alternerende rekke er slik at $a_k \geq a_{k+1} \geq 0$ og $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, så vil rekka konvergere.

Beviset er ganske morsomt. Vi skal først anta at første ledd er positivt, og skal se på partialsummen av et jamt antall ledd:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

der $n$ er et jamt tall. Denne summen kan vi splitte opp med parenteser på to måter:

$$S_n = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) + \cdots + (a_{n-1} - a_n) \qquad (1)$$

$$= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots (a_{n-2} - a_{n-1}) - a_n \qquad (2)$$

Men siden $a_{k-1} \geq a_k \geq 0$, er alle differansene inni parentesene positive. Da viser (1) at $S_n$ er ledd i en monotont voksende tallfølge. Men (2) viser at denne tallfølgen er opptil begrenset. Altså er $\{S_n\}$ en konvergent tallfølge, og rekka $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} a_k$ konvergerer.

Dersom $n$ er et oddetall, kan vi føre et tilsvarende resonnement der vi viser at $S_n$ er ledd i en tallfølge som er monotont avtakende og nedtil begrenset. Også da må rekka $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} a_k$ konvergere.

***Eksempel 1.4.7**:* Vis at den alternerende harmoniske rekka konvergerer.

*Løsning*: Den alternerende harmoniske rekka er

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots,$$

d.v.s. at $a_k = \frac{1}{k}$. Vi må nå vise at kravene for konvergens er oppfylt.

Vi ser direkte at

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0.$$

Videre er

$$a_{k+1} - a_k = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} = \frac{k-(k+1)}{k(k+1)} = \frac{-1}{k(k+1)} < 0 \quad \text{for alle } k \geq 1$$

slik at

$$a_{k+1} < a_k \quad \text{for alle } k \geq 1.$$

Og da er begge kravene for konvergens oppfylt.

Oppgave 1.4.4.

I praktisk arbeid kan det være vanskelig å finne summen av ei konvergent rekke, d.v.s. finne hva den uendelige rekka konvergerer mot. Vi kan da være fristet til å summere bare de *n* første leddene, og håpe at feilen vi gjør ikke er for stor. For alternerende rekker har vi en enkel test på hvor stor feilen da blir:

La $S$ være summen av en konvergent alternerende rekke.
La $S_n$ være den $n$'te partialsummen til rekka.
Da er

$$|S - S_n| < a_{n+1}.$$

Litt enklere (og mindre presist) formulert: Feilen vi gjør ved å kutte rekka etter *n* ledd, er mindre enn absoluttverdien av det første leddet vi kutter.

Setningen kan bevises med et tilsvarende resonnement som beviset for konvergens.

***Eksempel 1.4.8***: Finn et tilnærmet uttrykk for summen av rekka

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

med usikkerhet på mindre enn 0.01.

*Løsning*: Vi ser at dette er en alternerende rekke som tilfredsstiller kravene for konvergens. At usikkerheten skal være mindre enn 0.01, betyr at første ledd som kuttes ut må være slik at

$$\frac{1}{k^2} \le 0.01 \quad \Leftrightarrow \quad k^2 \ge 100 \quad \Leftrightarrow \quad k \ge 10 .$$

Vi summerer derfor de 9 første leddene, og får

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \approx \sum_{k=1}^{9} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{1}{1} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \frac{1}{25} + \frac{1}{36} - \frac{1}{49} + \frac{1}{64} - \frac{1}{81} \approx \underline{\underline{-0.83}}.$$

**Oppgave 1.4.5.**

I mer videregående studier av rekker har vi bruk for begrepene **absolutt konvergens** og **betinget konvergens**. Disse begrepene defineres slik:

Ei rekke $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer ***absolutt*** dersom $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergerer.

Ei rekke $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer ***betinget*** dersom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer, mens $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergerer.

Vi kan blant annet vise at:

Dersom ei rekke konvergerer absolutt, vil den også konvergere.

***Eksempel 1.4.9:*** Undersøk om rekkene

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ (den alternerende harmoniske rekka)

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$

konvergerer betinget eller absolutt.

*Løsning*: Vi vet at begge rekkene konvergerer. Vi må nå undersøke om de rekkene som framkommer når vi summerer absoluttverdiene av leddene, også konvergerer:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, som er den harmoniske rekka. Vi vet at den divergerer.

Altså vil $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ konvergere betinget.

b) $\sum_{k=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ som vi vet konvergerer fordi det er en *p*-rekke med $p = 2$.

Da må $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ konvergere absolutt.

Absolutt konvergente rekker har noen gunstige egenskaper som betinget konvergente rekker ikke har. Vi kan bl.a. stokke om rekkefølgen på leddene i en *absolutt* konvergent rekke uten at summen av rekka endres. Men dersom vi stokker om leddene i en *betinget* konvergent rekke, kan vi risikere at summen endres.

Som eksempel kan vi få summen av leddene i den alternerende harmoniske rekka til å bli hva som helst ved å summere i en bestemt rekkefølge. Vi kan for eksempel få summen til å konvergere mot 20 ved at vi først summerer bare positive ledd inntil summen er blitt større enn 20. Dette kan vi klare fordi $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ divergerer. Deretter legger vi til negative ledd til summen er under 20. Så legger vi til positive ledd til summen er over 20, og slik fortsetter vi. På den måten vil summen konvergere mot 20. Eller vi kan få summen til å gå mot et hvilket som helst annet tall ved å benytte en tilsvarende prosedyre rundt dette tallet.

Moralen er at vi må være svært forsiktig med å manipulere med rekkefølgen av ledd i en betinget konvergent rekke. Men dersom rekka konvergerer absolutt, trenger vi ikke å være like forsiktige. Det skal vi dra nytte av etter hvert.

### 1.4.5. Forholdstesten.

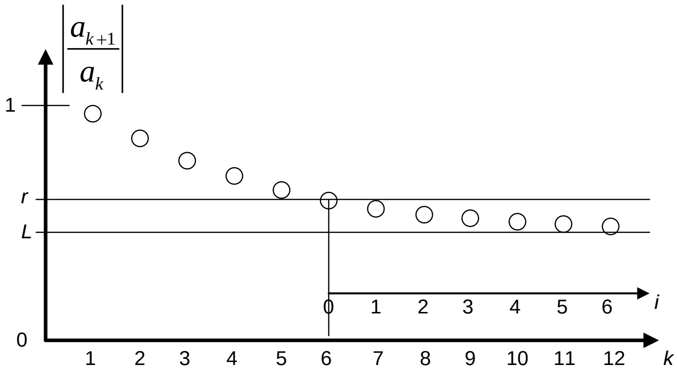
Når du bruker sammenliknings- eller grensesammenlikningstesten, sammenlikner du ledd i en rekke med ledd i en *annen* rekke. ***Forholdstesten*** som vi nå skal se på, sammenlikner to ledd som følger etter hverandre i *samme* rekke. Vi trenger altså ikke å benytte kunnskaper om andre rekker.

La $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ være ei rekke der alle leddene er forskjellig fra null.
Beregn forholdet

$$L = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|.$$

Dersom $L < 1$, konvergerer rekka absolutt.
Dersom $L > 1$ eller $L$ ikke eksisterer, divergerer rekka.
Dersom $L = 1$, gir ikke denne testen noen avgjørelse.

*Bevis*:




Anta først at $0 < L = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$.

Dette betyr at når $k$ er stor nok, må det finnes et tall $r$ der $L < r < 1$, og som er slik at $\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| \le r$.

Se figuren til venstre.

Vi skal nå begynne summeringen når betingelsen over er oppfylt. Summen av et endelig antall ledd for lavere verdier av $k$ vil alltid være et endelig tall. Når betingelsen er oppfylt, har vi at $|a_{k+1}| \le r\cdot|a_k|$. Men vi vet at for ei geometrisk rekke er $|a_{k+1}| = r\cdot|a_k|$. Slike geometriske rekker konvergerer når $r<1$. Av sammenlikningstesten får vi at rekker der $|a_{k+1}| \le r\cdot|a_k|$ også må konvergere når $r<1$. Dermed har vi vist første del av setningen.

Dersom $L>1$, må det eksistere en $N$ slik at

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1 \quad\Leftrightarrow\quad |a_{k+1}| > |a_k| \text{ når } k \ge N.$$

Da er tallfølgen $\{|a_n|\}$ voksende. Og en voksende følge av positive ledd kan umulig konvergere mot null. Altså divergerer $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Legg merke til at setningen ikke gir noen avgjørelse dersom $L=1$. Da må vi bruke andre kriterier. Forholdstesten er således nokså "grovmasket", men er svært nyttig når det kan brukes.

***Eksempel 1.4.10***: Undersøk konvergensen for rekkene

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{3^k}$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{2^k}$

*Løsning*:

a) $$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{\frac{k+1}{3^{k+1}}}{\frac{k}{3^k}}\cdot\frac{3^{k+1}}{3^{k+1}} = \lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{3k}\cdot\frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty}\frac{1+\frac{1}{k}}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

Da konvergerer rekka absolutt.

b) $$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{\frac{(k+1)!}{2^{k+1}}}{\frac{k!}{2^k}}\cdot\frac{2^{k+1}}{2^{k+1}} = \lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)!}{2k!} = \lim_{k\to\infty}\frac{k!\cdot(k+1)}{2k!} = \lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{2}.$$

Men denne grenseverdien eksisterer ikke. Da divergerer rekka.

Oppgave 1.4.6.

## 1.4.6. Rottesten.

Vi avslutter med en konvergenstest som er beslektet med forholdstesten:

Vi har gitt rekka $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ . Beregn

$$L = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} .$$

Dersom $L < 1$, konvergerer rekka absolutt.
Dersom $L > 1$ eller $L$ ikke eksisterer, divergerer rekka.
Dersom $L = 1$, gir ikke denne testen noen avgjørelse.

Beviset følger samme tankegang som beviset for forholdstesten. Dersom $L < 1$, må det eksistere et tall $r$ der $L < r < 1$ som er slik at

$$\sqrt[k]{|a_k|} \le r$$

når $k$ er over en viss grense. Da er også $|a_k| \le r^k$ . Men dersom $|a_k| = r^k$ får vi ledd i en geometrisk tallfølge. Vi vet at den tilhørende geometriske rekka konvergerer når $r < 1$. Ved å bruke sammenlikningstesten ser vi at også rekka $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ der $L = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$ må konvergere.

Dersom $L > 1$, må også $|a_k| > 1$ når $k$ er stor nok. Da kan rekka umulig konvergere.

Merk at heller ikke her kan testen gi noen avgjørelse dersom $L = 1$.

Når vi bruker rottesten, råker vi noen ganger bort i uttrykk av typen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ . Vi skal nå vise at denne grenseverdien går mot 1. Det gjør vi slik:

$$y = \sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} \quad \Leftrightarrow \quad \ln y = \ln\left(n^{\frac{1}{n}}\right) = \tfrac{1}{n}\ln n .$$

Ved å bruke L'Hôpitals regel, får vi at

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{x}}{1}\right) = \frac{0}{1} = 0 .$$

Da må også

$$\ln y = \tfrac{1}{n}\ln n \to 0 \text{ når } n\to\infty ,$$

slik at

$$y = \sqrt[n]{n} \to e^0 = 1 \text{ når } n\to\infty .$$

***Eksempel 1.4.11:*** Bruk rottesten til å undersøke konvergensen til disse rekkene:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k}$ (samme oppgave som eksempel 1.4.10a)

b) $\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot e^{-k}$

*Løsning:*

a) $\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{\frac{k}{3^k}} = \sqrt[k]{k} \cdot \sqrt[k]{3^{-k}} = \sqrt[k]{k} \cdot \left(3^{-k}\right)^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{k} \cdot 3^{-1}.$

Da blir

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{k}{3^k}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} \cdot 3^{-1} = \tfrac{1}{3} \cdot 1 = \tfrac{1}{3} < 1$$

slik at rekka konvergerer absolutt.

b) $\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{k \cdot e^{-k}} = \sqrt[k]{k} \cdot \left(e^{-k}\right)^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{k} \cdot e^{-1}.$

Da blir

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k \cdot e^{-k}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} \cdot e^{-1} = 1 \cdot e^{-1} = e^{-1} < 1$$

slik at rekka konvergerer absolutt.

Oppgave 1.4.7.

# 2. Potensrekker.

## *2.1. Innledning.*

***Potensrekker*** er et av de mest spennende feltene av matematikken, fullt av overraskelser. Etter hvert skal vi blant annet vise at

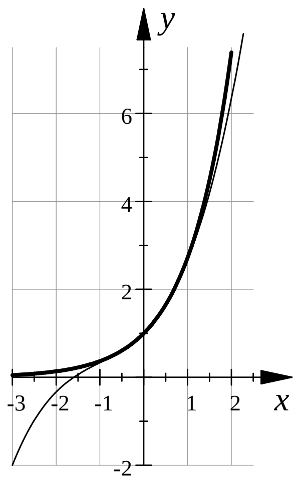
$$e^x \equiv 1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{4!}x^4 + \cdots \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!}x^k$$

$$\cos x \equiv 1 - \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4 - \tfrac{1}{6!}x^6 + \cdots \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$$

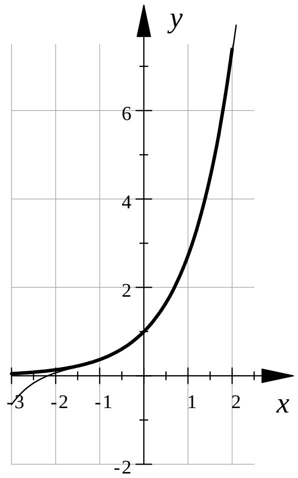
$$\sin x \equiv x - \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{5!}x^5 - \tfrac{1}{7!}x^7 + \cdots \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

La du merke til at jeg brukte *identitetstegnet* $\equiv$ istedenfor det vanlige likhetstegnet $=$ i uttrykkene ovenfor? Vanligvis bruker vi bare =, men her benyttet jeg $\equiv$ for å understreke at den uendelige rekka er *identisk* med funksjonen for alle verdier av *x*, på samme måte som $(x+1)^2$ er *identisk* med $x^2 + 2x + 1$, d.v.s. at de to uttrykkene kan benyttes om hverandre etter behov.

Synes du det virker merkelig at en funksjon som $f(x) = e^x$ kan erstattes av et polynom i *x*, selv om dette polynomet får uendelig mange ledd? Se på figurene nedenfor:




Tykk strek: $e^x$. Tynn strek: $\sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k!}x^k$.




Tykk strek: $e^x$. Tynn strek: $\sum_{k=0}^{5} \frac{1}{k!}x^k$.

Til venstre er grafen til $f(x) = e^x$ tegnet sammen med summen av de fire første leddene i rekka for $e^x$. Du ser at grafene er temmelig like når *x* ligger mellom $-1$ og 1. Til høyre er grafen til $f(x) = e^x$ tegnet sammen med summen av de sju første leddene i rekka for $e^x$. Da faller grafene sammen helt til de begynner å sprike nær $x = -2$. Det virker kanskje ikke så urimelig at funksjonene blir like når vi tar med uendelig mange ledd i rekka.

Men hva er hensikten med å erstatte greie funksjoner som $e^x$, $\cos x$ eller $\sin x$ med uendelige rekker? Et foreløpig svar kan være at slike rekker viser seg å være gunstig i de utroligste situasjonene. Eksemplene nedenfor viser to slike situasjoner.

***Eksempel 2.1.1:*** Finn en tilnærmet verdi for det bestemte integralet

$$\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx .$$

*Løsning:* Det er ikke mulig å løse det tilhørende ubestemte integralet. Vi må derfor nøye oss med tilnærmingsverdi for det bestemte integralet. Simpsons metode kan selvsagt brukes, men vi har en mye bedre metode til disposisjon. Vi bruker rekka for $\cos x$, og får:

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-\left(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\frac{1}{8!}x^8-\cdots\right)}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{6!}x^6-\frac{1}{8!}x^8+\cdots}{x^2} = \underline{\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}x^2+\frac{1}{6!}x^4-\frac{1}{8!}x^6+\cdots}$$

Da blir

$$\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \int_0^1\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}x^2+\frac{1}{6!}x^4-\frac{1}{8!}x^6+\cdots\right)dx$$

$$= \left[\frac{1}{2!}x\right]_0^1 - \left[\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 + \left[\frac{1}{6!}\cdot\frac{1}{5}x^5\right]_0^1 - \left[\frac{1}{8!}\cdot\frac{1}{7}x^7\right]_0^1 + \cdots$$

$$= \frac{1}{2}-\frac{1}{72}+\frac{1}{3600}-\frac{1}{282\,240}+\cdots$$

Du innser sikker at tallrekka i svaret ovenfor er en alternerende rekke der absoluttverdien av leddene konvergerer mot null. Da vet vi at feilen vi gjør ved å kutte rekka, er mindre enn absoluttverdien av det første leddet vi utelater. Det vil si at dersom vi tar med bare de tre første leddene i rekka, får vi at

$$\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx \approx \frac{1}{2}-\frac{1}{72}+\frac{1}{3600} \approx \underline{\underline{0.486\,389}}$$

med en nøyaktighet som er bedre enn $\frac{1}{282\,240} \approx 0.000\,004$.

**Oppgave 2.1.1.**

Når du jobber med komplekse tall, har du ofte bruk for identiteten

$$e^{ix} \equiv \cos x + i\cdot\sin x .$$

Hittil har vi bare sagt at ”slik er det”. Nå er det på tide å vise at identiteten virkelig stemmer.

***Eksempel 2.1.2:*** Vis at identiteten

$$e^{ix} \equiv \cos x + i\cdot\sin x$$

stemmer.

*Løsning:* Vi erstatter $x$ med $ix$ i rekka for $e^x$, bruker likhetstegn istedenfor $\equiv$, og får

$$e^{ix} = 1+ix+\tfrac{1}{2!}(ix)^2+\tfrac{1}{3!}(ix)^3+\tfrac{1}{4!}(ix)^4+\tfrac{1}{5!}(ix)^5+\tfrac{1}{6!}(ix)^6+\tfrac{1}{7!}(ix)^7+\cdots$$

$$= 1+i\cdot x-\tfrac{1}{2!}x^2-\tfrac{1}{3!}i\cdot x^3+\tfrac{1}{4!}x^4+\tfrac{1}{5!}i\cdot x^5-\tfrac{1}{6!}x^6-\tfrac{1}{7!}i\cdot x^7+\cdots$$

$$= \left(1-\tfrac{1}{2!}x^2+\tfrac{1}{4!}x^4-\tfrac{1}{6!}x^6+\cdots\right)+i\left(x-\tfrac{1}{3!}x^3+\tfrac{1}{5!}x^5-\tfrac{1}{7!}x^7+\cdots\right)$$

$$= \underline{\cos x + i\cdot\sin x}$$

Merk at omstokkingen av leddene strengt tatt forutsetter at rekka konvergerer absolutt.

Ved nærmere ettertanke har du faktisk vært borti situasjoner der en funksjon av *x* er lik en uendelig rekke tidligere. Du har jo sett rekka

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} x^k .$$

Dette er ei geometrisk rekke der første ledd er $a_1 = 1$ og kvotienten er $k = x$. Du vet at slike rekker konvergerer når $|k| < 1$, d.v.s. når $-1 < x < 1$. Da er summen

$$S(x) = \frac{a_1}{1-k} = \frac{1}{1-x}.$$

Med andre ord,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} x^k \text{ forutsatt at } -1 < x < 1.$$

Nå håper jeg at du sitter igjen med mange gode spørsmål, for eksempel:

- Hvordan har vi kommet fram til rekkene for $e^x$, $\cos x$ og $\sin x$?
- Hvordan kan vi vite at rekkene for $e^x$, $\cos x$ og $\sin x$ konvergerer for alle verdier av *x*, mens rekka for $\dfrac{1}{1-x}$ bare konvergerer for $-1 < x < 1$?
- Kan vi finne tilsvarende rekker for andre funksjoner? I så fall, hvordan kan vi avgjøre konvergensen av slike rekker?
- Hva kan vi bruke slike rekker til?

Noen svar på slike spørsmål finner du i resten av dette kapitlet om potensrekker.

## 2.2. Definisjoner.

La oss starte helt fra grunnen av. Vi skal studere rekker der leddene inneholder en fri variabel *x*. Vi skal konsentrere oss om ***potensrekker***, som er rekker som inneholder *x* i stadig høyere potens. I sin enkleste form ser disse rekkene lik ut:

> Ei rekke av formen
> $$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$
> kalles ei **potensrekke i *x***.

Du ser sikkert at rekkene for $e^x$, $\cos x$, $\sin x$ og $\dfrac{1}{1-x}$ er slike potensrekker.

Men vi får ofte bruk for en mer generell form:

> Ei rekke av formen
> $$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$$
> kalles ei **potensrekke i (*x* – *a*)**.

Vi skal nå se på noen egenskaper ved slike rekker. Deretter skal vi vise hvordan vi kan finne rekkene for $e^x$, $\cos x$, $\sin x$ og andre funksjoner av *x*, og vi skal se mer på hva slike rekker kan brukes til.

## *2.3. Konvergens av potensrekker.*

Potensrekkene skiller seg fra de rekkene vi har sett på hittil ved at de inneholder en fri variabel *x*. Vi må da forvente at konvergensegenskapene avhenger av verdien av denne variabelen.

Etter hvert som du jobber med potensrekker, vil du innse at slike rekker har de konvergens-egenskapene som er angitt i ramma nedenfor:

Ei potensrekke $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ har en og kun en av disse egenskapene:

1. Rekka konvergerer kun for $x = a$.
2. Rekka konvergerer absolutt for alle verdier av *x*.
3. Det fins et intervall $I = \langle a-\rho,\ a+\rho \rangle$ som er slik at rekka konvergerer absolutt når $x \in I$.
   Det er også mulig at rekka konvergerer i ett eller begge endepunktene av *I*.

Størrelsen $\rho$ kalles ***rekkas konvergensradius***, og *I* (eventuelt med tillegg av endepunkter der rekka konvergerer) kalles ***rekkas konvergensområde*** eller ***konvergensintervall***.

Jeg vil sterkt anbefale at du går gjennom beviset nedenfor, blant annet fordi beviset skisserer opp hvordan vi går fram når vi undersøker konvergensen for slike rekker

Vi starter med forholdstesten, og beregner størrelsen

$$L = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_{k+1}(x-a)^{k+1}}{c_k (x-a)^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_{k+1}(x-a)}{c_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right|\cdot|x-a|.$$

Nå husker du sikkert at rekka konvergerer absolutt når $L < 1$. Vi må da skille mellom disse tre situasjonene:

1. Dersom $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right|$ ikke eksisterer, konvergerer rekka kun når $x = a$ slik at $L = 0$. Da er alle leddene i rekka lik 0.

2. Dersom $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = 0$, er $L = 0$ for alle verdier av *x*. Rekka konvergerer da absolutt for alle verdier av *x*.

3. Dersom $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right|$ eksisterer og er forskjellig fra 0, konvergerer rekka absolutt når

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right|\cdot|x-a|<1.$$

Vi innfører nå konvergensradien $\rho$ ved å sette

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right|=\frac{1}{\rho}.$$

Da konvergerer rekka absolutt når

$$\tfrac{1}{\rho}\cdot|x-a|<1 \quad\Leftrightarrow\quad |x-a|<\rho \quad\Leftrightarrow\quad -\rho<x-a<\rho \quad\Leftrightarrow\quad \underline{a-\rho<x<a+\rho}.$$

Når vi undersøker konvergens med forholdstesten, kan vi få stygge brudne brøker. Dersom du ikke liker å regne med brudne brøker, kan du gange med den omvendte brøken istedenfor å dele på en brøk. Jeg har benyttet denne framgangsmåten i mange av eksemplene nedenfor.

I et par av eksemplene kommer du ut for fakultetsuttrykk. Husk da at $(n+1)!=n!\cdot(n+1)$, og at $0!=1$.

***Eksempel 2.3.1***: Undersøk konvergensen til disse rekkene:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{k!}x^k$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}k!\cdot(x-2)^k$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k^2}(x-1)^k$

*Løsning*:

a) Bruker forholdstesten, og beregner størrelsen

$$L=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{2^{k+1}}{(k+1)!}x^{k+1}}{\frac{2^k}{k!}x^k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{2^{k+1}x^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\frac{k!}{2^k x^k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{2x\cdot k!}{k!\cdot(k+1)}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{2}{k+1}x\right|.$$

Men $\frac{2}{k+1}\to 0$ når $k\to\infty$. Altså er $L<1$ for alle verdier av *x*, og rekka konvergerer absolutt for alle verdier av *x*.

b) Bruker forholdstesten, og beregner størrelsen

$$L=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)!(x-2)^{k+1}}{k!\cdot(x-2)^k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{k!\cdot(k+1)\cdot(x-2)}{k!}\right|=\lim_{k\to\infty}|(k+1)\cdot(x-2)|.$$

Vi ser at $L\to\infty$ når $k\to\infty$. Altså konvergerer rekka kun når $x=2$ (da er alle leddene lik null) og divergerer for alle andre verdier av *x*.

c) Bruker forholdstesten, og beregner størrelsen

$$L=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{2^{k+1}}{(k+1)^2}(x-1)^{k+1}}{\frac{2^k}{k^2}(x-1)^k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{2^{k+1}(x-1)^{k+1}}{(k+1)^2}\cdot\frac{k^2}{2^k(x-1)^k}\right|$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{2k^2}{(k+1)^2}(x-1)\right|=2\cdot\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^2\cdot|x-1|=2\cdot\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{k}}\right)^2\cdot|x-1|=2\cdot1\cdot|x-1|$$

Rekka konvergerer når

$$L<1 \quad\Leftrightarrow\quad 2\cdot|x-1|<1 \quad\Leftrightarrow\quad |x-1|<\tfrac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad -\tfrac{1}{2}<x-1<\tfrac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\tfrac{1}{2}<x<\tfrac{3}{2}}.$$

Til slutt må vi undersøke endepunktene:

$x=\frac{1}{2}$: Rekka blir nå

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k^2}\left(\frac{1}{2}-1\right)^k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k^2}\left(-\frac{1}{2}\right)^k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$$

som konvergerer absolutt.

$x=\frac{3}{2}$: Rekka blir nå

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k^2}\left(\frac{3}{2}-1\right)^k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k^2}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

som også konvergerer absolutt.

Altså vil rekka konvergere absolutt når

$$\underline{\underline{\tfrac{1}{2}\le x\le\tfrac{3}{2}}}.$$

**Oppgave 2.3.1.**

Hovedpoenget ved dette temaet er at en funksjon av $x$ kan være identisk med en potensrekke når $x$ ligger innenfor et konvergensintervall. Formelt bør vi si at:

”Potensrekka $\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-a)^k$ konvergerer mot $f(x)$ når $x\in\langle a-\rho,\, a+\rho\rangle$”

Men i praksis bruker vi ofte den enklere formuleringen:

”$\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-a)^k = f(x)$ når $x\in\langle a-\rho,\, a+\rho\rangle$”.

Selv om den første formuleringen er mest korrekt, er det ofte nyttigere å benytte likhetstegnet (egentlig et identitetstegn) mellom rekka og den funksjonen som rekka konvergerer mot når $x$ ligger innenfor konvergensintervallet.

## 2.4. Regning med potensrekker.

Vi kan manipulere slike rekker på mange måter. Vi kan for eksempel integrere eller derivere rekkene slik setningene nedenfor angir:

Anta at rekka

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k = f(x)$$

når $x$ tilhører et konvergensintervall $\langle a-\rho, a+\rho \rangle$.

Da kan vi:

1. Derivere ledd for ledd, og får at

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot c_k (x-a)^{k-1} = f'(x).$$

2. Integrere ledd for ledd, og får at

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} (x-a)^{k+1} = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Konvergensen gjelder når $x \in \langle a-\rho, a+\rho \rangle$.

Endepunktene av konvergensintervallet må undersøkes spesielt.

Det er forholdsvis enkelt å bruke forholdstesten til å vise at de tre rekkene $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$, $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot c_k (x-a)^{k-1}$ og $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} (x-a)^{k+1}$ har samme konvergensradius $\rho$. Det er atskillig verre å vise at når $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ konvergerer mot $f(x)$, vil de andre to rekkene konvergerer mot henholdsvis $f'(x)$ og $\int_a^x f(t)\,dt$, og vi skal derfor hoppe over beviset.

La oss se et par eksempler på hva dette kan brukes til:

***Eksempel 2.4.1*****:** Ta utgangspunkt i at

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^k + \cdots = \frac{1}{1-x} \quad \text{når } -1 < x < 1.$$

Finn de rekkene som framkommer når du

a) deriverer ledd for ledd

b) integrerer ledd for ledd.

Finn også de funksjonene som de nye rekkene konvergerer mot, og bestem konvergens-områdene.

*Løsning*:
a) Deriverer ledd for ledd, og får at

$$0+1+2x+3x^2+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot x^{k-1}=\frac{0\cdot(1-x)-1\cdot(-1)}{(1-x)^2}=\underline{\frac{1}{(1-x)^2}}.$$

Må undersøke konvergensen i endepunktene:
$x=-1$: Rekka blir $1-2+3-\cdots$ som åpenbart divergerer.
$x=1$: Rekka blir $1+2+3+\cdots$ som åpenbart divergerer.
Altså ser vi at

$$1+2x+3x^2+4x^3+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot x^{k-1}=\underline{\underline{\frac{1}{(1-x)^2}}}\ \text{ når } -1<x<1.$$

b) Integrerer ledd for ledd, og får at

$$x+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{4}x^4+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{1}{k}\cdot x^k=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt$$

$$=-\left[\ln(1-t)\right]_0^x=-\ln(1-x)+\ln 1=\underline{-\ln(1-x)}$$

Må undersøke konvergensen i endepunktene:
$x=-1$: Rekka blir $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\cdots$ som konvergerer (alternerende rekke).
$x=1$: Rekka blir $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$ som divergerer (harmonisk rekke).
Altså ser vi at

$$x+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{4}x^4+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{1}{k}\cdot x^k=\underline{\underline{-\ln(1-x)}}\ \text{ når } -1\le x<1.$$

Vi har tidligere sagt at den alternerende harmoniske rekka konvergerer, men vi har ikke sagt hva denne rekke konvergerer mot. Det skal vi gjøre nå.

***Eksempel 2.4.2:*** Bruk resultatet i eksempel 2.4.1b til å finne et eksakt uttrykk for summen av den alternerende harmmoniske rekka

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\cdots.$$

*Løsning:* I del b) av eksempel 2.4.1 har vi bl.a. funnet at

$$x+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{4}x^4+\cdots=-\ln(1-x)\ \text{ når } -1\le x<1.$$

Siden rekka også konvergerer når $x=-1$, setter vi denne verdien inn i rekka, og får

$$-1+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}-\cdots=-\ln(1-(-1))\quad\Leftrightarrow\quad 1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}-+\cdots=\underline{\underline{\ln 2}}.$$

Den alternerende harmoniske rekka konvergerer altså mot $\ln 2$.

Men vi trenger ikke å nøye oss med å derivere eller integrere rekker. Vi kan også multiplisere rekker med funksjoner av *x*. Resultatet finner du i ramma nedenfor:

Anta at rekka $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ konvergerer mot $f(x)$

når $x$ tilhører et konvergensintervall $\langle a-\rho,\, a+\rho \rangle$.

Da vil $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot g(x) \cdot (x-a)^k$ konvergerer mot $g(x) \cdot f(x)$

innenfor samme konvergensintervall.

***Eksempel 2.4.3:*** Finn summen av rekka nedenfor, med tilhørende konvergensintervall:

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^k .$$

Bruk resultatet til å finne summen (med konvergensintervall) av rekka

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3}x + \tfrac{3}{4}x^2 + \tfrac{4}{5}x^3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{k}{k+1} x^{k-1} .$$

*Løsning:* Fra Eksempel 2.4.1a har vi at

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{når } -1 < x < 1.$$

Multipliserer med $x$, og får

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^k = \underline{\underline{\frac{x}{(1-x)^2}}} \quad \text{når } -1 < x < 1.$$

Så integrerer jeg ledd for ledd, og får at

$$\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{3}{4}x^3 + \tfrac{4}{5}x^5 + \cdots = \int_0^x \frac{t}{(1-t)^2}\, dt .$$

Integralet løses med substitusjonen

$$1 - t = u \quad \Leftrightarrow \quad t = 1 - u \quad \Leftrightarrow \quad dt = -du .$$

Tilpasser grensene til den nye integrasjonsvariabelen, og får

$$\int_0^x \frac{t}{(1-t)^2}\, dt = \int_1^{1-x} \frac{1-u}{u^2}(-du) = \int_1^{1-x} \left( -\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u} \right) du = \left[ \frac{1}{u} + \ln|u| \right]_1^{1-x}$$

$$= \frac{1}{1-x} + \ln(1-x) - \frac{1}{1} - \ln 1 = \frac{1-(1-x)}{1-x} + \ln(1-x) = \underline{\frac{x}{1-x} + \ln(1-x)}$$

Vi samler trådene så langt, og ser at

$$\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{3}{4}x^4 + \tfrac{4}{5}x^5 + \cdots = \frac{x}{1-x} + \ln(1-x).$$

Nå gjenstår det bare å dele på $x^2$ :

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3}x + \tfrac{3}{4}x^2 + \tfrac{4}{5}x^3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{k}{k+1} x^{k-1} = \underline{\underline{\frac{1}{(1-x)x} + \frac{\ln(1-x)}{x^2}}} .$$

Til slutt må vi se på konvergensintervallet. Vi vet allerede at rekka konvergerer når $-1 < x < 1$. Men vi må også sjekke endepunktene. Da ser vi at når $x = \pm 1$, vil absoluttverdien av leddene i rekka gå mot 1 når $k \to \infty$ . Men vi vet at dersom ei rekke konvergerer, må absoluttverdien av leddene gå mot 0 når $k \to \infty$. Rekka konvergerer derfor ikke i endepunktene, slik at konvergensintervallet blir $\underline{\underline{-1 < x < 1}}$.

Oppgave 2.4.1.

En annen nyttig operasjon er å erstatte $x$ i en potensrekke med et annet uttrykk. Da får vi en ny rekke, som har en ny sum (egentlig: konvergerer mot en ny funksjon). Nedenfor ser du et par eksempler.

***Eksempel 2.4.4*** Sett opp potensrekker for

a) $f(x) = e^{-x}$.

b) $f(x) = \sin(2x)$.

*Løsning:*

a) Vi tar utgangspunkt i rekka for $e^x$:

$$e^x = 1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{4!}x^4 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!}x^k \ .$$

Så erstatter vi $x$ med $-x$, og får

$$e^{-x} = 1 + (-x) + \tfrac{1}{2!}(-x)^2 + \tfrac{1}{3!}(-x)^3 + \tfrac{1}{4!}(-x)^4 + \cdots$$

$$= 1 - x + \tfrac{1}{2!}x^2 - \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{4!}x^4 - \cdots = \underline{\underline{\sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^k}{k!}x^k}}$$

b) Vi tar utgangspunkt i rekka for $\sin x$:

$$\sin x = x - \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{5!}x^5 - \tfrac{1}{7!}x^7 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} \ .$$

Så erstatter vi $x$ med $2x$:

$$\sin(2x) = 2x - \tfrac{1}{3!}(2x)^3 + \tfrac{1}{5!}(2x)^5 - \tfrac{1}{7!}(2x)^7 + \cdots$$

$$= 2x - \tfrac{2^3}{3!}x^3 + \tfrac{2^5}{5!}x^5 - \tfrac{2^7}{7!}x^7 + \cdots = \underline{\underline{\sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^k \cdot 2^{2k+1}}{(2k+1)!}x^{2k+1}}}$$

Oppgave 2.4.2.

Noen ganger lønner det seg å være litt mer omstendelig når vi erstatter $x$ med et annet uttrykk, noe neste eksempel viser.

***Eksempel 2.4.5:*** Finn ei potensrekke for $\ln x$ med tilhørende konvergensintervall.

*Løsning:* Vi går tilbake til Eksempel 2.4.1b, der vi fant at

$$x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{4}x^4 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k} \cdot x^k = -\ln(1-x) \ \text{ når } -1 \le x < 1.$$

Vi starter med å bytte ut $x$ med $u$ samtidig som vi skifter fortegn:

$$\ln(1-u) = -u - \tfrac{1}{2}u^2 - \tfrac{1}{3}u^3 - \tfrac{1}{4}u^4 - \cdots = -\sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k} \cdot u^k \quad \text{når } -1 \le u < 1.$$

Så setter vi

$$1 - u = x \quad \Leftrightarrow \quad u = 1 - x = -(x-1),$$

og får

$$\ln x = -\left(-(x-1)\right) - \tfrac{1}{2}\left(-(x-1)\right)^2 - \tfrac{1}{3}\left(-(x-1)\right)^3 - \tfrac{1}{4}\left(-(x-1)\right)^4 - \cdots$$

$$= (x-1) - \tfrac{1}{2}(x-1)^2 + \tfrac{1}{3}(x-1)^3 - \tfrac{1}{4}(x-1)^4 + \cdots = \underline{\underline{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k}}$$

Dette er en potensrekke i $(x-1)$. Finner konvergensintervallet:

$$-1 \le u < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \le 1 - x < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \le -x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{0 < x \le 2}}.$$

Det fins mange flere setninger om potensrekker. Vi kan bl.a. multiplisere potensrekker:

Anta at rekka $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ konvergerer mot $f(x)$ når $x$ tilhører et konvergensintervall $\langle a - \rho_1, a + \rho_1 \rangle$,

og at rekka $\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-a)^k$ konvergerer mot $g(x)$ når $x$ tilhører et konvergensintervall $\langle a - \rho_2, a + \rho_2 \rangle$.

Da vil

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k (x-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-a)^k$$

konvergere mot $f(x) \cdot g(x)$, og konvergensradien er $\rho = \text{Min}(\rho_1, \rho_2)$.

Til slutt en setning om entydighet av potensrekker:

To potensrekker $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ og $\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-a)^k$ med samme konvergens-intervall $\langle a - \rho, a + \rho \rangle$ konvergerer mot samme funksjon $f(x)$

$$\Updownarrow$$

$c_k = b_k$ for alle $k = 0, 1, 2, \cdots$

Nå gjenstår bare hovedproblemet: Hvordan finner vi potensrekka til en vilkårlig funksjon $f(x)$? Dette problemet skal vi ta opp i neste avsnitt.

# *2.5. Taylor-rekker.*

## 2.5.1. Utledning av Taylor-rekker.

Innledningsvis satte jeg opp tre potensrekker som jeg påsto konvergerer mot henholdsvis $e^x$, $\cos x$ og $\sin x$. Nå skal jeg vise hvordan disse rekkene framkommer.

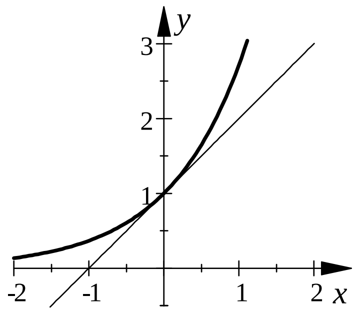
For å komme på sporet av hvordan vi utleder disse rekkene, kan vi se litt på de første partialsummene i rekka for $e^x$. Du husker sikkert at i innledningen påsto jeg at

$$e^x = 1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{4!}x^4 + \cdots.$$

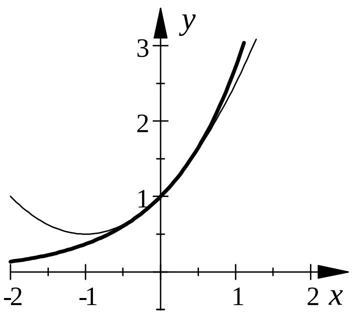
La oss bruke skrivemåten $T_n(x)$ for den *n*’te partialsumen av denne rekka, slik at

$$T_2(x) = 1 + x, \qquad T_3(x) = 1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2, \qquad T_4(x) = 1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3.$$

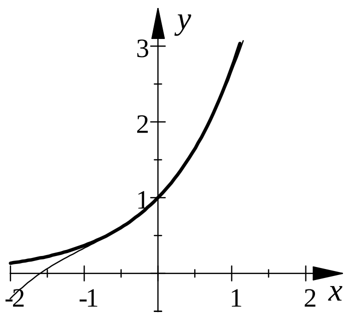
Nedenfor finner du grafene av disse partialsummene (tynn strek) sammen grafen for $e^x$ (tykk strek):




$T_2(x) = 1 + x$




$T_3(x) = 1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2$




$T_4(x) = 1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3$

Du ser at $T_2(x) = 1 + x$ er tangent til grafen til $e^x$ når $x = 0$.
Grafen til $T_3(x) = 1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2$ tangerer også grafen til $e^x$ når $x = 0$, og de to grafene ser også ut til å ha samme krumning nær $x = 0$.
Grafen til $T_4(x) = 1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3$ ligger enda tettere inn til grafen til $e^x$ nær $x = 0$.

Disse egenskapene kan tyde på at for alle partialsummene der $n \geq 3$ er:

$f(0) = T_n(0)$ fordi grafene faller sammen når $x = 0$.
$f'(0) = T_n'(0)$ fordi grafene har samme stigningstall når $x = 0$.
$f''(0) = T_n''(0)$ fordi grafene ser ut til å ha samme krumning nær $x = 0$.

Nå har vi funnet en ende som vi kan nøste videre på. Enn om vi bygger opp en partialsum ved å kreve at partialsummen skal være lik funksjonsverdien når $x = 0$, og at alle de deriverte av partialsummen skal være lik den tilsvarende deriverte av funksjonen når $x = 0$? Hvis vi er heldige (og dyktige), kan vi kanskje finne et system slik at partialsummen etter hvert får uendelig mange ledd. Da går den over til å bli en uendelig rekke. Og hvis vi er enda heldigere, vil denne rekka konvergere mot den funksjonen som vi gikk ut fra, i alle fall når *x* ligger innenfor et konvergensintervall.

Men vi trenger jo ikke å bygge opp partialsummen rundt $x = 0$. Vi kan heller bygge opp partialsummen rundt en vilkårlig verdi $x = a$. En slik partialsum med $n$ ledd kalles et ***Taylor-polynom*** rundt $x = a$, og skrives $T_n^a(x)$.

Vi ønsker altså å finne koeffisientene $c_0$, $c_1$, $c_2$ osv. i ei rekke

$$T_n^a(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \cdots + c_n(x-a)^n.$$

(Denne rekka har egentlig $n+1$ ledd, men det bryr vi oss ikke om nå.)

Vi deriverer, og får

$$\frac{d}{dx}T_n^a(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots + n\cdot c_n(x-a)^{n-1}.$$

$$\frac{d^2}{dx^2}T_n^a(x) = 2c_2 + 3\cdot 2c_3(x-a) + 4\cdot 3c_4(x-a)^2 + \cdots + n(n-1)\cdot c_n(x-a)^{n-2}.$$

$$\frac{d^3}{dx^3}T_n^a(x) = 3\cdot 2c_3 + 4\cdot 3\cdot 2(x-a) + \cdots + n(n-1)(n-2)\cdot c_n(x-a)^{n-3}.$$

Og slik fortsetter det.

Så skal kravene våre oppfylles:

$$T_n^a(a) = f(a) \quad\Leftrightarrow\quad c_0 = f(a).$$

$$\frac{d}{dx}T_n^a(a) = \frac{d}{dx}f(a) \quad\Leftrightarrow\quad c_1 = \frac{d}{dx}f(a).$$

$$\frac{d^2}{dx^2}T_n^a(a) = \frac{d^2}{dx^2}f(a) \quad\Leftrightarrow\quad 2c_2 = \frac{d^2}{dx^2}f(a) \quad\Leftrightarrow\quad c_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2}{dx^2}f(a).$$

$$\frac{d^3}{dx^3}T_n^a(a) = \frac{d^3}{dx^3}f(a) \quad\Leftrightarrow\quad 3\cdot 2c_3 = \frac{d^3}{dx^3}f(a) \quad\Leftrightarrow\quad c_3 = \frac{1}{3\cdot 2}\cdot\frac{d^3}{dx^3}f(a).$$

Og slik fortsetter det. Du innser sikkert at vi ender opp med den generelle formelen

$$c_k = \frac{1}{k!}\cdot\frac{d^k}{dx^k}f(a).$$

Nå er vi faktisk i mål. Den rekka som framkommer, kalles ***Taylor-polynomet av n'te grad for f(x) om (x – a)***. Vi summerer opp:

Gitt en funksjon $f(x)$ som er $n$ ganger deriverbar i et intervall,
og et punkt $x = a$ i dette intervallet.
***Taylor-polynomet av n'te grad*** for $f(x)$ rundt $x = a$ er

$$T_n^a(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x-a)^k = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n$$

der

$$c_k = \frac{1}{k!}\cdot\frac{d^k}{dx^k}f(a),\ k = 0, 1, 2, \cdots, n.$$

Nå er det veldig fristende å la $n \to \infty$. Den potensrekka som da framkommer, kalles ***Taylor-rekka for f(x) om (x – a)***. Men det gjenstår et stort og viktig problem: Kan vi være sikre på at denne Taylor-rekka konvergerer mot den funksjonen $f(x)$ som vi gikk ut fra? Eller en mer forsiktig formulering: fins det et intervall for *x* slik at Taylor-rekka konvergerer mot $f(x)$? Svaret på dette problemet ligger i en setning som kalles ***Taylors setning***, og som vi ikke skal bevise:

Gitt en funksjon $f(x)$ som er $n+1$ ganger deriverbar i et intervall, og et punkt $x=a$ i dette intervallet. La

$$T_n^a(x)=\sum_{k=0}^{n}c_k(x-a)^k$$

være Taylor-polynomet av *n*'te grad for $f(x)$ rundt $x=a$. Da er

$$f(x)=T_n^a(x)+R_n(x)$$

der

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

og *c* er et tall mellom *a* og *x*.

Det sentrale i denne setningen er at $f(x)$ *er lik* Taylor-polynomet pluss et stygt ledd

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

som kalles *restleddet i Taylors setning*. Dersom vi kan vise at dette restleddet går mot 0 når $n \to \infty$, har vi faktisk vist at Taylor-rekka *er lik* $f(x)$. Men dette kan være problematisk, ikke minst fordi restledd-formelen inneholder en ukjent størrelse *c*. Det eneste vi vet om *c* er at den ligger mellom *a* og *x*. I praksis koster vi helst restledd-formelen under teppet, og tar sjansen på at dersom Taylor-rekka konvergerer, så konvergerer den mot $f(x)$. Denne konvergensen undersøker vi med forholdstesten, som også gir oss konvergensintervallet.

En liten merknad til slutt: Svært ofte setter vi opp Taylor-polynom og Taylor-rekker rundt $x=0$. Slike polynom og rekker rundt $x=0$ kalles ***Maclaurin-polynom*** og ***Maclaurin-rekker.*** De rekkene jeg har presentert for $e^x$, $\cos x$ og $\sin x$ er egentlig Maclaurin-rekker.

Nå er det på tide å vise at de rekkene vi satte opp i innledningen for $e^x$, $\cos x$ og $\sin x$ virkelig stemmer. Vi skal gjøre det ved å sette opp Macaurin-polynom, la $n \to \infty$, og til slutt undersøke konvergensen med forholdskriteriet.

***Eksempel 2.5.1:*** Sett opp Maclaurin-rekka for

a) $f(x)=e^x$.

b) $f(x)=\sin x$.

c) $f(x)=\cos x$.

Undersøk konvergensen for disse rekkene.

*Løsning:* Som regel lønner det seg å starte med å derivere $f(x)$ mange ganger, og se om vi finner et system. Deretter setter vi inn $x=0$ (husk at vi skal finne Maclaurin-rekker), og finner koeffisientene i rekka med formelen

$$c_k = \frac{1}{k!}\cdot\frac{d^k}{dx^k}f(0).$$

a) $$f(x)=e^x \quad\Leftrightarrow\quad \frac{d}{dx}f(x)=e^x \quad\Leftrightarrow\quad \frac{d^2}{dx^2}f(x)=e^x \quad\Leftrightarrow\quad \cdots \quad\Leftrightarrow\quad \frac{d^k}{dx^k}f(x)=e^x.$$

Da blir

$$c_0=\frac{1}{0!}\cdot f(0)=\frac{1}{1}\cdot e^0=1. \qquad c_1=\frac{1}{1!}\cdot\frac{d}{dx}f(0)=\frac{1}{1}\cdot e^0=1.$$

$$c_2=\frac{1}{2!}\cdot\frac{d^2}{dx^2}f(0)=\frac{1}{2!}\cdot e^0=\frac{1}{2!}. \qquad c_3=\frac{1}{3!}\cdot\frac{d^3}{dx^3}f(0)=\frac{1}{3!}\cdot e^0=\frac{1}{3!}.$$

Og generelt:

$$c_k=\frac{1}{k!}\cdot\frac{d^k}{dx^k}f(0)=\frac{1}{k!}\cdot e^0=\frac{1}{k!}.$$

Da blir rekka

$$\begin{aligned} e^x &= c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\cdots+c_kx^k+\cdots \\ &= 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{k!}x^k+\cdots=\underline{\underline{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k}} \end{aligned}$$

Undersøker konvergensen med forholdstesten:

$$L=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(k+1)!}x^{k+1}}{\frac{1}{k!}x^k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\frac{k!}{x^k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{k!}{k!\cdot(k+1)}x\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k+1}\cdot|x|.$$

Men denne grenseverdien går mot null når $k\to\infty$. Da er $L<1$ for alle verdier av *x*, slik at rekka konvergerer for alle *x*.

b) $$f(x)=\sin x \quad\Leftrightarrow\quad \frac{d}{dx}f(x)=\cos x \quad\Leftrightarrow\quad \frac{d^2}{dx^2}f(x)=-\sin x \quad\Leftrightarrow\quad \frac{d^3}{dx^3}f(x)=-\cos x$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{d^4}{dx^4}f(x)=\sin x \quad\Leftrightarrow\quad \frac{d^5}{dx^5}f(x)=\cos x \quad\Leftrightarrow\quad \frac{d^6}{dx^6}f(x)=-\sin x \quad\Leftrightarrow\quad \cdots$$

Og slik fortsetter det. Vi ser at det samme mønsteret vil gjenta seg. Da får vi at:

$$c_0=\frac{1}{0!}\cdot f(0)=\frac{1}{1}\cdot\sin 0=0. \qquad c_4=\frac{1}{4!}\cdot\frac{d^4}{dx^4}f(0)=\frac{1}{4!}\cdot\sin 0=0.$$

$$c_1=\frac{1}{1!}\cdot\frac{d}{dx}f(0)=\frac{1}{1}\cdot\cos 0=1. \qquad c_5=\frac{1}{5!}\cdot\frac{d^5}{dx^5}f(0)=\frac{1}{5!}\cdot\cos 0=\frac{1}{5!}.$$

$$c_2=\frac{1}{2!}\cdot\frac{d^2}{dx^2}f(0)=\frac{1}{2!}\cdot(-\sin 0)=0. \qquad c_6=\frac{1}{6!}\cdot\frac{d^6}{dx^6}f(0)=\frac{1}{6!}\cdot(-\sin 0)=0.$$

$$c_3=\frac{1}{3!}\cdot\frac{d^3}{dx^3}f(0)=\frac{1}{3!}\cdot(-\cos 0)=-\frac{1}{3!}. \qquad c_7=\frac{1}{7!}\cdot\frac{d^7}{dx^7}f(0)=\frac{1}{7!}\cdot(-\cos 0)=-\frac{1}{7!}.$$

Vi ser at annenhver koeffisient blir lik null. De gjenværende koeffisientene får alternerende fortegn, med absoluttverdi $\frac{1}{k!}$. Maclaurin-rekka blir da

$$\sin x = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots + c_k x^k + \cdots$$

$$= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \cdots = \underline{\underline{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}}}$$

Så var det konvergensen. Merk at fortegnet til leddene ikke spiller noen rolle på grunn av absoluttverditegnene:

$$L = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\left(\frac{(-1)^{k+1}}{(2(k+1)+1)!}\right)x^{2(k+1)+1}}{\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!}\cdot\frac{(2k+1)!}{x^{2k+1}}\right|$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(2k+1)!}{(2k+1)!\,(2k+2)(2k+3)}x^2\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{(2k+2)(2k+3)}\cdot x^2$$

Men denne grenseverdien går mot null når $k\to\infty$. Da er $L<1$ for alle verdier av *x*, slik at rekka konvergerer for alle *x*.

c) Her kan vi gå fram på samme måte som da vi utledet rekka for $\sin x$. Men det er lettere å benytte at $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$. Vi deriverer derfor Maclaurin-rekka for $\sin x$, og får

$$\cos x = 1 - \frac{1}{3!}\cdot 3x^2 + \frac{1}{5!}\cdot 5x^4 - \frac{1}{7!}\cdot 7x^6 + \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(2k+1)x^{2k} + \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$$

Denne rekka får samme konvergensintervall som rekka for $\sin x$, d.v.s. at rekka konvergerer for alle *x*.

Vi utleder ei rekke til:

***Eksempel 2.5.2:*** Sett opp Taylor-rekka til $f(x) = \ln x$ rundt $x = 1$, og undersøk konvergensen for denne rekka.

*Løsning:* Vi går fram på samme måte som før:

$$f(x) = \ln x \quad\Leftrightarrow\quad \frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{d^2}{dx^2}f(x) = -x^{-2} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{d^3}{dx^3}f(x) = -(-2)x^{-3}$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{d^4}{dx^4}f(x) = -(-2)(-3)x^{-4} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{d^5}{dx^5}f(x) = -(-2)(-3)(-4)x^{-5}$$

$$\Leftrightarrow\quad \cdots \quad\Leftrightarrow\quad \frac{d^k}{dx^k}f(x) = (-1)(-2)\cdots(-(k-1))x^{-k} = (-1)^{k-1}(k-1)!\,x^{-k}$$

Da blir (husk at nå er $a = 1$):

$$c_0 = \frac{1}{0!}\cdot f(1) = \frac{1}{1}\cdot\ln 1 = 0. \qquad c_1 = \frac{1}{1!}\cdot\frac{d}{dx}f(1) = \frac{1}{1}\cdot 1^{-1} = 1.$$

$$c_2 = \frac{1}{2!}\cdot\frac{d^2}{dx^2}f(1) = \frac{1}{2!}\cdot(-1)\cdot 1^{-2} = -\frac{1}{2}. \qquad c_3 = \frac{1}{3!}\cdot\frac{d^3}{dx^3}f(1) = \frac{1}{3!}\cdot 2\cdot 1^{-3} = \frac{1}{3}.$$

$$c_4 = \frac{1}{4!}\cdot\frac{d^4}{dx^4}f(1) = \frac{1}{4!}\cdot(-1)(-2)(-3)\cdot 1^{-4} = -\frac{1}{4}.$$

Og generelt:

$$c_k = \frac{1}{k!}\cdot\frac{d^k}{dx^k}f(1) = \frac{1}{k!}\cdot(-1)^{k-1}(k-1)!\cdot 1^{-k} = \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Da blir rekka

$$\ln x = c_0 + c_1(x-1) + c_2(x-1)^2 + c_3(x-1)^3 + \cdots + c_k(x-1)^k + \cdots$$

$$= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k + \cdots = \underline{\underline{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k}}$$

Undersøker konvergensen med forholdstesten:

$$L = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{(k+1)-1}}{k+1}(x-1)^{k+1}}{\frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(x-1)^{k+1}}{k+1}\cdot\frac{k}{(x-1)^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k}{k+1}(x-1)\right|$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{k}}\cdot|x-1| = \frac{1}{1+0}\cdot|x-1| = \underline{|x-1|}$$

Rekka konvergerer når

$$L<1 \quad\Leftrightarrow\quad |x-1|<1 \quad\Leftrightarrow\quad -1<x-1<1 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{0<x<2}.$$

Må også sjekke endepunktene:

$x=0$: Rekka blir

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(0-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1-k}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{-1}}{k} = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}.$$

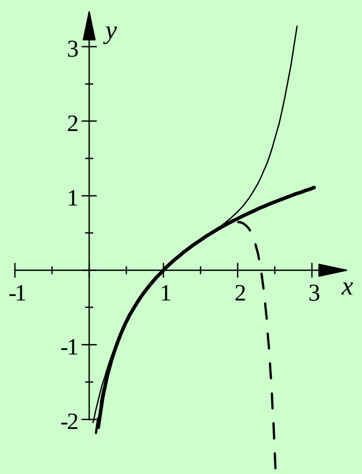
Men denne summen er den harmoniske rekka som vi vet divergerer.

$x=2$: Rekka blir

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(2-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\cdot 1^k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Her har vi den alternerende harmoniske rekka (riktignok med negativt fortegn) som vi vet konvergerer.

Altså konvergerer rekka når $\underline{\underline{0<x\le 2}}$.




Det kan være instruktivt å plotte grafen til $\ln x$ sammen med noen av partialsummene til Taylor-rekka. På figuren til venstre er grafen til $\ln x$ plottet med tykk strek, mens summen av de 5 første leddene i rekka er plottet med tynn strek og summen av de 10 første leddene er plottet med stiplet linje. Vi ser hvordan disse partialsummene kommer nærmere inn mot grafen til $\ln x$ når antall ledd øker, forutsatt at vi befinner oss innenfor konvergensintervallet. Går vi utenfor konvergensintervallet, vil rekka absolutt ikke konvergere mot $\ln x$.

Ta forresten et lite tilbakeblikk på Eksempel 2.4.5. Der utledet vi den samme rekka med det samme konvergensintervallet på en annen måte.

**Oppgave 2.5.1.**

I neste eksempel skal vi sette opp en Maclaurin-rekke som kalles ***den binomiske rekka***:

***Eksempel 2.5.3:*** Sett opp Maclaurin-rekka for

$$f(x) = (1+x)^m .$$

*Løsning:* Vi går fram etter kjent mønster:

$$f(x) = (1+x)^m \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx} f(x) = m(1+x)^{m-1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2}{dx^2} f(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d^3}{dx^3} f(x) = m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3} \quad \Leftrightarrow \quad \cdots$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d^k}{dx^k} f(x) = m(m-1)\cdots(m-(k-1))(1+x)^{m-k}$$

Da blir:

$$c_0 = f(0) = (1+0)^m = 1.$$

$$c_1 = \frac{1}{1!}\frac{d}{dx} f(0) = m(1+0)^{m-1} = m.$$

$$c_2 = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dx^2} f(0) = \frac{1}{2!} m(m-1)(1+0)^{m-2} = \frac{1}{2!} m(m-1).$$

$$c_3 = \frac{1}{3!}\frac{d^3}{dx^3} f(0) = \frac{1}{3!} m(m-1)(m-2)(1+0)^{m-3} = \frac{1}{3!} m(m-1)(m-2).$$

Og slik fortsetter vi. Du ser at

$$c_k = \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k}{dx^k} f(0) = \frac{1}{k!} \cdot m(m-1)\cdots(m-(k-1))(1+0)^{m-k} = \frac{m(m-1)\cdots(m-(k-1))}{k!}.$$

Hele rekka blir

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$\underline{\underline{= 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!} x^k}}$$

Vi skal hoppe over undersøkelsen av konvergens. Men vi kan vise at konvergensintervallet er $-1 < x < 1$.

Merk at dersom *m* er et helt, positivt tall, vil rekka få et endelig antall ledd. Hvis for eksempel $m = 3$, får vi at

$$(1+x)^3 = 1 + 3x + \frac{3 \cdot 2}{2!}x^2 + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3!}x^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

som du (forhåpentlig) kjenner fra før. Alle etterfølgende ledd får koeffisient lik null.

Nedenfor ser du et eksempel på bruken av den binomiske rekka:

***Eksempel 2.5.4*:** Sett opp Maclaurin-rekka for

$$f(x)=\sqrt{4-x^2}\ .$$

*Løsning*: Vi starter med en omskrivning:

$$f(x)=\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{1-\tfrac{x^2}{4}}=2\sqrt{1-\left(\tfrac{x}{2}\right)^2}=2\left(1-\left(\tfrac{x}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Hvis vi nå setter $m=\frac{1}{2}$ og erstatter $x$ med $-\left(\frac{x}{2}\right)^2$, kan vi bruke den binomiske rekka:

$$\begin{aligned}\sqrt{4-x^2}&=2\left(1-\left(\tfrac{x}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\\&=2\left(1+\tfrac{1}{2}\left(-\left(\tfrac{x}{2}\right)^2\right)+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\left(-\left(\tfrac{x}{2}\right)^2\right)^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}\left(-\left(\tfrac{x}{2}\right)^2\right)^3+\cdots\right)\\&=2\left(1-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{128}x^4-\frac{1}{1024}x^6-\cdots\right)=\underline{\underline{2-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{64}x^4-\frac{1}{512}x^6+\cdots}}\end{aligned}$$

Rekka konvergerer når

$$-1<-\left(\tfrac{x}{2}\right)^2<1\quad\Leftrightarrow\quad 1>\tfrac{x^2}{4}>0\quad\Leftrightarrow\quad 4>x^2>0\quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{-2<x<2}}.$$

## 2.5.2. Oppsummering.

Nå er det på tide å oppsummere de viktigste av de rekkene vi har funnet.

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k\qquad\text{for alle } x$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}\qquad\text{for alle } x$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}\qquad\text{for alle } x$$

$$\ln x=(x-1)-\tfrac{1}{2}(x-1)^2+\tfrac{1}{3}(x-1)^3-\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k\qquad\text{for } 0<x\le 2$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}x^k\qquad\text{for } -1<x<1$$

$$\begin{aligned}(1+x)^m&=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\cdots\\&=1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!}x^k\qquad\text{for } -1<x<1\end{aligned}$$

Jeg forventer ikke at du går rundt og husker alle disse rekkene. Men jeg forventer at du vet at de eksisterer, og at du kan finne dem fram etter behov. Husk også at vi kan finne mange nye rekker på grunnlag av disse. Vi kan integrere rekkene, derivere dem, erstatte *x* med andre uttrykk, multiplisere rekkene med funksjoner av *x*, osv. slik vi gjorde i innledningen.

## *2.6. Anvendelser av potensrekker.*

Innledningsvis så vi på et par anvendelser av potensrekker. Vi skal avslutte med å se på noen flere anvendelser. Vær klar over at det fins utrolig mange andre anvendelser enn de vi kommer inn på her. Potensrekker dukker ofte opp i statistikk, fysikk, mekanikk osv, så jeg vil anbefale at du kjenner disse rekkene og disse anvendelsene.

Jeg har ikke lagt inn "småoppgaver" i dette kapitlet. Men nå kan du nok til gå løs på de blandede oppgavene som omhandler slike rekker. Der vil du finne mange eksempler på anvendelser av slike rekker.

### 2.6.1. Numerisk beregning av bestemt integral.

Vi så i innledningen et eksempel på hvordan vi kan bruke rekker til å beregne et bestemt integral. Men vi tar et eksempel til.

***Eksempel 2.6.1:*** Innenfor statistikk benytter vi ofte *normalfordelingen*, som fører til at vi må beregne integral av typen

$$\int_0^t e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx .$$

I dette eksemplet setter vi $t=1$, slik at vi skal beregne det bestemte integralet

$$\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx .$$

*Løsning*: Vi tar utgangspunkt i rekka for $e^x$:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$$

Erstatter $x$ med $-\frac{1}{2}x^2$ og får:

$$e^{-\frac{1}{2}x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(-\tfrac{1}{2}x^2\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k\cdot k!}x^{2k} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2^2\cdot 2!}x^4 - \frac{1}{2^3\cdot 3!}x^6 + \frac{1}{2^4\cdot 4!}x^8 - \cdots$$

Integrerer:

$$\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \int_0^1\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2^2\cdot 2!}x^4 - \frac{1}{2^3\cdot 3!}x^6 + \cdots\right)dx$$

$$= \left[x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2^2\cdot 2!}\cdot\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2^3\cdot 3!}\cdot\frac{1}{7}x^7 + \cdots\right]_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2^2\cdot 2!}\cdot\frac{1}{5} - \frac{1}{2^3\cdot 3!}\cdot\frac{1}{7} + \cdots \approx \underline{\underline{0.855}}$$

Siden rekka for $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ er ei alternerende rekke, er feilen vi gjør ved å avbryte rekka mindre enn absoluttverdien av det første leddet vi sløyfer. Feilen ved vår verdi av integralet er da mindre enn

$$\int_0^1 \frac{1}{2^4\cdot 4!}x^8\,dx = \left[\frac{1}{2^4\cdot 4!}\cdot\frac{1}{9}x^9\right]_0^1 = \underline{\frac{1}{3456}} \approx \underline{0.0003}.$$

Nøyaktigheten er altså god nok for alle praktiske formål.

## 2.6.2. Forenkling av kompliserte uttrykk.

I praktisk arbeid kommer vi ofte ut for uttrykk som er temmelig kompliserte. Da kan det være nyttig å erstatte disse med andre uttrykk som er *nesten* riktige, men som er atskillig enklere å arbeide med. Nedenfor ser du et kjent eksempel:

***Eksempel 2.6.2***: Innenfor relativitetsteorien er kinetiske energi gitt ved formelen

$$W = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}-1\right)$$

der $m_0$ er massen til legemet når det er i ro, $v$ er legemets fart, og $c$ er lysfarten.
Vis at dette uttrykket er tilnærmet lik

$$W = \tfrac{1}{2}m_0v^2$$

når $v << c$.

*Løsning*: Vi benytter formelen for binomisk rekke med $m=-\frac{1}{2}$, og erstatter $x$ med $-\left(\frac{v}{c}\right)^2$. Da får vi:

$$W = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}-1\right) = m_0c^2\left(\left(1-\left(\tfrac{v}{c}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}-1\right)$$

$$= m_0c^2\left(1+\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\left(\tfrac{v}{c}\right)^2\right)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)}{2!}\cdot\left(-\left(\tfrac{v}{c}\right)^2\right)^2+\cdots-1\right)$$

$$= m_0c^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{c^2}+\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4}+\cdots\right) = m_0v^2\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\frac{v^2}{c^2}+\cdots\right)\approx \underline{\underline{\frac{1}{2}m_0v^2}}$$

fordi de resterende leddene inneholder faktoren $\frac{v^2}{c^2}$ som er forsvinnende liten når $v << c$.

## 2.6.3. Bestemmelse av grenseverdier.

Du vet forhåpentlig hvordan du kan finne grenseverdier ved hjelp av L'Hôpitals regel. Men noen ganger er det lettere å bruke kjente Taylor-rekker. Teknikken illustreres i eksemplet nedenfor. Med litt trening går det mye fortere å se løsningen enn å skrive den ned.

***Eksempel 2.6.3:*** Finn

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin x}{1-\cos x}.$$

*Løsning:* Setter inn rekkene for $\sin x$ og $\cos x$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots\right)}{1-\left(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{1}{3!}x^4+\frac{1}{5!}x^6-\cdots}{\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{4!}x^4+\cdots}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{5!}x^4-\cdots}{\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}x^2+\cdots} = \frac{1-0+0-\cdots}{\frac{1}{2}-0+\cdots} = \underline{\underline{2}}$$

### 2.6.4. Løsing av differensiallikninger.

Uansett hvor flink du er til å løse differensiallikninger, vil du før eller senere råke ut for likninger som ikke lar seg løse eksakt. Da kan det være lurt å anta at løsningen kan skrives som ei potensrekke, og gå på jakt etter leddene i denne rekka. Vi skal ikke fordype oss i teori, men heller illustrere teknikken med et par eksempler.

***Eksempel 2.6.4:*** Finn ei potensrekke som er løsningen av disse differensiallikningene:

a) $y' + x\cdot y = 1, \quad y(0) = 1.$

b) $y' + x\cdot y = e^x, \quad y(0) = 0.$

*Løsning:* Vi antar at løsningen kan skrives som ei potensrekke rundt $a = 0$:

$$y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \cdots$$

Da blir

$$y'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \cdots.$$

Så setter vi inn i differensiallikningen:

a) Når $y(0) = 1$, ser vi direkte at $c_0 = 1$. Innsetting gir:

$$\left(c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \cdots\right) + x\left(1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \cdots\right) = 1$$

$$c_1 + (2c_2 + 1)x + (3c_3 + c_1)x^2 + (4c_4 + c_2)x^3 + \cdots = 1$$

Denne likheten skal være oppfylt for *alle* verdier av *x*. Da må vi ha:

$$c_1 = 1.$$

$$2c_2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_2 = -\tfrac{1}{2}.$$

$$3c_3 + c_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_3 = -\tfrac{1}{3}c_1 = -\tfrac{1}{3}\cdot 1 = -\tfrac{1}{3}.$$

$$4c_4 + c_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_4 = -\tfrac{1}{4}c_2 = -\tfrac{1}{4}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{8}.$$

Slik kan vi fortsette. De første leddene i rekka blir derfor

$$\underline{\underline{y(x) = 1 + x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{8}x^4 + \cdots.}}$$

Du ser sikkert at vi får sammenhengen

$$n\cdot c_n + c_{n-2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_n = -\tfrac{1}{n}c_{n-2} \text{ når } n = 2, 3, 4, \cdots.$$

Siden vi vet at $c_0 = c_1 = 1$, kan vi nå sette opp formler for $c_n$. Vi skal ikke gjøre dette, men bare nevne at når vi har slike formler for $c_n$, kan vi også undersøke konvergensen av den uendelige rekka som framkommer.

b) Når $y(0) = 0$, ser vi direkte at $c_0 = 0$. Dessuten må vi benytte rekka for $e^x$:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$$

Innsetting gir:

$$\left(c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \cdots\right) + x\left(c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \cdots\right)$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$$

$$c_1 + 2c_2 x + (3c_3 + c_1)x^2 + (4c_4 + c_2)x^3 + \cdots = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$$

Denne likheten skal være oppfylt for *alle* verdier av $x$. Da må vi ha:

$c_1 = 1$.

$2c_2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad c_2 = \frac{1}{2}$.

$3c_3 + c_1 = \frac{1}{2!} \quad \Leftrightarrow \quad c_3 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2!} - c_1\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{1}{6}$.

$4c_4 + c_2 = \frac{1}{3!} \quad \Leftrightarrow \quad c_4 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3!} - c_2\right) = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12}$.

Slik kan vi fortsette. De første leddene i rekka blir derfor

$$y(x) = \underline{\underline{x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \cdots}}.$$

Også her er det mulig å sette opp en formel for $c_n$ slik at vi kan undersøke konvergensen for den uendelige rekka.

Dersom vi kun er interessert i hvordan løsningen av likningene i eksemplet oppfører seg når $|x| << 1$, vil de løsningene som er funnet ovenfor ofte være tilstrekkelige. Men for å få en fullstendig og pålitelig løsning, bør vi undersøke konvergensen av rekka. Vi skal ikke komme inn på slike problem i denne lille innføringen. Vi skal heller ikke vurdere om det i det hele tatt er mulig å finne potensrekker som løser differensiallikningen.

# 3. Fourier-rekker.

## *3.1. Introduksjon til Fourier-rekker.*

Du klarer sikkert å høre forskjell på en tone spilt på fiolin og den samme tonen spilt på fløyte. Grunnen er at en tone spilt på et musikkinstrument er utstyrt med ”overtoner”, d.v.s. toner med høyere frekvens enn grunntonen. Og toner spilt på ulike instrumenter har ulike overtoner. Dermed klinger tonene ulikt selv om det er samme tone som spilles.

Når en ingeniør skal legge linjer for å overføre data fra et måleinstrument til en kontrollpult, må han ta hensyn til at dataene kan bli utsatt for støy. Det kan da bli nødvendig å lage støyfilter. Slike filtre kan dempe signaler innen et bestemt frekvensområde.

Innen datateknologi er det mye snakk om ”bredband”. Og ei bredbandslinje er kort og godt ei linje som kan overføre data med høy frekvens. For å kunne utnytte slike linjer maksimalt, er det viktig å forstå hvordan datasignal kan tenkes bygd opp av signaler med ulik frekvens.

Alle disse tre situasjonene (og en mengde andre situasjoner) har en ting til felles: begrepet ”frekvens”. Mer presist tar alle eksemplene utgangspunkt i at et signal kan tenkes bygd opp av andre signaler med ulik frekvens.

Vi skal nå se på den matematiske behandlingen av slike signaler. Alt fra midten av 1700-tallet hadde enkelte matematikere mistanke om at visse typer funksjoner kunne bygges opp som uendelige rekker av sinus- og cosinus-ledd med ulike frekvenser. Men noen av tidens største navn var skeptiske til ideen, så det tok lang tid før den slo gjennom. Og det var matematikeren og politikeren *Jean Baptiste Joseph Fourier* som gjorde grovarbeidet. I 1807 presenterte han et arbeid der han framstilte *periodiske* funksjoner ved hjelp av slike rekker. Men det tok fremdeles et par tiår og mye arbeid før disse ***Fourier-rekkene*** ble alminnelig anerkjent. I mellomtiden hadde Fourier generalisert sine teknikker slik at også *ikke-periodiske* funksjoner kunne bygges opp av sinus- og cosinus-ledd. I dag gjøres dette ved hjelp av ***Fourier-transformen***, som vi så vidt skal stifte bekjentskap med helt til slutt.

## *3.2. Periodiske funksjoner.*

Som nevnt ovenfor begrenset man seg i første omgang til *periodiske* signaler som ble framstilt ved hjelp av rekker bestående av sinus- og cosinus-ledd (Fourier-rekker). La oss derfor starte med å gi en formell definisjon av en *periodisk* funksjon:

En funksjon $f$ er periodisk med periode $p$
$\Updownarrow$ def.
$$f(t+p) = f(t)$$

I definisjonen ovenfor bruker jeg $t$ som symbol for den fri variable fordi de funksjonene vi skal omtale ofte er funksjoner av tiden $t$. Det er også vanlig å bruke $x$ som symbol for den fri variable når vi har funksjoner av en posisjon $x$.

***Eksempel 3.2.1:*** Vis at funksjonen

$$f(t)=\sin(2t)$$

er periodisk med periode $p=\pi$.

*Løsning*: Når perioden $p=\pi$, blir

$$f(t+p)=\sin(2(t+\pi))=\sin(2t+2\pi)=\sin(2t)=f(t).$$

De periodiske funksjonene som vi etter hvert skal finne Fourier-rekka til, tar ofte utgangspunkt i en funksjon som er definer over et begrenset intervall. Deretter oppgis det at denne funksjonen gjentas periodisk. Definisjonen av en slik periodisk funksjon kan da se slik ut:

$$f(t)=g(t) \text{ når } 0<t<p, \qquad f(t+p)=f(t)$$

eller

$$f(t)=g(t) \text{ når } -\tfrac{1}{2}p<t<\tfrac{1}{2}p, \quad f(t+p)=f(t).$$

Når du skal tegne grafen til slike periodiske funksjoner, starter du alltid med å tegne grafen til $g(t)$ innenfor det oppgitte intervallet. Deretter bruker du ”klipp-og-lim” til å gjenta grafen periodisk slik eksemplene nedenfor viser.

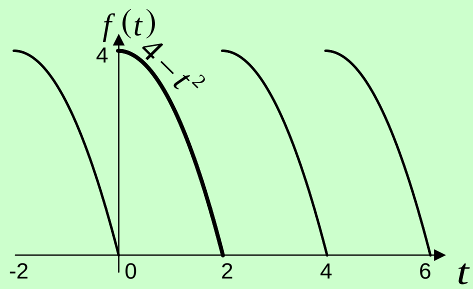
***Eksempel 3.2.2:*** Skisser grafene til de periodiske funksjonene nedenfor:

a) $f(t)=4-t^2$ når $0<t<2$, $\qquad f(t+2)=f(t)$

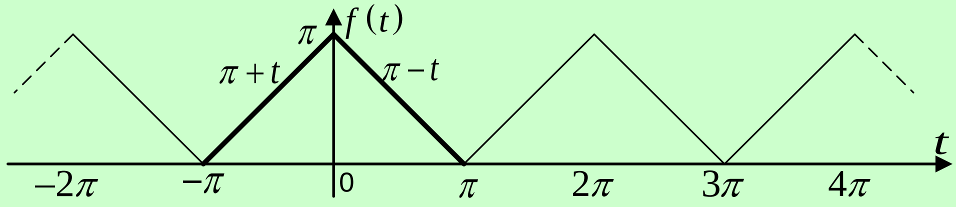
b) $f(t)=\begin{cases}\pi+t & \text{når } t\in\langle-\pi,\ 0\rangle \\ \pi-t & \text{når } t\in\langle 0,\ \pi\rangle\end{cases}, \qquad f(t+2\pi)=f(t)$

*Løsning*:

a)




b)



Hvis du vil kverulere, kan du påstå at funksjonen i eksempel a) ovenfor har andre perioder enn bare 2. Funksjonen kan også oppfattes som en periodisk funksjon med periode 4, eller 6, eller 8, eller … . På samme måte kan funksjonen i eksempel b) oppfattes som en funksjon med periode $4\pi$, eller $6\pi$, eller … . Men når vi snakker om "perioden" til en periodisk funksjon, er det alltid den korteste mulige perioden vi mener.

## *3.3. Beregning av Fourier-rekker.*

### 3.3.1. Formlene for Fourier-koeffisientene.

Vi går rett på sak:

La *f* være en stykkevis kontinuerlig funksjon med periode $p = 2L$.
Den uendelige trigonometriske rekka

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)$$

der koeffisientene er gitt ved

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_T^{T+2L} f(t)\,dt$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_T^{T+2L} f(t)\cdot\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt \qquad \text{når } n = 1, 2, 3, \cdots$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_T^{T+2L} f(t)\cdot\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt \qquad \text{når } n = 1, 2, 3, \cdots$$

kalles **Fourier-rekka til *f***.

Størrelsene $a_0$, $a_n$ og $b_n$ kalles gjerne ***Fourier-koeffisientene***.

Vi skal utlede disse formlene i kapitel 3.5.

Legg merke til at:

- Vi må forutsette at funksjonen *f* er *periodisk*.
- Vi har innført en størrelse *L* som er halve perioden: $p = 2L$.
- I de integralene som inngår i definisjonen ovenfor, skal du integrere over en hel periode, fra et fritt valgt start-tidspunkt *T* til et slutt-tidspunkt $T + p = T + 2L$.

Så kommer hovedpoenget:

**Fouriers setning:**
Fourier-rekka til *f* vil konvergere mot *f* overalt unntatt i eventuelle punkter $t = t_0$ der *f* er diskontinuerlig. I slike punkter vil Fourier-rekka konvergere mot

$$\tfrac{1}{2}\left(\lim_{t\to t_0^-} f(t) + \lim_{t\to t_0^+} f(t)\right).$$

Hovedpoenget i Fouriers setning er et at overalt hvor *f* er kontinuerlig, vil Fourier-rekka være lik den funksjonen *f* som er brukt ved beregning av Fourier-koeffisientene.

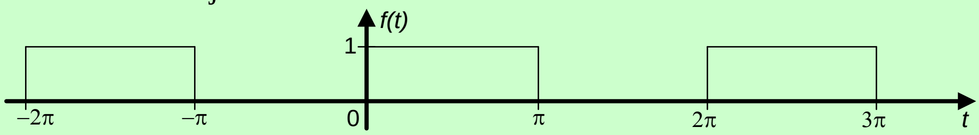
Beregning av Fourier-koeffisientene fører ofte til stygge integrasjoner. I et vedlegg finner du en liten tabell over de mest aktuelle ubestemte integralene. I praksis bruker vi gjerne dataverktøy til å løse disse integralene.

La oss se på et par eksempler på bruk av setningen.

***Eksempel 3.3.1***: Finn Fourier-rekka til funksjonen *f* gitt ved

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{når} \quad t \in \langle -\pi, 0 \rangle \\ 1 & \text{når} \quad t \in [0, \pi \rangle \end{cases}, \qquad f(t+2\pi) = f(t)$$

*Løsning*: Grafen til funksjonen ser slik ut:




Vi ser at perioden er $p = 2\pi$, slik at i formlene for Fourier-koeffisientene setter vi $L = \pi$. Det er mest hensiktsmessig å integrerer fra $-\pi$ til $\pi$ (eller fra 0 til $2\pi$). Da får vi:

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{\pi} 1\,dt\right) = \frac{1}{2\pi}[t]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi}(\pi - 0) = \underline{\frac{1}{2}}.$$

Når $n = 1, 2, 3, \cdots$ får vi:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{\pi} 1\cdot\cos\left(n\tfrac{\pi}{\pi}t\right)dt\right) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left(\sin(n\pi) - \sin 0\right) = \underline{0}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{\pi} 1\cdot\sin\left(n\tfrac{\pi}{\pi}t\right)dt\right) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-1}{n}\cos(nt)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{-1}{n\pi}\left(\cos(n\pi) - \cos 0\right) = \frac{-1}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right) = \left\{\begin{matrix} \frac{2}{n\pi} & \text{når} & n = 1, 3, 5, \cdots \\ 0 & \text{når} & n = 2, 4, 6, \cdots \end{matrix}\right\}$$

Vi ser at alle cosinus-leddene forsvinner, slik at Fourier-rekka blir

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin t + \frac{2}{3\pi}\sin(3t) + \frac{2}{5\pi}\sin(5t) + \frac{2}{7\pi}\sin(7t) + \cdots = \underline{\underline{\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin((2n+1)t)}}.$$

Noen merknader til beregningene av koeffisientene:

- $a_0$ blir *gjennomsnittsverdien* av *f* over en hel periode.
- Husk at *n* er et helt, positivt tall. Da blir:

  $\sin(n\pi) = 0$ for alle *n*.

  $\cos(n\pi)$ blir lik $-1$ når *n* er et oddetall og 1 når *n* er et jamt tall.

  Eller enklere: $\cos(n\pi) = (-1)^n$.

Det kan ofte være vanskelig å skrive Fourier-rekka med summetegn. Jeg vil derfor anbefale at du skriver ut noen ledd i rekka slik at du ser systemet, og deretter utforme rekka ved hjelp av summetegn.

La oss se på konvergensen av rekka i eksemplet ovenfor. Vi danner da partialsummene

$$s_1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin t$$

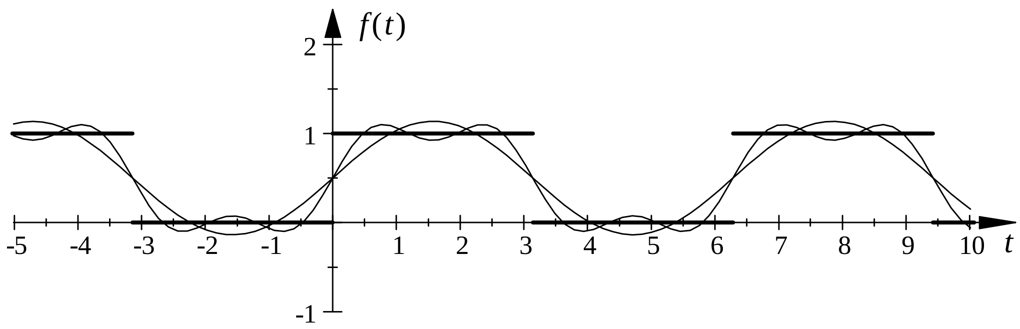
$$s_2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin t + \frac{2}{3\pi}\sin(3t)$$

$$s_3 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin t + \frac{2}{3\pi}\sin(3t) + \frac{2}{5\pi}\sin(5t)$$

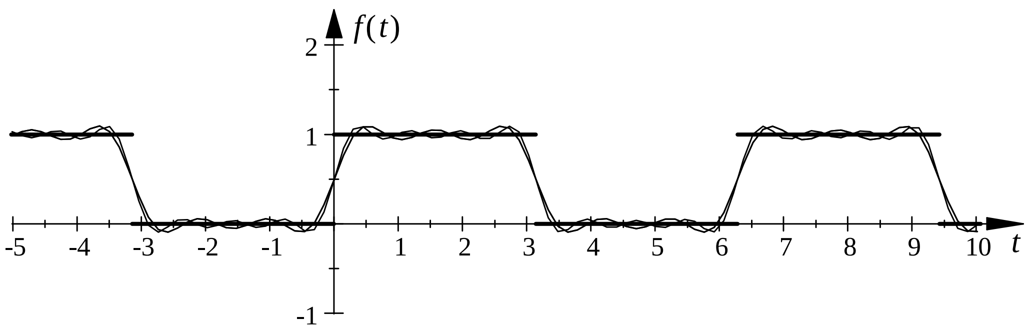
$$s_4 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin t + \frac{2}{3\pi}\sin(3t) + \frac{2}{5\pi}\sin(5t) + \frac{2}{7\pi}\sin(7t)$$

og tegner grafene til disse summene sammen grafen til *f*.

Først $s_1$ og $s_2$:




Så $s_3$ og $s_4$:




Du er sikkert enig i at jo flere ledd vi tar med i rekka, jo mer nærmer summen av rekka seg mot *f*.

La oss til slutt se nærmere på hva som skjer når vi setter inn noen spesielle verdier av *t* i rekka. Vi starter med å sette inn $t = 0$. Da er funksjonen diskontinuerlig, funksjonsverdien ”hopper” fra 0 til 1. Fouriers setning sier at Fourier-rekka i et slikt diskontinuitetspunkt skal konvergere mot

$$\tfrac{1}{2}(0+1) = \tfrac{1}{2}.$$

Dette stemmer helt med verdien av Fourier-rekka, fordi alle sinus-leddene blir lik null når $t = 0$ slik at rekka kun består av konstantleddet $\frac{1}{2}$. Det samme skjer i alle diskontinuitets-punktene (d.v.s. når $t = m \cdot \pi$ der *m* er et helt tall). Da får Fourier-rekka verdien

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin\left((2n+1)\cdot m\pi\right)=\underline{\frac{1}{2}}$$

fordi alle sinus-leddene blir lik null.

Så kan vi sette $t=\frac{1}{2}\pi$. Da er funksjonsverdien lik 1, slik at

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi\right)+\frac{2}{3\pi}\sin\left(3\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right)+\frac{2}{5\pi}\sin\left(5\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right)+\frac{2}{7\pi}\sin\left(7\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right)+\cdots=1$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\cdot 1+\frac{2}{3\pi}\cdot(-1)+\frac{2}{5\pi}\cdot 1+\frac{2}{7\pi}\cdot(-1)+\cdots=1$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{2}{\pi}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{\pi}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{\pi}-\frac{1}{7}\cdot\frac{2}{\pi}+\cdots=1-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{2}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right)=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\quad 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}$$

Vi ser at vi har funnet summen av den alternerende rekka

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots.$$

Men vi kan også bruke dette resultatet til å beregne $\pi$ med ganske stor nøyaktighet, bare ved å ta med tilstrekkelig mange ledd i summen. Vi får

$$\pi=4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right).$$

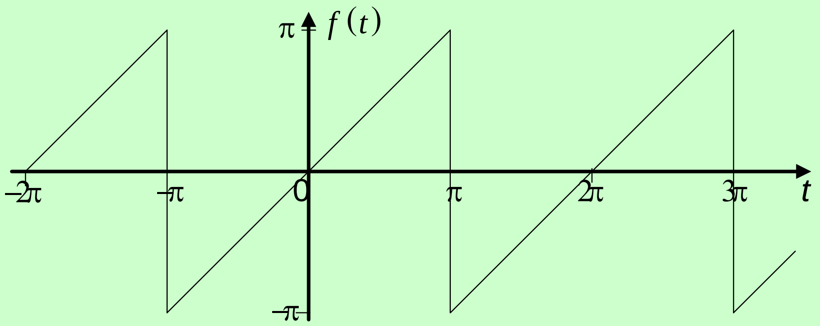
Vi tar et eksempel til:

***Eksempel 3.3.2*:** Finn Fourier-rekka til funksjonen *f* gitt ved

$$f(t)=t \quad \text{når } -\pi<t<\pi\,,$$

$$f(t+2\pi)=f(t)$$

*Løsning*: Grafen til funksjonen ser slik ut:




Også her er perioden $p=2\pi$ slik at $L=\pi$. Vi integrerer fra $-\pi$ til $\pi$, slik at koeffisientene blir:

$$a_0=\frac{1}{2L}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t\,dt=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{4\pi}\left(\pi^2-(-\pi)^2\right)=\underline{0}.$$

Når $n = 1, 2, 3, \cdots$ får vi:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cdot\cos\left(n\tfrac{\pi}{\pi}t\right)dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\cos(nt)+\frac{t}{n}\sin(nt)\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}\left(\cos(n\pi)-\cos(-n\pi)\right)+\frac{\pi}{n}\sin(n\pi)-\frac{-\pi}{n}\sin(-n\pi)\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}\left((-1)^n-(-1)^n\right)+0-0\right) = \underline{0}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cdot\sin\left(n\tfrac{\pi}{\pi}t\right)dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\sin(nt)-\frac{t}{n}\cos(nt)\right]_{-\pi}^{\pi}$$

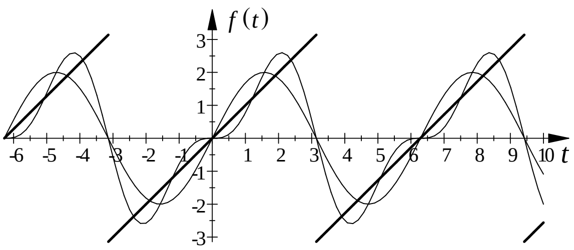
$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}\left(\sin(n\pi)-\sin(-n\pi)\right)-\frac{\pi}{n}\cos(n\pi)+\frac{-\pi}{n}\cos(-n\pi)\right)$$

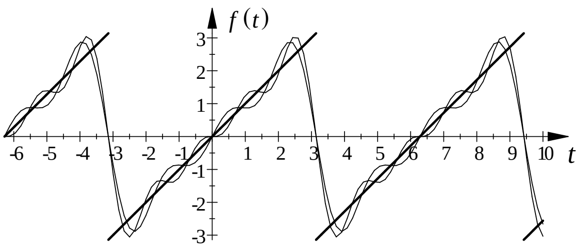
$$= \frac{1}{\pi}\left(0-0-\frac{\pi}{n}(-1)^n-\frac{\pi}{n}(-1)^n\right) = \underline{\frac{-2}{n}(-1)^n}$$

Altså blir Fourier-rekka

$$0+\frac{2}{1}\sin t-\frac{2}{2}\sin(2t)+\frac{2}{3}\sin(3t)-\frac{2}{4}\sin(4t)+\cdots = \underline{\underline{2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nt)}}.$$

Figurene nedenfor antyder hvordan Fourier-rekka konvergerer mot den gitte funksjonen.




Til venstre ovenfor ser du grafene til partialsummene

$$s_1 = \frac{2}{1}\sin(t)$$

og

$$s_2 = \frac{2}{1}\sin(t)-\frac{2}{2}\sin(2t).$$

Til høyre ovenfor ser du grafen til partialsummene

$$s_4 = \frac{2}{1}\sin(t)-\frac{2}{2}\sin(2t)+\frac{2}{3}\sin(3t)-\frac{2}{4}\sin(4t)$$

og

$$s_5 = \frac{2}{1}\sin(t)-\frac{2}{2}\sin(2t)+\frac{2}{3}\sin(3t)-\frac{2}{4}\sin(4t)+\frac{2}{5}\sin(5t).$$

Du ser hvordan Fourier-rekka konvergerer mot den opprinnelige funksjonen når antall ledd øker.

Begge eksemplene ovenfor hadde perioder $p = 2\pi$. La oss avslutte med et eksempel som har en annen periode. Som før utføres de fleste ubestemte integrasjoner med dataverktøy.

***Eksempel 3.3.3:*** Finn Fourier-rekka til funksjonen *f* gitt ved

$$f(t) = t^2 \text{ når } 0 \le t < 1, \quad f(t+1) = f(t).$$

Bruk resultatet til å finne summen av den uendelige rekka som framkommer når $t = 0$.

*Løsning:* Denne funksjonen har periode

$$p = 2L = 1 \quad \Leftrightarrow \quad L = \tfrac{1}{2}.$$

Dette fører til at

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

og

$$n\frac{\pi}{L}t = n \cdot \frac{\pi}{\frac{1}{2}}t = 2n\pi t.$$

Da blir

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}\int_0^1 t^2\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}\left(1^3 - 0^3\right) = \underline{\frac{1}{3}}.$$

Når $n = 1, 2, 3, \cdots$ får vi ved hjelp av integraltabellen:

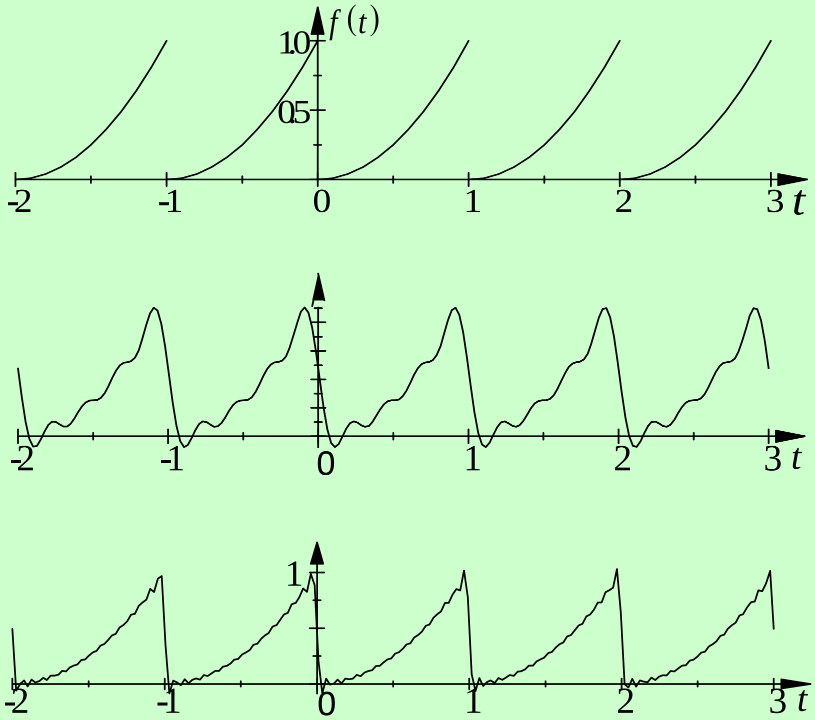
$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{L}\int_0^1 f(t)\cdot\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = 2\int_0^1 t^2\cdot\cos(2n\pi t)\,dt \\
&= 2\cdot\frac{1}{(2\pi n)^3}\left[2\cdot 2\pi nt\cos(2n\pi t) + \left((2\pi n)^2 t^2 - 2\right)\sin(2n\pi t)\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{4\pi^3 n^3}\left(4\pi n\underbrace{\cos(2n\pi)}_{=1} + \left(4\pi^2 n^2 - 2\right)\underbrace{\sin(2n\pi)}_{=0} - 0 - \sin 0\right) \\
&= \frac{1}{4\pi^3 n^3}(4n\pi\cdot 1 + 0) = \underline{\frac{1}{\pi^2 n^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{L}\int_0^1 f(t)\cdot\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = 2\int_0^1 t^2\cdot\sin(2n\pi t)\,dt \\
&= 2\cdot\frac{-1}{(2\pi n)^3}\left[\left((2\pi n)^2 t^2 - 2\right)\cos(2n\pi t) - 2\cdot 2\pi nt\sin(2\pi nt)\right]_0^1 \\
&= \frac{-1}{4\pi^3 n^3}\left(\left(4\pi^2 n^2 - 2\right)\underbrace{\cos(2n\pi)}_{=1} + 4\pi n\underbrace{\sin(2n\pi)}_{=0} - (0-2)\underbrace{\cos(2n\pi)}_{=1} + 0\right) \\
&= \frac{-1}{4\pi^3 n^3}\left(\left(4\pi^2 n^2 - 2\right)\cdot 1 + 0 + 2\cdot 1\right) = \frac{-1}{4\pi^3 n^3}\left(4\pi^2 n^2\right) = \underline{-\frac{1}{\pi n}}
\end{aligned}$$

Altså blir Fourier-rekka

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) = \underline{\underline{\frac{1}{3} + \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos(2n\pi t) - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(2n\pi t)}}.$$

Som kontroll har jeg tegnet grafen til den opprinnelige funksjonen *f*, sammen med partial-summer med henholdsvis 4 og 15 ledd i hver sum.




Når $t = 0$, blir alle sinus-leddene lik null mens alle cosinus-faktorene blir lik 1. Da blir

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot 1=\frac{1}{2}(1+0) \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6} \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}}}.$$

**Oppgave 3.3.1.**

## 3.3.2. Et større eksempel.

Til slutt skal vi se på et større eksempel, som fører til nokså kompliserte integrasjoner:

***Eksempel 3.3.4*:** Dersom sinus-spenningen

$$g(t)=\sin(\pi t)$$

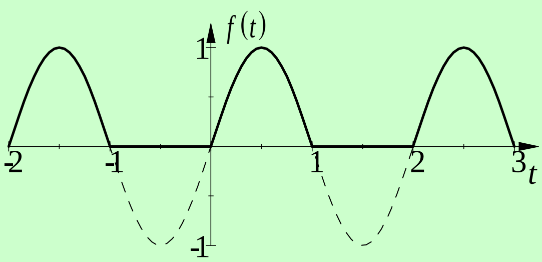
likerettes, får vi det periodiske signalet

$$f(t)=\begin{cases} 0 & \text{når} \quad -1<t<0 \\ \sin(\pi t) & \text{når} \quad 0\le t<1 \end{cases}, \qquad f(t+2)=f(t).$$

Finn Fourier-rekka til denne funksjonen.

*Løsning*:
Grafen til $f$ er tegnet til høyre. Vi ser at dette en periodisk funksjon med periode

$$p=2L=2 \quad\Leftrightarrow\quad L=1.$$




Fourier-rekka blir av formen

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(n\tfrac{\pi}{1}t\right)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(n\tfrac{\pi}{1}t\right)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(n\pi t\right)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(n\pi t\right).$$

Vi beregner koeffisientene slik:

$$a_0=\frac{1}{2\cdot 1}\int_0^2 f(t)\,dt=\frac{1}{2}\left(\int_0^1\sin(\pi t)\,dt+\int_1^2 0\,dt\right)=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi t)\right]_0^1$$

$$=-\frac{1}{2\pi}(\cos\pi-\cos 0)=-\frac{1}{2\pi}(-1-1)=\underline{\frac{1}{\pi}}$$

$$a_n=\frac{1}{1}\cdot\int_0^2 f(t)\cdot\cos\left(n\tfrac{\pi}{1}t\right)dt=\int_0^1\sin(\pi t)\cdot\cos(n\pi t)\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\cos((n-1)\pi t)}{n-1}-\frac{\cos((n+1)\pi t)}{n+1}\right]_0^1$$

der integrasjonen er utført ved hjelp av en integraltabell (eller dataverktøy). Men på grunn av faktoren $(n-1)$ i den første nevneren, er dette resultatet kun gyldig når $n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$. Tilfellet $n=1$ må altså spesialbehandles.

Når vi setter inn grensene, benytter vi at $\cos(n\pi)=(-1)^n$. Da blir

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\cos((n-1)\pi)-\cos 0}{n-1}-\frac{\cos((n+1)\pi)-\cos 0}{n+1}\right)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{(-1)^{n-1}-1}{n-1}-\frac{(-1)^{n+1}-1}{n+1}\right).$$

Men

$$(-1)^{n-1}=(-1)^{n+1}=\begin{cases}-1 & \text{når} \quad n=2,4,6,\cdots\\ 1 & \text{når} \quad n=3,5,7,\cdots\end{cases}$$

Da får vi at:

Når $n=2,4,6,\cdots$ er

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{(-1)^{n-1}-1}{n-1}-\frac{(-1)^{n+1}-1}{n+1}\right)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{-1-1}{n-1}-\frac{-1-1}{n+1}\right)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{-2}{n-1}+\frac{2}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{-(n+1)+(n-1)}{(n-1)(n+1)}\right)=\underline{\frac{1}{\pi}\cdot\frac{-2}{n^2-1}}$$

Når $n=3,5,7,\cdots$ er

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{(-1)^{n-1}-1}{n-1}-\frac{(-1)^{n+1}-1}{n+1}\right)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1-1}{n-1}-\frac{1-1}{n+1}\right)=\underline{0}.$$

Nå gjenstår det bare å behandle spesialtilfellet $n=1$. Da blir

$$a_1=\frac{1}{1}\int_0^2 f(t)\cdot\cos\left(\tfrac{\pi}{1}t\right)dt=\int_0^1\sin(\pi t)\cdot\cos(\pi t)\,dt$$

$$=\left[\frac{-\cos(2\pi t)}{4\pi}\right]_0^1=\frac{1}{4\pi}\left(-\cos(2\pi)+\cos 0\right)=\frac{1}{4\pi}(-1+1)=\underline{0}$$

Vi får altså at

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{når} \quad n = 1, 3, 5, \cdots \\ \dfrac{-2}{\pi\left(n^2-1\right)} & \text{når} \quad n = 2, 4, 6, \cdots \end{cases}$$

Beregningen av $b_n$ er (nesten) like omstendelig:

$$b_n = \frac{1}{1}\int_0^2 f(t)\cdot\sin\left(n\tfrac{\pi}{1}t\right)dt = \int_0^1 \sin(\pi t)\cdot\sin(n\pi t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin\left((n-1)\pi t\right)}{n-1} - \frac{\sin\left((n+1)\pi t\right)}{n+1}\right]_0^1$$

der integrasjonen er utført ved hjelp av integraltabellen (eller dataverktøy). Men på grunn av faktoren $(n-1)$ i den første nevneren, er dette resultatet kun gyldig når $n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$.

Tilfellet $n = 1$ må altså spesialbehandles. Vi setter inn grensene, og får at

$$b_n = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin\left((n-1)\pi t\right)}{n-1} - \frac{\sin\left((n+1)\pi t\right)}{n+1}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin\left((n-1)\pi\right) - \sin 0}{n-1} - \frac{\sin\left((n+1)\pi\right) - \sin 0}{n+1}\right) = \underline{0}$$

Nå gjenstår det bare å behandle spesialtilfellet $n = 1$. Da blir

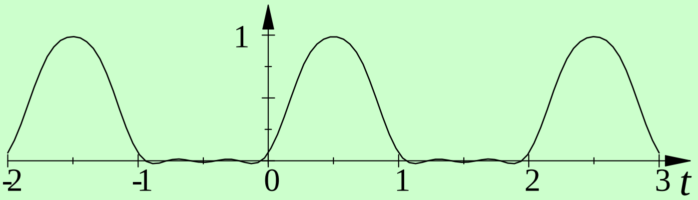
$$b_1 = \frac{1}{1}\int_0^2 f(t)\cdot\sin\left(\tfrac{\pi}{1}t\right)dt = \int_0^1 \sin(\pi t)\cdot\sin(\pi t)\,dt = \int_0^1 \sin^2(\pi t)\,dt = \frac{1}{4\pi}\left[2\pi t - \sin(2\pi t)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(2\pi - \sin(2\pi) - 0 + \sin 0\right) = \underline{\frac{1}{2}}$$

Vi samler trådene, og setter opp Fourier-rekka til *f*:

$$f(t) = \underline{\underline{\frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2-1}\cos(2k\pi t) + \frac{1}{2}\sin(\pi t)}}.$$

Figuren nedenfor viser grafen av den rekka som framkommer ved å ta med bare to ledd i summen. Vi ser at resultatet er overraskende bra.




Her er noen oppgaver der du kan bryne deg på integrasjonsteknikk: **Oppgave 3.3.2.**

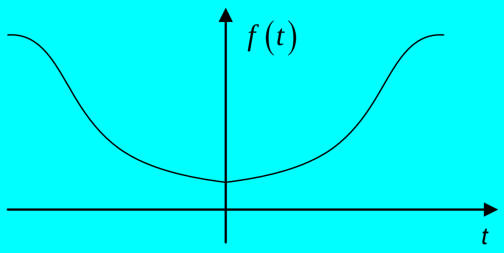
## *3.4. Fourier-rekker for jamne og odde funksjoner.*

### 3.4.1. Beregning av Fourier-koeffisienter for jamne og odde funksjoner.

La os starte med å rippe opp i et par definisjoner:

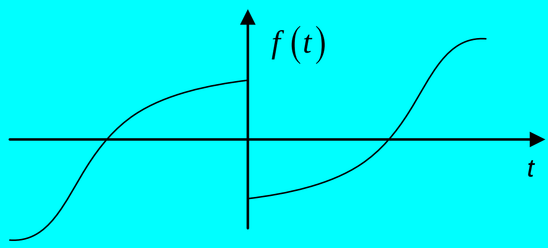
$f$ er ***jamn*** $\Leftrightarrow \quad f(-t) = f(t)$.

Dette svarer til at funksjonsgrafen er symmetrisk om andreaksen slik figuren nedenfor viser:




$f$ er ***odde*** $\Leftrightarrow \quad f(-t) = -f(t)$.

Dette svarer til at funksjonsgrafen er symmetrisk om origo slik figuren nedenfor viser:




Dersom *f* er en jamn eller en odde funksjon, kan beregningen av Fourier-koeffisientene forenkles mye. Vi kan nemlig vise at:

Dersom $f$ er *jamn*, blir Fourier-koeffisientene:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(t)\,dt$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \ \ldots$$

$$b_n = 0 \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \ \ldots$$

Vi sier at vi får ei *Fourier-cosinus-rekke*.

Dersom $f$ er *odde*, blir Fourier-koeffisientene:

$$a_n = 0 \quad \text{for } n = 0, 1, 2, 3, \ \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \ \ldots$$

Vi sier at vi får ei *Fourier-sinus-rekke*.

Du finner beviset for disse setningene i et vedlegg.

Det er to store fordeler ved å bruke disse setningene:

- Vi vet på forhånd at halvparten av koeffisientene blir lik null, og trenger derfor ikke å beregne dem.
- Ved beregning av de gjenværende koeffisientene skal vi kun integrere fra 0 til $L$. Dette gir som regel mye enklere regninger enn å integrere fra $T$ til $T+2L$.

Men før vi kan bruke setningene, må vi vise at funksjonen er jamn eller odde. Vi starter da gjerne med å tegne funksjonsgrafen. Hvis denne tyder på at funksjonen er jamn eller odde, bør vi påvise dette ved regning. Dette gjøres slik:

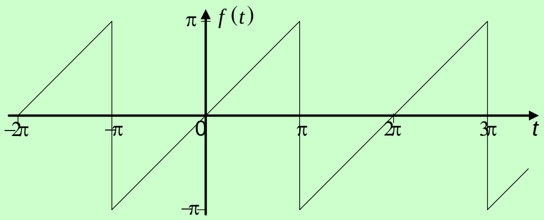
La $t \in [0, L]$, slik at $-t \in [-L, 0]$. Erstatt $t$ med $-t$ i funksjonsuttrykket når $t \in [0, L]$. Hvis du da får samme funksjonsuttrykk som det som gjelder når $t \in [-L, 0]$, er funksjonen *jamn*. Hvis du får samme funksjonsuttrykk som det som gjelder når $t \in [-L, 0]$ men med motsatt fortegn, er funksjonen *odde*.

***Eksempel 3.4.1*:** Bruk setningene ovenfor til å bestemme Fourier-rekka til funksjonen i Eksempel 3.3.2:

$$f(t) = t \quad \text{når } -\pi < t < \pi\,,$$
$$f(t+2\pi) = f(t)$$

*Løsning*: Funksjonsgrafen er tegnet til høyre. Den tyder på at funksjonen er odde.

Vi viser det slik:




La $t \in [0, \pi]$. Da er $f(t) = t$. Så erstatter vi $t$ med $-t$, og får

$$f(-t) = -t = -f(t).$$

Altså er funksjonen odde.

Væpnet med denne kunnskapen og setningene ovenfor, kan vi nå sette:

$a_n = 0 \qquad$ for $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-1}{n^2}\big(nt\cos(nt) - \sin(nt)\big)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{-2}{\pi n^2}\left(n\pi\underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} - \underbrace{\sin(n\pi)}_{=0} - 0 + \sin 0\right) = \frac{-2}{\pi n^2}\left(n\pi\cdot(-1)^n - 0\right) = \underline{-\frac{2}{n}\cdot(-1)^n}$$

for $n = 1, 2, 3, \ldots$

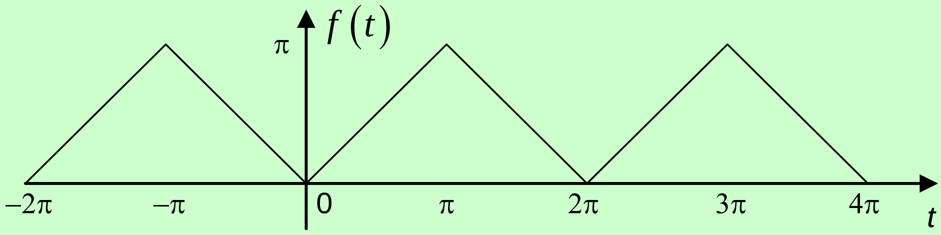
Og dette er de samme koeffisientene som vi fikk før, men med mye mindre regning.

Så tar vi et eksempel med en jamn funksjon:

***Eksempel 3.4.2*:** Finn Fourier-rekka til funksjonen $f$ definert ved

$$f(t) = \begin{cases} -t & \text{når} \quad -\pi < t < 0 \\ t & \text{når} \quad 0 \le t < \pi \end{cases}, \qquad f(t+2\pi) = f(t).$$

*Løsning*: Vi starter med å tegne et utsnitt av grafen til funksjonen:




Grafen tyder på at funksjonen er jamn. Vi viser dette slik:
Vi lar $t \in [0, \pi\rangle$, slik at $f(t) = t$.

Så erstatter vi $t$ med $-t$, og får $f(-t) = -t$.

Men $-t$ befinner seg i intervallet $\langle -\pi, 0\rangle$. Der er $f(t) = -t$.

Altså er $f(-t) = f(t)$, som viser at funksjonen er jamn.

Nå er vi klar til å beregne koeffisientene. Vi benytter da at $L = \pi$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\,dt = \frac{1}{\pi}\cdot\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\pi^2 - 0^2\right) = \underline{\frac{\pi}{2}}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cdot\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\left(\cos(nt) + nt\sin(nt)\right)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}\left(\cos(n\pi) + n\pi\sin(n\pi) - \cos(0) - 0\right) = \frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-4}{\pi n^2} & \text{når} \quad n = 1, 3, 5, \cdots \\ 0 & \text{når} \quad n = 2, 4, 6, \cdots \end{cases}$$

$b_n = 0$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$

Da blir Fourier-rekka

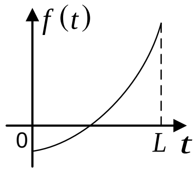
$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos t + \frac{1}{3^2}\cos(3t) + \frac{1}{5^2}\cos(5t) + \cdots\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\left((2k-1)t\right)}}.$$

Nå er tiden inne til å trene: **Oppgave 3.4.1** .

Noen ganger kan en periodisk funksjon som i utgangspunktet verken er jamne eller odde, danne utgangspunkt for en jamn eller odde funksjon ved å forskyve funksjonen i koordinat-systemet (eller ved å forskyve koordinatsystemet). Teknikken er vist i et tillegg.

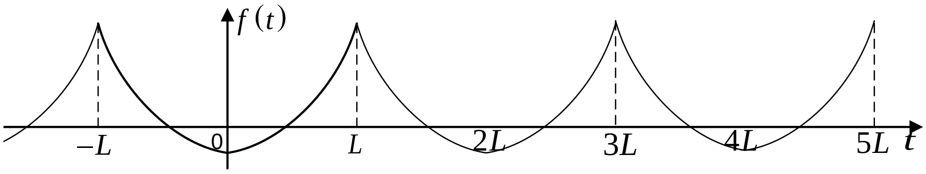
## 3.4.2. Halvperiodiske utvidelser.

Vi tar utgangspunkt i en funksjon $f(t)$ som er definert når $t \in \langle 0, L\rangle$. Vi kan ikke uten videre finne Fourier-rekka til en slik funksjon siden den ikke er periodisk. Men vi kan lage oss en periodisk funksjon på grunnlag av $f$, og finne Fourier-rekka til den nye (periodiske) funksjonen. Dette kan gjøres på flere måter. Vi skal se på de to vanligste: odde og jamne halvperiodiske utvidelser.

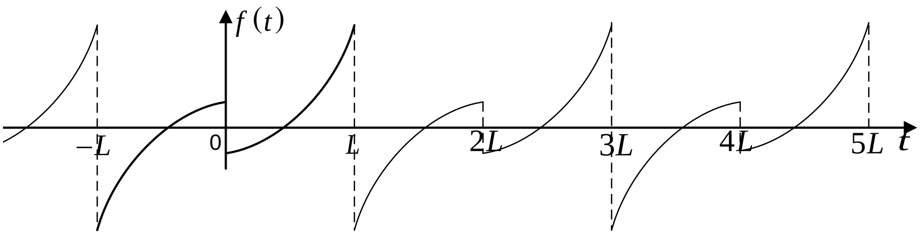



Vi starter med funksjonen $f(t)$, $t \in \langle 0, L \rangle$ som for eksempel kan se ut som på grafen til venstre.

Vi får den *jamne halvperiodiske utvidelsen* ved å ”speile” grafen om *y*-aksen, og deretter gjenta mønsteret periodisk slik figuren nedenfor viser:




Vi får den *odde halvperiodiske utvidelsen* ved å ”speile” grafen om origo, og deretter gjenta mønsteret periodisk slik figuren nedenfor viser:



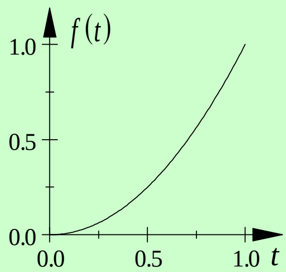

For slike ***halvperiodiske utvidelser*** kan vi finne Fourier-rekka ved hjelp av formlene for henholdsvis jamne og odde funksjoner.

***Eksempel 3.4.3:*** Vi har gitt funksjonen

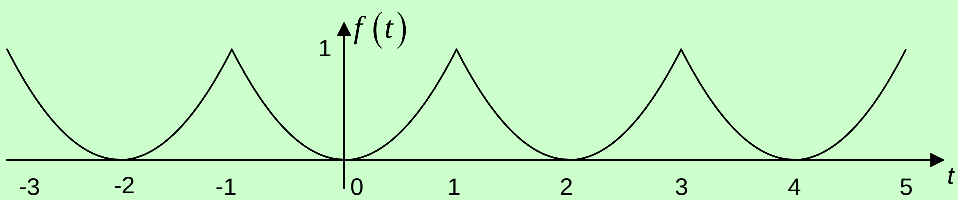
$$f(t) = t^2, \; 0 < t < 1.$$

a) Finn Fourier-rekka til den jamne halvperiodiske utvidelsen.
b) Finn Fourier-rekka til den odde halvperiodiske utvidelsen.

*Løsning:*
Vi starter med å tegne grafen til $f(t)$:




a) Grafen til den *jamne* halvperiodiske utvidelsen er vist nedenfor:



Den halvperiodiske utvidelsen får periode $p = 2L = 2 \quad \Leftrightarrow \quad L = 1$. Fourier-rekka blir

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi t)$$

der

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(t)\,dt = \frac{1}{1}\int_0^1 t^2\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \underline{\frac{1}{3}}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = \frac{2}{1}\int_0^1 t^2\cos(n\pi t)\,dt$$

$$= \frac{2}{(n\pi)^3}\left[2n\pi t\cos(n\pi t) + \left((n\pi)^2 - 2\right)\sin(n\pi t)\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{n^3\pi^3}\left(2n\pi\underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} + \left(n^2\pi^2 - 2\right)\underbrace{\sin(n\pi)}_{=0} - 0 - 0\right)$$

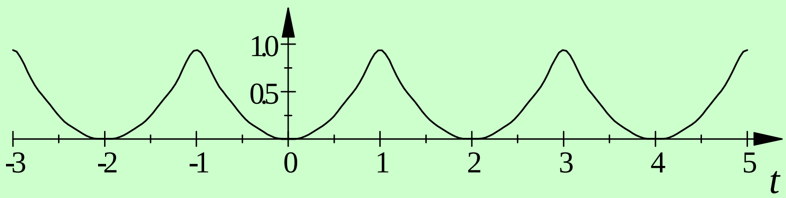
$$= \frac{2}{n^3\pi^3}\left(2n\pi(-1)^n + 0\right) = \underline{\frac{(-1)^n\cdot 4}{n^2\pi^2}}$$

for $n = 1, 2, 3, \ldots$

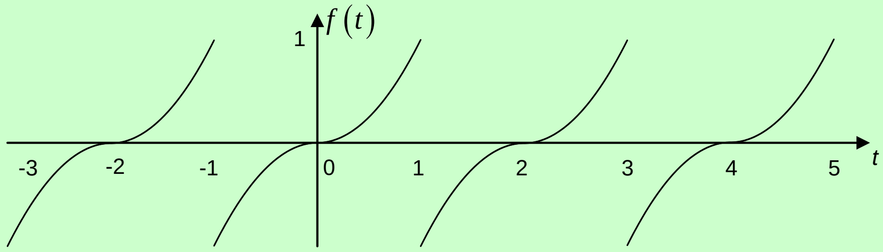
Her er det bestemte integralet beregnet ved hjelp av integraltabellen (eller kalkulator). Altså er Fourier-rekka

$$\underline{\underline{\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi t).}}$$

Summerer vi leddene til og med $n = 6$, blir grafen til Fourier-rekka slik:




b) Grafen til den *odde* halvperiodiske utvidelsen er vist nedenfor:




Den halvperiodiske utvidelsen får periode $p = 2L = 2 \quad \Leftrightarrow \quad L = 1$. Fourier-rekka blir

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi t)$$

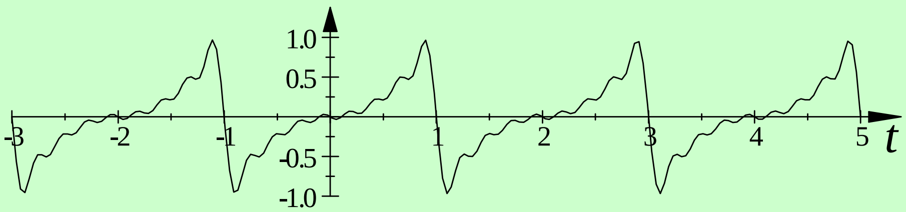
der

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cdot\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = \frac{2}{1}\int_0^1 t^2\sin(n\pi t)\,dt$$
$$= 2\cdot\frac{-1}{(n\pi)^3}\Big[\big((n\pi)^2t^2-2\big)\cos(n\pi t)-2n\pi t\sin(n\pi t)\Big]_0^1$$
$$= \frac{-2}{n^3\pi^3}\Big(\big(n^2\pi^2-2\big)(-1)^n-0-(0-2)\cdot 1+0\Big) = \frac{-2}{n^3\pi^3}\Big(n^2\pi^2(-1)^n-2(-1)^n+2\Big)$$
$$= \frac{-2}{n^3\pi^3}\Big(n^2\pi^2(-1)^n+2\big(1-(-1)^n\big)\Big) = \frac{-2(-1)^n}{n\pi}-\frac{4}{n^3\pi^3}\Big(1-(-1)^n\Big)$$
$$= \begin{cases} \dfrac{2}{n\pi}-\dfrac{8}{n^3\pi^3} & \text{når} \quad n = 1, 3, 5, \cdots \\[2ex] -\dfrac{2}{n\pi} & \text{når} \quad n = 2, 4, 6, \cdots \end{cases}$$

Her er det bestemte integralet beregnet ved hjelp av tabellen. Fourier-rekka blir da

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi t)$$

der $b_n$ er gitt ovenfor. Summerer vi leddene til og med $n = 8$, blir grafen til Fourier-rekka slik:




Nå bør du trene selv på **Oppgave 3.4.2**.

Her er et (av mange) eksempel på hva dette kan brukes til: Anta at du har utført en måleserie, og vil lagre denne måleserien. Da må du kanskje lagre tusenvis av måledata. Men hvis du beregner Fourier-transformen av en halvperiodisk utvidelse av måleserien, og lagrer Fourier-koeffisientene, kan det være tilstrekkelig med ”bare” noen hundre Fourier-koeffisienter for å få gjenskapt måleserien med svært god nøyaktighet. Smart, ikke sant?

## *3.5. Utledning av formlene for Fourier-koeffisientene.*

Nå er det på tide å vise hvordan formlene for Fourier-koeffisientene framkommer. Vi skal begrense oss til å utlede disse formlene, og skal ikke undersøke konvergensen. Vi skal derfor anta at når vi har en periodisk funksjon $f(t)$ med periode $2L$, er det alltid mulig å finne koeffisienter $a_0$, $a_n$ og $b_n$ slik at

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) \qquad (*)$$

Vi får bruk for noen integrasjonsformler:

Når $m \in \mathbb{N}$ og $n \in \mathbb{N}$, er:

1) $\int_T^{T+2L} \sin\left(n\frac{\pi}{L}t\right)dt = \int_T^{T+2L} \cos\left(n\frac{\pi}{L}t\right)dt = 0$ for alle $m$ og $n$.

2) $\int_T^{T+2L} \cos\left(m\frac{\pi}{L}t\right)\cdot\cos\left(n\frac{\pi}{L}t\right)dt = \begin{cases} 0 & \text{når} \quad m \neq n \\ L & \text{når} \quad m = n \end{cases}$

3) $\int_T^{T+2L} \sin\left(m\frac{\pi}{L}t\right)\cdot\sin\left(n\frac{\pi}{L}t\right)dt = \begin{cases} 0 & \text{når} \quad m \neq n \\ L & \text{når} \quad m = n \end{cases}$

4) $\int_T^{T+2L} \cos\left(m\frac{\pi}{L}t\right)\cdot\sin\left(n\frac{\pi}{L}t\right)dt = 0$ for alle $m$ og $n$.

Merk at på en strekning fra $t = T$ til $t = T + 2L$ vil funksjonene $\sin\left(n\frac{\pi}{L}t\right)$ og $\cos\left(n\frac{\pi}{L}t\right)$ utføre $n$ hele svingninger.

Du klarer sikkert å utlede formel (1) selv. De andre tre formlene er mer plundrete. Jeg har derfor flyttet hele utledningen til et vedlegg.

Vi starter med å utlede formelen for $a_0$. Vi integrerer da (*) over en periode, d.v.s. fra $t = T$ til $t = T + 2L$. Da får vi

$$\int_T^{T+2L} f(t)dt = \int_T^{T+2L}\left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\frac{\pi}{L}t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\frac{\pi}{L}t\right)\right)dt$$

$$= a_0\int_T^{T+2L} dt + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_T^{T+2L}\cos\left(n\frac{\pi}{L}t\right)dt\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n\int_T^{T+2L}\sin\left(n\frac{\pi}{L}t\right)dt\right)$$

$$= a_0\left[t\right]_T^{T+2L} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot 0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\cdot 0 = a_0\left(\left(T+2L\right)-T\right) = 2L\cdot a_0$$

slik at

$$\underline{\underline{a_0 = \frac{1}{2L}\int_T^{T+2L} f(t)dt}}.$$

Så skal vi utlede formlene for $a_n$. Vi multipliserer da (*) med $\cos\left(m\frac{\pi}{L}t\right)$ og integrerer over en periode. Da får vi:

$$\int_T^{T+2L} f(t)\cdot\cos\left(m\frac{\pi}{L}t\right)dt = a_0\int_T^{T+2L}\cos\left(m\frac{\pi}{L}t\right)dt$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_T^{T+2L}\cos\left(n\frac{\pi}{L}t\right)\cdot\cos\left(m\frac{\pi}{L}t\right)dt$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} b_n\int_T^{T+2L}\sin\left(n\frac{\pi}{L}t\right)\cdot\cos\left(m\frac{\pi}{L}t\right)dt$$

Nå tar vi en titt på hjelpesetningene 1, 2 og 4. Da ser vi at alle integralene blir lik null, med ett viktig unntak: Når $n = m$ blir

$$\int_T^{T+2\pi} \cos\left(m\tfrac{\pi}{L}t\right)\cdot\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = L\,.$$

Dermed står vi igjen med

$$\int_T^{T+2L} f(t)\cdot\cos\left(m\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = a_0\cdot 0 + a_m\cdot L + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\cdot 0$$

som gir

$$\underline{\underline{a_m = \frac{1}{L}\int_T^{T+2L} f(t)\cos\left(m\tfrac{\pi}{L}t\right)dt\,.}}$$

Og dette er jo den formelen vi skulle fram til (at indeksen heter *m* istedenfor *n* har jo ingen betydning).

På samme måte utledes formelen for $b_n$. Vi multipliserer (*) med $\sin\left(m\tfrac{\pi}{L}t\right)$ og integrerer over en periode. Da får vi:

$$\begin{aligned}\int_T^{T+2L} f(t)\cdot\sin\left(m\tfrac{\pi}{L}t\right)dt &= a_0\int_T^{T+2L}\sin\left(m\tfrac{\pi}{L}t\right)dt \\ &+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_T^{T+2L}\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)\cdot\sin\left(m\tfrac{\pi}{L}t\right)dt \\ &+\sum_{n=1}^{\infty} b_n\int_T^{T+2L}\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)\cdot\sin\left(m\tfrac{\pi}{L}t\right)dt\end{aligned}$$

Nå bruker vi hjelpesetningene 1, 3 og 4. Da ser vi at alle integralene blir lik null, med ett viktig unntak: Når $n = m$ blir

$$\int_T^{T+2\pi} \sin\left(m\tfrac{\pi}{L}t\right)\cdot\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = L\,.$$

Dermed står vi igjen med

$$\int_T^{T+2L} f(t)\cdot\sin\left(m\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = a_0\cdot 0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot 0 + b_m\cdot L$$

som gir

$$\underline{\underline{b_m = \frac{1}{L}\int_T^{T+2L} f(t)\sin\left(m\tfrac{\pi}{L}t\right)dt\,.}}$$

## *3.6. Løsing av differensiallikninger.*

Vi skal nå se hvordan vi kan bruke Fourier-rekker til å løse differensiallikninger der en periodisk funksjon inngår. Vi skal nøye oss med å se på et lite eksempel som illustrerer den generelle framgangsmåten.

***Eksempel 3.6.1:*** Løs differensiallikningen

$$y'(t) + y(t) = f(t)\,.$$

der

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{når} \quad -1 < t < 0 \\ 1 & \text{når} \quad 0 < t < 1 \end{cases}, \quad f(t+2) = f(t)$$

*Løsning:* Vi vet at løsningen av slike differensiallikninger kan skrives på formen

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

der $y_h(t)$ er løsningen av den homogene likningen mens $y_p(t)$ er en partikulær løsning.
Vi finner først $y_h(t)$ ved å løse likningen

$$y_h' + y_h = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy_h}{dt} = -y_h \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dy_h}{y_h} = -\int dt \quad \Leftrightarrow \quad \ln y_h = -t + \ln C$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln y_h - \ln C = -t \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{y_h}{C}\right) = -t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y_h}{C} = e^{-t} \quad \Leftrightarrow \quad y_h(t) = \underline{Ce^{-t}}$$

Vi ser at $y_h(t) \to 0$ når $t \to \infty$. Derfor er den partikulære løsningen mest interessant. For å finne en partikulær løsning, skriver vi først $f(t)$ som ei Fourier-rekke. Vi merker oss da at $f(t)$ er en odde funksjon med periode $p = 2 \quad \Leftrightarrow \quad L = \frac{1}{2}p = 1$. Da blir

$a_n = 0$ for alle *n*.

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = 2\int_0^1 1\cdot\sin(n\pi t)\,dt = 2\frac{-1}{n\pi}\left[\cos(n\pi t)\right]_0^1$$

$$= \frac{-2}{n\pi}\left(\cos(n\pi) - \cos 0\right) = \frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right) = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{når} \quad n = 1,3,5,\cdots \\ 0 & \text{når} \quad n = 2,4,6,\cdots \end{cases}$$

Fourier-rekka til $f(t)$ blir da

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi t) = \underline{\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin\left((2k-1)\pi t\right)}.$$

Når vi nå skal finne en partikulær løsning $y_p(t)$, er det rimelig å anta at $y_p(t)$ er av samme form som $f(t)$. Men selv om $f(t)$ bare inneholder sinus-ledd, må vi være forberedt på at $y_p(t)$ inneholder en kombinasjon av sinus- og cosinus-ledd. Da får vi:

$$y_p(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(s_n \sin(n\pi t) + c_n \cos(n\pi t)\right)$$

$$\Rightarrow \quad y_p'(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(s_n \cdot n\pi \cdot \cos(n\pi t) - c_n \cdot n\pi \cdot \sin(n\pi t)\right)$$

Så setters dette inn i likningen. For oversiktens skyld setter jeg bare inn i venstre side først:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(s_n \cdot n\pi \cdot \cos(n\pi t) - c_n \cdot n\pi \cdot \sin(n\pi t)\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(s_n \sin(n\pi t) + c_n \cos(n\pi t)\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left((n\pi s_n + c_n)\cos(n\pi t) + (-n\pi c_n + s_n)\sin(n\pi t)\right)$$

Hele differensiallikningen blir da

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left((n\pi s_n + c_n)\cos(n\pi t) + (-n\pi c_n + s_n)\sin(n\pi t)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi t)$$

der $b_n$ er de Fourier-koeffisientene som vi har regnet ut ovenfor.

Dersom venstresiden av likningen skal være lik Fourier-rekka på høyresiden for alle verdier av *t*, må vi for alle $n = 1,2,3,\cdots$ ha at:

$$n\pi s_n + c_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_n = -n\pi s_n$$

$$-n\pi c_n + s_n = b_n \quad \Leftrightarrow \quad -n\pi\left(-n\pi s_n\right) + s_n = b_n \quad \Leftrightarrow \quad \left(n^2\pi^2+1\right)s_n = b_n$$

$$\Leftrightarrow \quad s_n = \frac{1}{n^2\pi^2+1}b_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n^2\pi^2+1}\cdot\dfrac{4}{n\pi} & \text{når} \quad n = 1,3,5,\cdots \\ 0 & \text{når} \quad n = 2,4,6,\cdots \end{cases}$$

Da blir

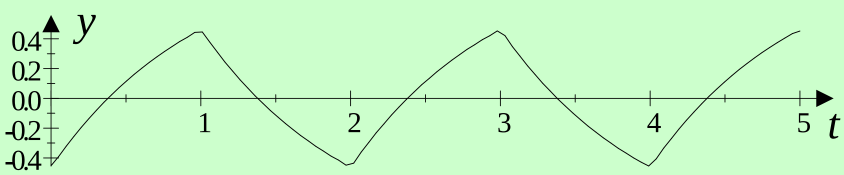
$$c_n = -n\pi s_n = \frac{-n\pi}{n^2\pi^2+1}b_n = \begin{cases} \dfrac{-n\pi}{n^2\pi^2+1}\cdot\dfrac{4}{n\pi} = \dfrac{-4}{n^2\pi^2+1} & \text{når} \quad n = 1,3,5,\cdots \\ 0 & \text{når} \quad n = 2,4,6,\cdots \end{cases}$$

Vi samler trådene, og finner at

$$y(t) = Ce^{-t} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(s_n \sin(n\pi t) + c_n \cos(n\pi t)\right)$$

$$= Ce^{-t} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\left((2k-1)^2\pi^2+1\right)}\left(\frac{1}{(2k-1)\pi}\sin\left((2k-1)\pi t\right) - \cos\left((2k-1)\pi t\right)\right)\right)$$

Grafen til de 10 første leddene i *rekka* (den partikulære løsningen) blir slik:




Vi ser hvordan $y(t)$ hele tiden går eksponentielt mot enten +1 eller -1, inntil $f(t)$ skifter fortegn slik at $y(t)$ må prøve å følge etter.

Det ble ganske mye arbeid selv om dette var et enkelt eksempel. Men framgangsmåten blir alltid den samme: Finn Fourier-rekka til periodiske funksjoner som inngår, og anta at løsningen er av samme form som den eller de leddene som inngår i disse Fourier-rekkene. Dersom noen ledd i slike løsninger allerede inngår i løsningen av den homogene likningen, må slike ledd multipliseres med *t*. Etter en del regning vil du få rekursive likninger som kan brukes til å bestemme koeffisientene i løsnings-rekkene.

## *3.7. Mer om Fourier-rekker.*

### 3.7.1. Frekvens, amplitude og fase.

Du vet nå at en periodisk funksjon $f(t)$ med periode $p = 2L$ kan uttrykkes ved en Fourier-rekke

$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right).$$

som konvergerer mot $f(t)$ overalt hvor $f(t)$ er kontinuerlig. Men noen ganger er det mer gunstig å skrive Fourier-rekka på en annen form:

Fourier-rekka

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)$$

kan skrives på ***amplitude-fase-formen***

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t + \varphi_n\right)$$

der

$$A_0 = |a_0| \qquad \text{og} \qquad \varphi_0 = \begin{cases} 0 & \text{når} \quad a_0 > 0 \\ \pi & \text{når} \quad a_0 < 0 \end{cases}$$

$$A_n = \sqrt{a_n^{\,2} + b_n^{\,2}}, \qquad \tan\varphi_n = -\frac{b_n}{a_n} \qquad \text{når } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Dette viser vi ved å benytte at

$$\cos(v+\varphi) = \cos v \cdot \cos\varphi - \sin v \cdot \sin\varphi .$$

Da får vi at

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t + \varphi_n\right) = A_0 \cos\varphi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)\cdot\cos\varphi_n - \sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)\cdot\sin\varphi_n\right)$$

$$= A_0 \cos\varphi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\varphi_n \cdot \cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) - A_n \sin\varphi_n \cdot \sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)\right)$$

Sammenlikning av ledd i rekka over med tilsvarende ledd i den vanlige Fourier-rekka

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)$$

gir nå at siden $A_0$ skal være positiv, er det naturlig å sette $A_0 = |a_0|$ mens $\cos\varphi_0 = \pm 1$ for å få rett fortegn. For alle andre verdier av *n* blir:

$$A_n \cos\varphi_n = a_n \qquad \text{og} \qquad -A_n \sin\varphi_n = b_n .$$

For å finne $A_n$, kvadrerer vi disse likningene og legger dem sammen. Da får vi

$$A_n^{\,2}\cos^2\varphi_n + A_n^{\,2}\sin^2\varphi_n = a_n^{\,2} + b_n^{\,2} \quad \Leftrightarrow \quad A_n^{\,2}\left(\cos^2\varphi_n + \sin^2\varphi_n\right) = a_n^{\,2} + b_n^{\,2}$$

$$\Leftrightarrow \quad A_n = \sqrt{a_n^{\,2} + b_n^{\,2}}$$

For å finne $\varphi_n$, deler vi likningene på hverandre, og får

$$\frac{-A_n \sin\varphi_n}{A_n \cos\varphi_n} = \frac{b_n}{a_n} \quad \Leftrightarrow \quad \tan\varphi_n = -\frac{b_n}{a_n}.$$

Du får nå to mulige verdier av $\varphi_n$ i intervallet $[0, 2\pi)$, og må velge den verdien som gir positiv $A_n$.

Du ser at for hver verdi av *n* har vi erstattet $a_n \cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) + b_n \sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)$ med *ett* cosinus-ledd: $A_n \cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t + \varphi_n\right)$. Vi kunne forresten godt ha brukt et sinus-ledd isteden. Størrelsen $A_n$ er ***amplituden*** for svingningen med vinkelfrekvens $n\tfrac{\pi}{L}t$ og er alltid positiv, mens $\varphi_n$ er ***fasevinkelen*** for svingningen med denne vinkelfrekvensen.

For sikkerhets skyld kan vi jo repetere begrepene *periode*, *frekvens* og *vinkelfrekvens*. Når vi sier at leddene $a_n \cos\left(n\frac{\pi}{L}t\right)$ og $b_n \sin\left(n\frac{\pi}{L}t\right)$ er periodiske med *periode* $p_n$, betyr det at

$$n\tfrac{\pi}{L}\left(t+p_n\right)=n\tfrac{\pi}{L}t+2\pi \quad\Leftrightarrow\quad n\tfrac{\pi}{L}t+n\tfrac{\pi}{L}p_n=n\tfrac{\pi}{L}t+2\pi \quad\Leftrightarrow\quad n\tfrac{\pi}{L}p_n=2\pi \quad\Leftrightarrow\quad \underline{p_n=\tfrac{2L}{n}}.$$

*Frekvensen* $f_n$ til disse leddene er da gitt ved

$$f_n=\tfrac{1}{p_n}=\underline{\tfrac{n}{2L}},$$

mens *vinkelfrekvensen* er $2\pi f_n = 2\pi\cdot\frac{n}{2L}=n\cdot\frac{\pi}{L}$. Legg merke til at frekvensen og vinkelfrekvensen er proporsjonal med *n*.

***Eksempel 3.7.1:*** I Eksempel 3.3.2 viste vi at Fourier-rekka til den periodiske funksjonen

$$f(t)=t \quad \text{når } -\pi<t<\pi, \qquad\qquad f(t+2\pi)=f(t)$$

er

$$F(t)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nt)=\frac{2}{1}\sin t-\frac{2}{2}\sin(2t)+\frac{2}{3}\sin(3t)-\frac{2}{4}\sin(4t)+\cdots.$$

Skriv denne Fourier-rekka på amplitude-fase-form.

*Løsning:* Vi ser direkte at

$$A_0=0$$

og at

$$A_n=\sqrt{a_n{}^2+b_n{}^2}=\sqrt{0^2+\left((-1)^n\cdot\tfrac{2}{n}\right)^2}=\tfrac{2}{n} \text{ når } n=1,2,3,\cdots.$$

Siden $a_n=0$ for alle *n*, blir fasevinkelen $\varphi_n$ gitt ved

$$\tan\varphi_n=-\frac{b_n}{a_n}\to\begin{cases}-\infty & \text{når } b_n>0\\ \infty & \text{når } b_n<0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \varphi_n=\begin{cases}-\frac{1}{2}\pi & \text{når } n=1,3,5,\cdots\\ \frac{1}{2}\pi & \text{når } n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

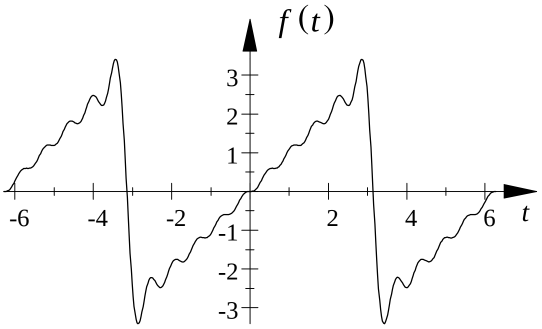
Dermed blir rekka

$$F(t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(nt+\varphi_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{2}{n}\cos\left(nt+(-1)^n\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right).$$

For sammenlikningens skyld kan du jo legge merke til at

$$\cos\left(nt-\tfrac{1}{2}\pi\right)=\sin(nt),$$
$$\cos\left(nt+\tfrac{1}{2}\pi\right)=-\sin(nt).$$

Dermed er du tilbake til den Fourier-rekka vi startet med.




Til venstre ser du et plot av de 10 første leddene i Fourier-rekka til $f(t)$. Du ser at den opprinnelige periodiske funksjonen blir ikke særlig godt gjengitt med bare 10 ledd. Det skyldes at amplituden $A_n=\frac{2}{n}$ avtar nokså langsomt når *n* øker, slik at vi må ha med ganske mange ledd før $A_n$ blir så liten at bidraget blir neglisjerbart.

La oss avslutte med et eksempel der vi ikke trenger å ta med så mange ledd før Fourier-rekka blir en meget god tilnærmelse til den funksjonen vi gikk ut fra.

***Eksempel 3.7.2***: Sett opp Fourier-rekka på amplitude-fase-form til funksjonen *f* gitt ved
$f(t) = \frac{1}{\pi}t^2$ når $-\pi < t < \pi$ , $\quad f(t+2\pi) = f(t)$ .

*Løsning*: Finner først koeffisientene på vanlig måte, der vi benytter at funksjonen åpenbart er jamn. Perioden er $p = 2L = 2\pi \iff L = \pi$ . Da blir:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^\pi \tfrac{1}{\pi}t^2 dt\right) = \frac{1}{\pi}\left[\tfrac{1}{\pi}\cdot\tfrac{1}{3}t^3\right]_0^\pi = \frac{1}{3\pi^2}\left(\pi^3 - 0\right) = \underline{\tfrac{1}{3}\pi} .$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \tfrac{1}{\pi}t^2\cdot\cos(nt)\,dt$$
$$= \frac{2}{\pi^2}\left[\frac{1}{n^3}\left(2nt\cos(nt) + \left(n^2t^2 - 2\right)\sin(nt)\right)\right]_0^\pi$$
$$= \frac{2}{\pi^2 n^3}\left(2n\pi\cos(n\pi) + \left(n^2\pi^2 - 2\right)\sin(n\pi) - 0 - 0\right)$$
$$= \frac{2}{\pi^2 n^3}\left(2n\pi\cdot(-1)^n + 0\right) = \underline{\frac{4}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n}{n^2}}$$

$b_n = \underline{0}$ fordi funksjonen er jamn.

Fourier-rekka blir da

$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nt) = \underline{\tfrac{1}{3}\pi + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt)} .$$

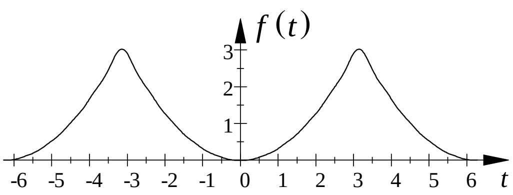
Vi tar hensyn til fortegnsskiftet ved å legge inn en fasevinkel $\varphi_n$ gitt ved

$$\varphi_n = \begin{cases} \pi & \text{når} \quad n = 1,3,5,\cdots \\ 0 & \text{når} \quad n = 2,4,6,\cdots \end{cases}$$

Da blir

$$\underline{\underline{F(t) = \tfrac{1}{3}\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi n^2}\cos\left(nt + \varphi_n\right)}} .$$

Når vi ser bort fra konstantleddet $\frac{1}{3}\pi$ , er amplituden i eksemplet foran gitt ved $A_n = \frac{4}{\pi n^2}$ .
Faktoren $n^2$ i nevner fører til at $A_n$ avtar raskt når *n* øker. Vi må derfor vente at det ikke trengs mange ledd i Fourier-rekka for å gi en god tilnærming til den opprinnelige funksjonen.




Grafen til venstre viser summen av de 10 første leddene i Fourier-rekka for funksjonen i eksemplet foran. Du ser at tilnærmingen til den opprinnelige funksjonen er mye bedre nå enn i det første eksemplet. Dette viser hvor viktig det er å holde øye med hvordan $A_n$ avhenger av *n*.

### 3.7.2. Fourier-rekker på kompleks form.

Vi går som vanlig rett på sak:

Fourier-rekka til en periodisk funksjon $f(t)$ med periode $p = 2L$ er

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right).$$

Rekka kan også skrives på ***kompleks*** form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{L}t}$$

der $c_n$ er en kompleks koeffisient gitt ved

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_T^{T+2L} f(t)e^{-in\frac{\pi}{L}t}dt.$$

Når $n \geq 1$ er:

$$c_{-n} = \tfrac{1}{2}(a_n + i \cdot b_n), \qquad c_n = \tfrac{1}{2}(a_n - i \cdot b_n),$$

$$a_n = c_n + c_{-n} = 2 \cdot \operatorname{Re}(c_n), \qquad b_n = i(c_n - c_{-n}) = -2 \cdot \operatorname{Im}(c_n).$$

Dessuten er $c_0 = a_0$.

Merk at når vi skriver rekka på kompleks form, må vi summere fra $n = -\infty$ til $n = +\infty$.

Dette var mye på en gang (og vi har faktisk mer på lager). Men la oss starte med å vise at det som står i ramma ovenfor faktisk stemmer. Vi starter med å omforme uttrykket $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{L}t}$ :

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{L}t} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) + i \cdot \sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n \left(\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) + i \cdot \sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)\right) + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) + i \cdot \sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)\right)\end{aligned}$$

Så skifter vi fortegn på summasjonsindeksen *n* i den første summen, og benytter at

$\sin(-v) = -\sin v$ og at $\cos(-v) = \cos v$.

Da får vi:

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{L}t} &= \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \left(\cos\left(-n\tfrac{\pi}{L}t\right) + i \cdot \sin\left(-n\tfrac{\pi}{L}t\right)\right) + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) + i \cdot \sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \left(\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) - i \cdot \sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)\right) + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) + i \cdot \sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)\right) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left((c_{-n} + c_n)\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) + i \cdot (-c_{-n} + c_n)\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)\right)\end{aligned}$$

Når vi nå sammenlikner koeffisienter i rekka over med koeffisientene i den ”vanlige” Fourier-rekka, ser vi direkte at

$$c_0 = a_0, \qquad a_n = c_n + c_{-n}, \qquad b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

Hvis vi nå løser ut $c_n$ og $c_{-n}$ av de to siste likningene, får vi at

$$c_n = \tfrac{1}{2}\left(a_n - i \cdot b_n\right) \qquad \text{og} \qquad c_{-n} = \tfrac{1}{2}\left(a_n + i \cdot b_n\right).$$

Men uttrykket for $c_n$ kan skrives

$$c_n = \tfrac{1}{2}a_n - i \cdot \tfrac{1}{2}b_n.$$

Og siden $a_n$ og $b_n$ er reelle tall, ser vi direkte at

$$\mathrm{Re}\left(c_n\right) = \tfrac{1}{2}a_n \quad \Leftrightarrow \quad a_n = 2 \cdot \mathrm{Re}\left(c_n\right)$$
$$\mathrm{Im}\left(c_n\right) = -\tfrac{1}{2}b_n \quad \Leftrightarrow \quad b_n = -2 \cdot \mathrm{Im}\left(c_n\right).$$

Nå gjenstår det ”bare” å vise at

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_T^{T+2L} f\left(t\right)e^{-in\frac{\pi}{L}t}dt$$

for alle $n \in \mathbb{Z}$. Det gjør vi slik:

Når $n = 0$, er

$$c_0 = \frac{1}{2L}\int_T^{T+2L} f\left(t\right)e^{0}dt = \frac{1}{2L}\int_T^{T+2L} f\left(t\right)dt = a_0$$

Når $n = 1, 2, 3, \cdots$ er

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2L}\int_T^{T+2L} f\left(t\right)e^{-in\frac{\pi}{L}t}dt = \frac{1}{2L}\int_T^{T+2L} f\left(t\right)\left(\cos\left(-n\tfrac{\pi}{L}t\right) + i \cdot \sin\left(-n\tfrac{\pi}{L}t\right)\right)dt \\ &= \frac{1}{2L}\int_T^{T+2L} f\left(t\right)\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt - i \cdot \frac{1}{2L}\int_T^{T+2L} f\left(t\right)\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt \\ &= \tfrac{1}{2}\left(a_n - i \cdot b_n\right) \end{aligned}$$

Når $n = -1, -2, -3, \cdots$ er

$$\begin{aligned} c_{-n} &= \frac{1}{2L}\int_T^{T+2L} f\left(t\right)e^{-i(-n)\frac{\pi}{L}t}dt = \frac{1}{2L}\int_T^{T+2L} f\left(t\right)\left(\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) + i \cdot \sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)\right)dt \\ &= \frac{1}{2L}\int_T^{T+2L} f\left(t\right)\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt + i \cdot \frac{1}{2L}\int_T^{T+2L} f\left(t\right)\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt \\ &= \tfrac{1}{2}\left(a_n + i \cdot b_n\right) \end{aligned}$$

Dermed har vi vist at

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_T^{T+2L} f\left(t\right)e^{-in\frac{\pi}{L}t}dt$$

for alle $n \in \mathbb{Z}$.

Dette må vi illustrere med et eksempel:

***Eksempel 3.7.3:*** I Eksempel 3.3.3 satte vi opp Fourier-rekka til funksjonen *f* gitt ved

$$f\left(t\right) = t^2 \quad \text{når } 0 \le t < 1, \quad f\left(t+1\right) = f\left(t\right)$$

a) Sett opp de komplekse Fourier-koeffisientene til denne funksjonen.
b) Finn Fourier-koeffisientene $a_n$ og $b_n$ på grunnlag av uttrykkene for $c_n$.

*Løsning:* Denne funksjonen har periode $p = 2L = 1 \quad \Leftrightarrow \quad L = \frac{1}{2}$.

a) Dersom $n = 0$, blir

$$c_0 = \frac{1}{2L}\int_T^{T+2L} f(t)e^{-i\cdot 0\cdot\frac{\pi}{L}t}dt = \frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}\int_0^1 t^2\cdot 1dt = \left[\tfrac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \underline{\underline{\tfrac{1}{3}}}.$$

Dersom $n \neq 0$, får vi etter to gangers delvis integrasjon (som ikke er vist i detalj):

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_T^{T+2L} f(t)e^{-in\frac{\pi}{L}t}dt = \frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}\int_0^1 t^2 e^{-in\cdot 2\pi t}dt$$

$$= \frac{1}{4\pi^3 n^3}\left[e^{-i\cdot 2\pi nt}\left(2i\pi^2 n^2 t^2 + 2\pi nt - i\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4\pi^3 n^3}\left(e^{-i\cdot 2\pi n}\left(2i\pi^2 n^2 + 2\pi n - i\right) - e^0\left(0 + 0 - i\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi^3 n^3}\left(\left(\cos(-2\pi n) + i\cdot\sin(-2\pi n)\right)\left(2\pi n + i\left(2\pi^2 n^2 - 1\right)\right) + i\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi^3 n^3}\left(\left(1 + 0i\right)\left(2\pi n + i\left(2\pi^2 n^2 - 1\right)\right) + i\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi^3 n^3}\left(2\pi n + i\cdot 2\pi^2 n^2 - i + i\right) = \frac{1}{4\pi^3 n^3}\left(2\pi n + i\cdot 2\pi^2 n^2\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2\pi^2 n^2} + i\cdot\frac{1}{2\pi n}}}$$

b) Når $n = 0$, blir $a_0 = c_0 = \underline{\underline{\tfrac{1}{3}}}$.

Når $n \neq 0$, finner vi $a_n$ og $b_n$ ved å plukke deler av $c_n$ slik:

$$a_n = 2\cdot\mathrm{Re}(c_n) = 2\cdot\frac{1}{2\pi^2 n^2} = \underline{\underline{\frac{1}{\pi^2 n^2}}}.$$

$$b_n = -2\cdot\mathrm{Im}(c_n) = -2\cdot\frac{1}{2\pi n} = \underline{\underline{-\frac{1}{\pi n}}}.$$

Dette stemmer med resultatene fra Eksempel 3.3.3.

Ved å sammenlikne løsningen av Eksempel 3.7.3 ovenfor med løsningen av Eksempel 3.3.3, ser vi at arbeidsmengden er omtrent lik i begge eksemplene. Faktisk kan det noen ganger være lettere å finne $a_n$ og $b_n$ ved å gå veien om $c_n$, både fordi vi da slipper unna med å løse ett integral istedenfor to, og fordi det ofte er lettere å løse integral med eksponential-faktorer enn å løse integral med sinus- og cosinus-faktorer. Ulempen er at vi til slutt må splitte opp $c_n$ i en realdel og en imaginærdel.

Når vi sammenlikner ei Fourier-rekke på amplitude-fase-form med den tilsvarende Fourier-rekka på kompleks form, får vi et par nyttige resultater:

$$A_n = 2|c_n|, \qquad \varphi_n = \arg(c_n).$$

Dette ser vi slik: Fourier-rekka på amplitude-fase-form er

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t + \varphi_n\right)$$

der

$$A_n = \sqrt{a_n^{\,2} + b_n^{\,2}}\,, \ \tan\varphi_n = -\frac{b_n}{a_n}.$$

Av sammenhengen

$$c_n = \tfrac{1}{2}a_n - i\cdot\tfrac{1}{2}b_n$$

ser vi at

$$|c_n| = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}a_n\right)^2 + \left(-\tfrac{1}{2}b_n\right)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4}a_n + \tfrac{1}{4}b_n} = \tfrac{1}{2}\sqrt{a_n^{\,2} + b_n^{\,2}} = \tfrac{1}{2}A_n \quad \Leftrightarrow \quad A_n = 2|c_n|.$$

Videre ser vi at argumentvinkelen til $c_n$ er gitt ved

$$\tan(\arg(c_n)) = \frac{-\tfrac{1}{2}b_n}{\tfrac{1}{2}a_n} = -\frac{b_n}{a_n} = \tan(\varphi_n) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_n = \arg(c_n).$$

Det faktum at absoluttverdi og argumentvinkel til $c_n$ gir oss amplitude og fasevinkel til den tilhørende cosinus-svingningen, gjør at vi har stor nytte av Fourier-rekker på kompleks form.

### 3.7.3. Fourier-transformen.

Vi har hittil kun arbeidet med periodiske funksjoner, eller vi har brukt halvperiodiske utvidelser til å danne periodiske funksjoner. Men hvis vi skal studere frekvensinnholdet i ikke-periodiske funksjoner, er det best å bruke **Fourier-transformen**. Den er definert slik:

Gitt en stykkevis kontinuerlig funksjon $f(t)$.

Fourier-transformen til *f* er da

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-i\omega t}dt.$$

Når vi kjenner en Fourier-transformen $F(\omega)$,

kan vi finne den tilhørende funksjonen $f(t)$ slik:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}dt.$$

Det er påfallende likheter mellom Fourier-rekker på kompleks form og Fourier-transformen. Jeg minner om at Fourier-rekka på kompleks form er

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{L}t}$$

der

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_T^{T+2L} f(t)e^{-in\frac{\pi}{L}t}dt\,.$$

La oss først se på størrelsen $\omega$ som inngår i Fourier-transformen. Du husker sikkert at frekvensen til funksjoner av typen $\cos\left(n\frac{\pi}{L}t\right)$ og $\sin\left(n\frac{\pi}{L}t\right)$ er

$$f_n = \tfrac{n}{2L}\,.$$

Den tilhørende *vinkel*frekvensen er

$$\omega_n = 2\pi f_n = 2\pi\cdot\tfrac{n}{2L} = n\tfrac{\pi}{L}\,.$$

Dermed kan vi skrive

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_T^{T+2L} f(t)e^{-in\frac{\pi}{L}t}dt = \frac{1}{2L}\int_T^{T+2L} f(t)e^{-i\omega_n t}dt\,.$$

Med unntak av faktoren $\frac{1}{2L}$ og integrasjonsgrensene er dette uttrykket for $c_n$ identisk med definisjonen av Fourier-transformen. Dette tyder på at Fourier-transformen $F(\omega)$ spiller omtrent samme rolle som Fourier-koeffisienten $c_n$.

Men det er en viktig forskjell til: I uttrykket for $c_n$ inngår $\omega_n = n\frac{\pi}{L}$, som kun kan ha visse verdier bestemt av $n = 1, 2, 3, \cdots$. Men i definisjonen av Fourier-transform er $\omega$ en *kontinuerlig* variabel. Dette innebærer at mens $\{c_n\}$ kan oppfattes som en *tallfølge*, er Fourier-transformen $F(\omega)$ en *funksjon* av en kontinuerlig variabel $\omega$.

Dette fører også til at når vi bruker kompleks Fourier-rekke, er

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{L}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t}\,.$$

Når vi bruker Fourier-transform, er

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}dt\,.$$

Igjen ser vi likheten mellom Fourier-transform og kompleks Fourier-rekke.

Du blir neppe overrasket når jeg nå skal vise at vi kan finne sammenhenger mellom Fourier-transformen og koeffisientene $a_n$ og $b_n$ i den "vanlige" Fourier-rekka. Vi starter med å anta at *f* er en funksjon som er forskjellig fra null i et intervall fra $t = T$ til $t = T + 2L$, og som er lik null utenfor dette intervallet. Da blir Fourier-transformen til *f*:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \int_T^{T+2l} f(t)\big(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)\big)dt \\ &= \int_T^{T+2L} f(t)\cos(\omega t)dt - i\int_T^{T+2L} f(t)\sin(\omega t)dt \end{aligned}$$

Sett så $\omega = n\frac{\pi}{L}$, og sammenlikn med formlene for $a_n$ og $b_n$ i den vanlige Fourier-rekka. Da ser du at:

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_T^{T+2L} f(t)dt = \frac{1}{2L}\cdot F(0)$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_T^{T+2L} f(t)\cdot\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = \frac{1}{L}\cdot\mathrm{Re}\left(F\left(n\tfrac{\pi}{L}\right)\right) \qquad \text{når } n = 1,\, 2,\, 3,\, \cdots$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_T^{T+2L} f(t)\cdot\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = -\frac{1}{L}\cdot\operatorname{Im}\left(F\left(n\tfrac{\pi}{L}\right)\right) \qquad \text{når } n = 1, 2, 3, \cdots$$

Dersom vi sammenlikner med Fourier-rekka på amplitude-fase-form, får vi flere analogier:

$$A_n = \sqrt{a_n{}^2 + b_n{}^2} = \frac{1}{L}\cdot\left|F\left(n\tfrac{\pi}{L}\right)\right| \qquad \text{når } n = 1, 2, 3, \cdots$$

$$\tan\varphi_n = -\frac{b_n}{a_n} = \tan\left(\arg\left(F\left(n\tfrac{\pi}{L}\right)\right)\right) \qquad \text{når } n = 1, 2, 3, \cdots$$

Disse sammenhengene kan forlede deg til å tro at Fourier-transformen kun er en annen måte å beregne Fourier-koffisienter på. Men det er slett ikke tilfelle. Det er flere prinsipielle forskjeller mellom Fourier-rekker og Fourier-transform:

- Fourier-rekker er kun definert for *periodiske* funksjoner, mens Fourier-transform er definert for enhver stykkevis kontinuerlig funksjon.
- Fourier-rekker bygger opp de periodiske funksjonene av sinus-svingninger med bestemte frekvenser av typen $f_n = \frac{n}{2L}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$, mens Fourier-transformen er en kompleks funksjon av en *kontinuerlig* variabel $\omega$ som kan oppfattes som en frekvens.

Nå er tiden inne til å se et eksempel:

***Eksempel 3.7.3*:** En funksjon $g$ er gitt ved

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{når} \quad 0 \le t < \pi \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

a) Finn Fourier-transformen til *g*.

b) Bruk resultatet til å finne Fourier-koeffisientene $a_n$ og $b_n$ for funksjonen

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{når} \quad t \in \langle -\pi, 0\rangle \\ 1 & \text{når} \quad t \in [0, \pi\rangle \end{cases}, \qquad f(t + 2\pi) = f(t)$$

fra Eksempel 3.3.1.

*Løsning:*

a) Vi bruker definisjonen av Fourier-transform, og får

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\cdot e^{-i\omega t}dt = \int_0^{\pi} 1\cdot e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{-i\omega}\left[e^{-i\omega t}\right]_0^{\pi} = \underline{\underline{\frac{i}{\omega}\left(e^{-i\omega\pi} - 1\right)}}.$$

b) Funksjonen *f* er periodisk med periode $p = 2L = 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad L = \pi$. Innenfor intervallet $\langle -\pi, \pi\rangle$ er *f* identisk med *g*. Utenfor dette intervallet er $g(t) = 0$. Da kan vi finne koeffisientene til Fourier-rekka til funksjonen *f* ved å sette inn

$$\omega = n\cdot\frac{\pi}{L} = n\cdot\frac{\pi}{\pi} = n$$

i Fourier-transformen, og får

$$F(n) = \frac{i}{n}\left(e^{-in\pi} - 1\right) = \frac{i}{n}\left(\cos(-n\pi) + i\sin(-n\pi) - 1\right)$$

$$= \frac{i}{n}\left(\cos(n\pi) - i\sin(n\pi) - 1\right) = \frac{i}{n}\left((-1)^n - i\cdot 0 - 1\right).$$

$$= \frac{i}{n}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} \frac{-2i}{n} & \text{når} \quad n = 1, 3, 5, \cdots \\ 0 & \text{når} \quad n = 2, 4, 6, \cdots \end{cases}$$

Dette gir da

$$a_n = \frac{1}{L}\mathrm{Re}\big(F(n)\big) = \frac{1}{\pi}\cdot 0 = \underline{0} \quad \text{når } n = 1, 2, 3, \cdots$$

$$b_n = -\frac{1}{L}\mathrm{Im}\big(F(n)\big) = \begin{cases} -\frac{1}{\pi}\cdot\left(-\frac{2}{n}\right) = \frac{2}{n\pi} & \text{når} \quad n = 1, 3, 5, \cdots \\ 0 & \text{når} \quad n = 2, 4, 6, \cdots \end{cases}$$

Tilfellet $a_0$ må spesialbehandles, fordi vi får et "null-over-null"-uttrykk når vi setter inn $\omega = n = 0$. Ved hjelp av L'Hôpitals regel får vi:

$$a_0 = \frac{1}{2L}F(0) = \frac{1}{2\pi}\cdot\lim_{\omega\to 0}\frac{i}{\omega}\left(e^{-i\omega\pi}-1\right) = \frac{i}{2\pi}\cdot\lim_{\omega\to 0}\frac{e^{-i\omega\pi}-1}{\omega}$$

$$= \frac{i}{2\pi}\cdot\lim_{\omega\to 0}\frac{-i\pi e^{-i\omega\pi}}{1} = \frac{i\cdot(-i\pi)}{2\pi}e^{0} = \underline{\frac{1}{2}}$$

Disse koeffisientene stemmer helt med resultatene fra eksempel 3.3.1.

La oss avslutte med å antyde hvordan vi kan komme fra Fourier-rekka på kompleks form og til Fourier-transformen. Vi har tidligere funnet at en periodisk funksjon med periode $p = 2L$ har en frekvens $f_1 = \frac{1}{2L}$ og en *vinkel*frekvens

$$\omega_1 = 2\pi f_1 = \frac{\pi}{L} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{L} = \frac{\omega_1}{\pi}.$$

Da kan vi skrive

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_T^{T+2L} f(t)e^{-in\frac{\pi}{L}t}dt = \frac{\omega_1}{2\pi}\int_T^{T+2L} f(t)e^{-n\omega_1 t}dt.$$

Fourier-rekka på kompleks form kan da skrives

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{L}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\omega_1}{2\pi}\int_T^{T+2L} f(t)e^{-in\omega_1 t}dt\right)e^{in\omega_1 t}.$$

Nå begynner moroa. Vi skal anta at $L\to\infty$. Da vil $\omega_1\to 0$. Under denne grenseovergangen vil frekvensene av typen $n\omega_1$ komme stadig nærmere hverandre, og kan ved grense-overgangen betraktes som en *kontinuerlig* frekvens $\omega$. Den minst tenkelige øking av frekvens blir da

$$\Delta\omega = (n+1)\omega_1 - n\omega_1 = \omega_1.$$

Ved grenseovergangen er det naturlig å erstatte $\Delta\omega$ med $d\omega$. Dessuten må vi integrere fra $-\infty$ til $\infty$ istedenfor fra $T$ til $T+2L$, og summasjonen kan erstattes med et integral fra $-\infty$ til $\infty$. Når vi utfører alt dette, får vi:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt\right)e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

der

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt.$$

Og det er nettopp det vi skulle vise.

# 4. Blandede oppgaver.

## *4.1. Oppgaver.*

**Oppgave 1**

Undersøk om disse rekkene konvergerer eller divergerer:

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2+2}$$

b) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n-1)(n+1)}$$

c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$$

d) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ln n$$

e) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$$

**Oppgave 2**

Finn konvergensintervallet for hver av disse rekkene:

a) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+1)^k}{k^2}.$$

b) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+2}(n+1)} (x-2)^n .$$

c) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^n .$$

d) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} (x-2)^n .$$

e) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} (x-1)^n .$$

f) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot 2^k}{k+1} (x-1)^k .$$

g) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1} x^n .$$

h) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} (x-1)^n .$$

**Oppgave 3**

a) Vi har funksjonen $f(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{x}$.

1) Sett opp Maclaurin-rekka til $f(x)$. Ta med det generelle leddet.

2) Bruk Maclaurin-rekka til å finne $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Kontroller svaret ved å bruke L'Hôpitals regel.

3) Løs $\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\, dx$ numerisk, med 3 korrekte desimaler.

b) Sett opp ei potensrekke (Maclaurin-rekke) for

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

og bruk resultatet til å finne Maclaurin-rekka til

$$g(x) = \arctan x .$$

c) Sett opp Maclaurin-rekka til funksjonen

$$f(x) = \sin(2x)$$

og bruk resultatet til å finne summen av rekka

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2^{2k}}{(2k+1)!} = 1 - \frac{2^2}{3!} + \frac{2^4}{5!} - \frac{2^6}{7!} + \ldots$$

d) Bruk de to første leddene i Taylor-rekka for $\sin x$ til å finne et tilnærmet uttrykk for

$$\int_0^1 \sqrt{x} \cdot \sin x \, dx .$$

Finn en øvre grense for unøyaktigheten i beregningen.

e) 1) Vis at rekka

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \frac{4}{5!} + \cdots + \frac{n-1}{n!} + \cdots$$

konvergerer.

2) Sett opp ei rekke for $\frac{e^x}{x}$, og bruk denne til å finne summen av rekka i 1).

f) Bruk Maclaurin-rekka for $\sin x$ til å sette opp ei Maclaurin-rekke for

$$\frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}.$$

g) Finn Maclaurin-rekka til funksjonen

$$f(x) = \frac{2x - \ln(1+2x)}{x^2}.$$

Bruk rekka til å bestemme grenseverdien $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

h) Finn Maclaurin-rekka til funksjonen

$$f(x) = \frac{x}{\left(1-x^2\right)^2}.$$

Det kreves ikke at du finner konvergensintervallet.

i) Vi har definert *hyperbolsk sinus* som

$$\sinh(x) = \tfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right).$$

Bruk Maclaurin-rekka for $e^x$ til å sette opp Maclaurin-rekka for $\sinh(x)$.

j) Bruk de to første leddene i Taylor-rekka for $\sin x$ til å finne et tilnærmet uttrykk for

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{x}\sin x dx,$$

og finn en øvre grense for usikkerheten ved denne beregningen.

## Oppgave 4

a) Vi har gitt rekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^{n-1}$$

1) Finn rekkas konvergensområde.

2) Vis at summen av rekka $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ blir $\displaystyle\frac{2}{2-x}$ når $-2 < x < 2$.

Bruk dette til å finne summen av rekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

b) For hvilke verdier av $x$ konvergerer rekka

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \text{ ?}$$

Sett opp en formel for summen av rekka når den konvergerer. Ta utgangspunkt i rekka over, og finn summen av rekka

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n+2}x^{n+2} + \cdots.$$

(Det kreves ikke at du skal finne konvergensområdet.)

c) Benytt at $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$ til å sette opp ei potensrekke for

$$f(x) = \sin x\cos x.$$

Finn deretter ei potensrekke for

$$\int \frac{\sin x\cos x}{x} dx.$$

d) Bruk Maclaurin-rekka til $\ln(x+1)$ til å vise at

$$\int \frac{1}{x}\ln(x+1)dx = x - \frac{1}{2^2}x^2 + \frac{1}{3^2}x^3 - \frac{1}{4^2}x^4 + \cdots$$

forutsatt at rekka konvergerer. Skriv rekka ved hjelp av summasjonssymbol, og finn konvergensområdet til rekka.

e) Vis ved hjelp av Taylor-rekka for $\cos x$ at

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{x} dx = \ln x - \frac{1}{2!}x + \frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6!}\cdot\frac{1}{3}x^3 + \cdots$$

Skriv rekka

$$-\frac{1}{2!}x+\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6!}\cdot\frac{1}{3}x^3+\cdots$$

ved hjelp av summasjonstegn, og finn konvergensområdet for denne rekka. For hvilke verdier av *x* konvergerer rekka i starten av oppgaven?

f) Forklar hvorfor rekka

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{3^n}$$

konvergerer når $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$, og at summen av rekka da er $\dfrac{3}{3-x^2}$.

Bruk resultatet ovenfor til å finne summen av rekka

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3^n}x^{2n-1}.$$

g) Bruk bl.a. Taylor-rekka til $\cos x$ til å vise at

$$\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}x^{n-1}.$$

Finn konvergensintervallet for rekka ovenfor.
Skriv ut de 3 første leddene i rekka ovenfor, og bruk dem til å finne et tilnærmet uttrykk for

$$\int_0^1\frac{1-\cos\left(\sqrt{x}\right)}{x}dx.$$

Finn også en øvre grense for unøyaktigheten i beregningen.

## Oppgave 5

a) Vis at $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}x^n=\frac{2x}{x+2}$.

b) For hvilke verdier av *x* konvergerer rekka i a)?

c) Bruk rekka i a) til å finne summen

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\left(-\tfrac{1}{2}x\right)^{n-1}.$$

## Oppgave 6

a) For hvilke verdier av *x* konvergerer rekka

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}x^{2n+1}\ ?$$

b) Vis at når rekka i a) konvergerer, så er rekkas sum gitt ved

$$S(x)=\frac{4x}{4-x^2}.$$

c) Bruk resultatet ovenfor til å finne Maclaurin-rekka til funksjonen

$$f(x)=\ln\left(4-x^2\right).$$

## Oppgave 7

a) For hvilke verdier av $x$ konvergerer rekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} x^n \ ?$$

b) Ta utgangspunkt i at

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n ,$$

og finn ei potensrekke for

$$\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt .$$

## Oppgave 8

a) Finn konvergensområdet for rekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n} .$$

b) Vis at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2-x}$$

når rekka konvergerer.
Hva blir konvergensområdet for rekka.

c) Bruk resultatene ovenfor til å finne summen av rekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n} .$$

## Oppgave 9

Vi har gitt funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^2} .$$

a) Vis at Maclaurin-rekka til funksjonen er

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} x^n .$$

b) Finn konvergensintervallet for rekka ovenfor.

c) Bruk resultatene ovenfor til å finne summen av disse rekkene:

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{2^n}$

2) $\displaystyle\frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2^2} x + \frac{3 \cdot 4}{2^3} x^2 + \cdots + \frac{n(n+1)}{2^n} x^{n-1} + \cdots$

(Det kreves ikke at du skal finne konvergensintervallene til disse rekkene).

## Oppgave 10

a) La $S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

Vis at $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$,

og bruk dette til å finne et enklere uttrykk for $S_N$.

Konvergerer rekken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ ?

Svaret skal begrunnes.

b) Bestem ved hjelp av forholdstesten konvergensområdet til rekka

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

## Oppgave 11

a) Beregn koeffisientene $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$, …, $a_n$ i rekkeutviklingen

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + , \quad |x| < 1.$$

b) Vis at

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\,dx$$

ved å substituere $u = \frac{1}{x}$.

Bruk så rekka i a) til å beregne integralet

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\,dx$$

med seks riktige desimaler.

## Oppgave 12

a) Finn konvergensområdet for rekka

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(x-1)^n.$$

b) Finn Taylor-rekka til

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

rundt $x = 1$.

## Oppgave 13

Finn Taylor-polynomet av 3. grad for

$$f(x) = \sqrt{x}$$

rundt $x = 4$.

**Oppgave 14**

a) Vis at Taylor-rekka til funksjonen

$$f(x) = \frac{2}{x^3}$$

rundt $x = 1$ blir

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n+2)(x-1)^n .$$

b) Finn konvergensintervallet for rekka ovenfor.

c) Bruk resultatene ovenfor til å finne summen av rekka

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2^n} .$$

**Oppgave 15**

a) Vis at Maclaurin-rekka til

$$f(x) = \ln(x+2)$$

er

$$\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n} x^n .$$

b) Finn konvergensintervallet for rekka i a).

c) Finn summen av rekka

$$\frac{1}{1 \cdot 2^1} - \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n} + \cdots .$$

d) Forklar hvorfor

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \frac{1}{1+x} \text{ når } -1 < x < 1,$$

og kontroller svaret i c) bl.a. ved å integrere denne sammenhengen.

**Oppgave 16**

a) Finn konvergensområdet for rekka

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} .$$

b) 1) Ta utgangspunkt i Taylor-rekka for $\ln(x+1)$, og sett opp Taylor-rekka for $\ln(1-x)$.

2) Vis at Taylor-rekka for $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ blir rekka i del a) ovenfor.

3) Finn summen av rekka $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \cdot 2^{2n+1}}$ .

## Oppgave 17

a) Finn konvergensområdet for rekka

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2} x^n .$$

b) Sett opp Maclaurin-rekka for

$$f(x) = \frac{x - \ln(x+1)}{x^2},$$

og bruk resultatet til å finne summen av rekka

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\cdot 2^n} .$$

## Oppgave 18

a) Vis at Maclaurin-rekka til funksjonen

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot \sin\left(\sqrt{x}\right)$$

blir

$$x - \tfrac{1}{3!}x^2 + \tfrac{1}{5!}x^3 - \tfrac{1}{7!}x^4 + \cdots \quad .$$

b) Benytt resultatet til å finne summen av rekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^{n+1}\cdot 2^n}{(2n-1)!} .$$

c) Finn en tilnærmet verdi for

$$\int_0^1 \sqrt{x} \sin\left(\sqrt{x}\right) dx .$$

## Oppgave 19

Bestem Fourier-rekka til hver av de periodiske funksjonene nedenfor. Jeg vil anbefale at du først tegner grafen til funksjonen, og undersøker om funksjonen er jamn, odde, eller ingen av delene.

I de fleste løsningsforslagene er ubestemte integral løst med dataverktøy.

a) $f(t) = t^3$ når $-1 < t \le 1$, $f(t+2) = f(t)$.

b) $f(t) = t^3 - t$ når $-1 < t < 1$, $f(t+2) = f(t)$.

c) $f(t) = t^3 - 4t$ når $-2 \le t < 2$, $f(t+4) = f(t)$.

d) $f(t) = \begin{cases} \cos t & \text{når} \quad 0 \le t < \pi \\ 0 & \text{når} \quad \pi \le t < 2\pi \end{cases}$, $f(t+2\pi) = f(t)$.

e) $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{når} \quad 0 \le t < 1 \\ 0 & \text{når} \quad 1 \le t < 3 \\ -1 & \text{når} \quad 3 \le t < 4 \end{cases}$, $f(t+4) = f(t)$.

f) $$f(t)=\begin{cases}-1 & \text{når} \quad -2<t<-1 \\ t & \text{når} \quad -1<t<1 \\ 1 & \text{når} \quad 1<t<2\end{cases}, \qquad f(t+4)=f(t).$$

g) $$f(t)=\begin{cases}1-t^2 & \text{når} \quad -1\le t\le 1 \\ 0 & \text{når} \quad 1<t<3\end{cases}, \qquad f(t+4)=f(t).$$

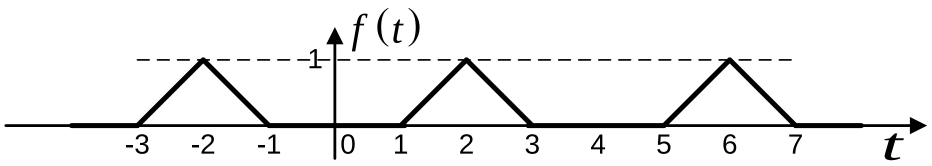
**Oppgave 20**
I oppgavene nedenfor skal du finne Fourier-rekka til en jamn eller odde halvperiodisk utvidelse av hver av de gitte funksjonene. Du bør starte med å tegne graf av de periodiske funksjonene.

a) Finn Fourier-rekka til den jamne halvperiodiske utvidelsen av
$$f(t)=e^t,\ 0\le t<1.$$

b) Finn Fourier-rekka til den odde halvperiodiske utvidelsen til
$$f(t)=(t-1)^2,\ t\in\langle 0,1\rangle.$$

c) Finn Fourier-rekka til den jamne halvperiodiske utvidelsen av
$$f(t)=(t-1)^2,\ t\in[0,3].$$

**Oppgave 21**
På figuren nedenfor ser du grafen til en periodisk funksjon $f(t)$:




Skriv ned funksjonsuttrykket til $f(t)$, og finn Fourier-rekka til funksjonen.

**Oppgave 22**
a) Undersøk om rekka
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{16n^2-1}$$
konvergerer eller divergerer.

b) En periodisk funksjon er gitt ved
$$f(t)=\cos t \quad \text{når} \quad 0\le t<\tfrac{1}{2}\pi.$$
$$f\left(t+\tfrac{1}{2}\pi\right)=f(t).$$

1) Tegn grafen til $f$.
2) Vis at Fourier-rekka til $f$ blir

$$\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{16n^2-1}\cos(4n\cdot t)+\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{16n^2-1}\sin(4n\cdot t).$$

c) Bruk Fourier-rekka i b) til å finne summen av rekka i a).

## Oppgave 23

En funksjon er gitt ved

$$f(t)=\begin{cases}0 & \text{når} \quad -2<t<-1\\ t & \text{når} \quad -1\le t\le 1\\ 0 & \text{når} \quad 1<t<2\end{cases}, \qquad f(t+4)=f(t).$$

Tegn grafen til funksjonen, og finn Fourier-rekka til funksjonen.
Finn deretter summen av den uendelige rekka

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots$$

## Oppgave 24

a) Undersøk om rekka

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$$

konvergerer eller divergerer.

b) Bestem konvergensområdet for rekka

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{k!}(x-1)^k$$

c) En periodisk funksjon $f$ er gitt ved

$$f(t)=\begin{cases}-t & \text{når} \quad -1<t\le 0\\ -1 & \text{når} \quad 0<t\le 1\end{cases}, \qquad f(t+2)=f(t).$$

1) Tegn grafen til $f$ når $t\in\langle -2, 4\rangle$.
2) Vis at Fourier-rekka til $f$ kan skrives

$$-\frac{1}{4}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos((2k-1)\pi t)+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n-1}{n}\sin(n\pi t)$$

3) Bruk denne Fourier-rekka til å beregne summen av rekka

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}.$$

## Oppgave 25

a) Vi har gitt rekka $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3}.$$

Vis at rekka konvergerer.

b) 1) En funksjon *g* er gitt ved
$$g(t) = t^2 - 2, \; 0 \le t < 2.$$
Tegn grafen til funksjonen.

2) En funksjon *f* er den odde halvperiodiske utvidelsen til *g*.
Tegn grafen til minst 2 av periodene til *f*.

3) Vis at Fourier-rekka til *f* kan skrives
$$\frac{-32}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^3}\sin\left((2k-1)\frac{\pi}{2}t\right) - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin(k\pi t).$$

4) I uttrykket for Fourier-rekka til *f* skal du sette inn $t = 1$. Bruk resultatet til å finne summen av rekka i a).

## Oppgave 26

a) Vi skal først se på rekka
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n^2}.$$
Bestem konvergensintervallet for rekka.

b) Så skal vi se på integralet
$$\int_0^x \frac{\ln(t+1)}{t}dt.$$

1) Vis bl.a. ved hjelp av Taylor-rekka for $\ln(x+1)$ at
$$\int_0^x \frac{\ln(t+1)}{t}dt = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n^2}.$$

2) Benytt de 5 første leddene av rekka til å finne et tilnærmet uttrykk for
$$\int_0^1 \frac{\ln(t+1)}{t}dt.$$
Finn også en øvre grense for unøyaktigheten av denne tilnærmede beregningen.

c) Til slutt skal vi se på den periodiske funksjonen *f* gitt ved
$$f(t) = 1 - t^2 \text{ når } -1 < t \le 1, \; f(t+2) = f(t).$$

1) Tegn en skisse av $f(t)$.

2) Vis at Fourier-rekka til *f* er
$$\frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi t).$$

3) Bruk bl.a. denne Fourier-rekka og resultatene fra del b) til å finne et eksakt uttrykk for
$$\int_0^1 \frac{\ln(t+1)}{t}dt.$$

**Oppgave 27**
En funksjon er gitt ved

$$f(t) = 2 - t \text{ når } 0 < t < 1.$$

a) Tegn grafen til den odde halvperiodiske utvidelsen av denne funksjonen, og vis at Fourier-rekka til denne odde halvperiodiske utvidelsen blir

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2-(-1)^n}{n}\cdot\sin(n\pi t).$$

b) Skriv ned den rekka som framkommer når du setter inn $t = \frac{1}{2}$ i Fourier-rekka ovenfor, og bruk resultatet til å finne et eksakt uttrykk for summen av rekka

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

## 4.2. Løsning på blandede oppgaver.

**Oppgave 1**

a) Bruker grensesammenlikningstesten, og sammenlikner med den harmoniske rekka $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ som jeg vet divergerer:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n+3}{\cancel{n^2+2}}}{\dfrac{1}{\cancel{n}}}\cdot\frac{n\cancel{(n^2+2)}}{\cancel{n}(n^2+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n}{n^2+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{3}{n}}{1+\dfrac{2}{n^2}} = 1$$

slik at også $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n^2+2}$ divergerer.

b) Bruker grensesammenlikningstesten, og sammenlikner med rekka $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ som jeg vet divergerer:

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n}{(n-1)(n+1)}}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\dfrac{1}{n^2}} = \underline{\underline{1}}.$$

Siden $L \neq 0$, må også rekka $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n-1)(n+1)}$ divergere.

c) Bruker forholdstesten, og får:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1)+1)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}}\right| = \frac{\frac{((n+1)!)^2}{\cancel{(2n+3)!}}}{\frac{(n!)^2}{\cancel{(2n+1)!}}} \cdot \frac{\cancel{(2n+3)}!}{\cancel{(2n+1)}!\cdot(2n+2)(2n+3)}$$

$$= \frac{(\cancel{n!}(n+1))^2}{\cancel{(n!)}^2(2n+2)(2n+3)} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)}$$

slik at

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} = \lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^2}{(2+\frac{2}{n})(2+\frac{3}{n})} = \frac{(1+0)^2}{(2+0)(2+0)} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

d.v.s. at rekka konvergerer.

d) For å undersøke om rekka $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\ln n$ konvergerer, sammenlikner jeg med

$f(x) = \frac{1}{x^2}\ln x$, som integreres med delvis integrasjon:

$$\int \overbrace{\frac{1}{x^2}}^{u'}\overbrace{\ln x}^{v}\,dx = -\overbrace{\frac{1}{x}}^{u}\cdot\overbrace{\ln x}^{v} - \int -\overbrace{\frac{1}{x}}^{u}\cdot\overbrace{\frac{1}{x}}^{v'}dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$$

$$= \underline{-\frac{1}{x}(\ln x + 1) + C}$$

Da blir

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\ln x\,dx = \left[-\frac{1}{x}(\ln x+1)\right]_1^{\infty} = -\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln x+1}{x}\right) + \frac{\ln 1+1}{1} = 0+1 = \underline{1}$$

der grenseverdien er funnet med L'Hôpitals regel:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln x+1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+0}{1} = 0\,.$$

Siden integralet eksisterer, må også rekka konvergere.

e) Bruker integraltesten, og substituerer

$$u = \ln x \quad\Rightarrow\quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{x}dx = du\,.$$

$$\int \frac{1}{x\cdot\ln x}dx = \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C = \ln|\ln x| + C\,.$$

Da blir

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x\cdot\ln x}dx = \left[\ln(\ln x)\right]_2^{\infty} = \lim_{x\to\infty}(\ln(\ln x)) - \ln(\ln 2)\,.$$

Men siden $\ln x \to \infty$ når $x \to \infty$, vil integralet divergere. Da må også rekka divergere.

**Oppgave 2**

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x+1)^k}{k^2}$.

Bruker forholdstesten:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{(x+1)^n}{n^2}}\right| = \left|\frac{n^2}{(n+1)^2}(x+1)\right| = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}|x+1|.$$

Men $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$ slik at rekka konvergerer når $|x+1|<1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{-2<x<0}$.

Undersøker endepunktene:

$x=-2$ gir rekka $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$ som konvergerer (alternerende rekke med ledd som går mot null).

$x=0$ gir rekka $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ som vi vet konvergerer f.eks. etter integral-kriteriet ($\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty}=1$ slik at integralet eksisterer).

Altså vil rekka konvergere når $\underline{\underline{x\in[-2,\,0]}}$.

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+2}(n+1)}(x-2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ der $a_n=\dfrac{(-1)^n}{2^{n+2}(n+1)}(x-2)^n$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+3}(n+2)}(x-2)^{n+1}}{\frac{(-1)^n}{2^{n+2}(n+1)}(x-2)^n}\right| = \left|\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{x-2}{2}\right| = \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\cdot\left|\frac{x-2}{2}\right|$$

slik at

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\cdot\left|\frac{x-2}{2}\right|=\frac{1+0}{1+0}\cdot\left|\frac{x-2}{2}\right|=\left|\frac{x-2}{2}\right|.$$

Konvergens når

$$\left|\frac{x-2}{2}\right|<1 \quad\Leftrightarrow\quad -1<\frac{x-2}{2}<1 \quad\Leftrightarrow\quad -2<x-2<2 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{0<x<4}.$$

Må undersøke endepunktene:

Når $x=0$, blir rekka

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+2}(n+1)}(-2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{2^{n+2}(n+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4(n+1)}.$$

Dette er den harmoniske rekka (multilplisert med $\frac{1}{4}$). Altså divergerer rekka.

Når $x = 4$, blir rekka

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+2}(n+1)} 2^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^2(n+1)} .$$

Dette er en strengt avtakende, alternerende rekke der leddene konvergerer mot null.
Da vil også rekka konvergere.
Altså konvergerer rekka når $\underline{\underline{0 < x \le 4}}$.

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^n$ .

Bruker forholdstesten:

$$\left| \frac{\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2(n+1)+1)!} x^{n+1}}{\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^n} \right| = \left| \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} x \right| = \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} \cdot |x|$$

Men $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} = 0$, slik at rekka konvergerer for alle $\underline{\underline{x \in \mathbb{R}}}$.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}(x-2)^n$ .

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)^2}(x-2)^{n+1}}{\dfrac{2^n}{n^2}(x-2)^n} \right| = \left| \frac{2^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{n^2}{(n+1)^2}(x-2) \right| = \underline{\frac{2n^2}{n^2+2n+1}|x-2|}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2+2n+1} \cdot |x-2| = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{1+0+0} \cdot |x-2| = \underline{2 \cdot |x-2|}$$

Rekka konvergerer når

$$2|x-2| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < 2(x-2) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\tfrac{1}{2} < x-2 < \tfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\tfrac{3}{2} < x < \tfrac{5}{2}}.$$

Endepunkter:
Når $x = \frac{3}{2}$, blir rekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}\left(\tfrac{3}{2}-2\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

som konvergerer.
Når $x = \frac{5}{2}$, blir rekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}\left(\tfrac{5}{2}-2\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}\left(\tfrac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

som også konvergerer.
Altså er konvergensintervallet $\underline{\underline{\tfrac{3}{2} \le x \le \tfrac{5}{2}}}$.

e) Rekka er $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}(x-1)^n$.

Bruker forholdstesten:

$$\left|\frac{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}(x-1)^{n+1}}{\frac{n^2}{3^n}(x-1)^n}\right| = \left|\frac{(n+1)^2}{n^2}\cdot\frac{3^n}{3^{n+1}}(x-1)\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \left|\cdot\tfrac{1}{3}(x-1)\right| = \tfrac{1}{3}\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^2|x-1|.$$

Men $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = (1+0)^2 = 1$,

slik at rekka konvergerer når

$$\tfrac{1}{3}|x-1|<1 \quad\Leftrightarrow\quad |x-1|<3 \quad\Leftrightarrow\quad -3<x-1<3 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{-2<x<4}.$$

Må undersøke endepunktene:

$\underline{x=-2}$: Rekka blir

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}(-2-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}(-3)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot n^2 \text{ som divergerer.}$$

$\underline{x=4}$: Rekka blir

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}(4-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}3^n = \sum_{n=1}^{\infty}n^2 \text{ som også divergerer.}$$

Følgelig blir konvergensområdet $\underline{\underline{-2<x<4}}$.

f) Rekka er $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\cdot 2^k}{k+1}(x-1)^k$. Bruker forholdstesten:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{(n+1)\cdot 2^{n+1}}{(n+1)+1}(x-1)^{n+1}}{\frac{n\cdot 2^n}{n+1}(x-1)^n}\right| = \left|\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{2^{n+1}}{2^n}\cdot\frac{(x-1)^{n+1}}{(x-1)^n}\right| = \left|\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\cdot 2(x-1)\right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\cdot 2|(x-1)| = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}}\cdot 2|x-1|$$

$$= \frac{1+0+0}{1+0}\cdot 2|x-1| = 2|x-1|$$

Rekka konvergerer absolutt når

$$2|x-1|<1 \quad\Leftrightarrow\quad -1<2(x-1)<1 \quad\Leftrightarrow\quad -\tfrac{1}{2}<x-1<\tfrac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\tfrac{1}{2}<x<\tfrac{3}{2}}.$$

Undersøker endepunktene:

$x=\frac{1}{2}$: Rekka blir $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\cdot 2^k}{k+1}\left(\frac{1}{2}-1\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\cdot 2^k}{k+1}\left(-\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\cdot(-1)^k}{k+1}$.

$x=\frac{3}{2}$: Rekka blir $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\cdot 2^k}{k+1}\left(\frac{3}{2}-1\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\cdot 2^k}{k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k+1}$.

I begge tilfellene vil absoluttverdien av leddene gå mot 1 når $k\to\infty$. Da må de tilhørende rekkene divergere. Konvergensområdet for rekka blir derfor $\underline{\underline{\tfrac{1}{2}<x<\tfrac{3}{2}}}$.

g) Rekka er $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1} x^n$ .

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{n+1}{2(n+1)-1} x^{n+1}}{\frac{n}{2n-1} x^n}\right| = \left|\frac{(n+1)(2n-1)}{n(2n+1)} x\right| = \left|\frac{2n^2+n-1}{2n^2+n} x\right| = \underline{\frac{2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n}}|x|} .$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n}}|x| = \frac{2+0+0}{2+0}|x| = \underline{|x|} .$$

Konvergens når

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{-1 < x < 1} .$$

Vi ser at når $n \to \infty$, vil $\frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2-\frac{1}{n}} \to \frac{1}{2}$. Dette innebærer at både når $x = 1$ og når $x = -1$ vil absoluttverdien av leddene ikke gå mot null. Da kan heller ikke rekka konvergere i endepunktene $x = 1$ og $x = -1$. Konvergensintervallet blir da $\underline{\underline{-1 < x < 1}}$.

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}(x-1)^n$ .

Bruker forholdstesten:

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{3^{n+1}}{n+1}(x-1)^{n+1}}{\frac{3^n}{n}(x-1)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3n}{n+1}(x-1)\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{1+\frac{1}{n}}|x-1| = 3|x-1| .$$

Konvergens når

$$L < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3|x-1| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x-1| < \tfrac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad -\tfrac{1}{3} < x-1 < \tfrac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\tfrac{2}{3} < x < \tfrac{4}{3}} .$$

Undersøker endepunktene:

$x = \frac{2}{3}$: Rekka blir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}\left(\tfrac{2}{3}-1\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}\left(-\tfrac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

som vi vet konvergerer (alternerende harmonisk rekke).

$x = \frac{4}{3}$: Rekka blir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}\left(\tfrac{4}{3}-1\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}\left(\tfrac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

som vi vet divergerer (harmonisk rekke).

Altså blir konvergensområdet $\underline{\underline{\tfrac{2}{3} \le x < \tfrac{4}{3}}}$.

**Oppgave 3**

a1) Benytter at

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots .$$

Erstatter $x$ med $-x$, setter inn og får:

$$f(x)=\frac{1-e^{-x}}{x}=\frac{1-\left(1-x+\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3+\cdots\right)}{x}=\underline{\underline{1-\frac{1}{2!}x+\frac{1}{3!}x^2-\cdots+\frac{(-1)^n}{(n+1)!}x^n+\cdots}}$$

Rekka konvergerer for alle *x* fordi rekka for $e^x$ konvergerer for alle *x*.

a2) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{1}{2!}x+\cdots+\frac{(-1)^n}{(n+1)!}x^n+\cdots\right)=\underline{\underline{1}}.$$

L'Hôpitals regel: $\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}}{1}=\underline{\underline{1}}.$

a3) $$\int_0^1\frac{1-e^{-x}}{x}dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{2!}x+\frac{1}{3!}x^2-\cdots+\frac{(-1)^n}{(n+1)!}x^n+\cdots\right)dx$$

$$=\left[x-\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{3}x^3-\cdots+\frac{(-1)^n}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{n+1}x^{n+1}+\cdots\right]_0^1$$

$$=1-\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^n}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{n+1}+\cdots$$

$$=1-0.25+0.0555-0.0104+0.00167-\cdots=\underline{\underline{0.797}}$$

Dette er en alternerende rekke, slik at feilen er mindre enn første utelatte ledd.

b) Bruker formelen for ei binomisk rekke:

$$\frac{1}{1+x^2}=\left(1+x^2\right)^{-1}=1+(-1)x^2+\frac{(-1)(-2)}{2!}\left(x^2\right)^2+\frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}\left(x^2\right)^3+\cdots$$

$$=1-x^2+x^4-x^6+\cdots\ =\underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}}}$$

Kan også bruke at summen av ei uendelig geometrisk rekke

$$a_0+k\cdot a_0+k^2\cdot a_0+\cdots+k^n\cdot a_0+\cdots=\frac{a_0}{1-k}.$$

Setter vi $a_0=1$ og $k=-x^2$, ser vi at

$$1-x^2+x^4-\cdots+\left(-x^2\right)^n+\cdots=\frac{1}{1+x^2}.$$

Vet at

$$\int\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x.$$

Integrerer derfor

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots$$

på begge sider, og får

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^x \left(1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^n t^{2n} + \cdots\right) dt$$

$$\left[\arctan t\right]_0^x = \left[ t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} t^{2n+1} + \cdots \right]_0^x$$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} + \cdots = \underline{\underline{\sum_0^\infty (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}}}$$

c) Tar utgangspunkt i rekka for $\sin x$, og får:

$$\sin(2x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(2x)^{2k+1} = 2x - \frac{2^3}{3!}x^3 + \frac{2^5}{5!}x^5 - \frac{2^7}{7!}x^7 + \ldots$$

Setter $x = 1$, og får

$$\sin(2) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(2)^{2k+1} = 2 - \frac{2^3}{3!} + \frac{2^5}{5!} - \frac{2^7}{7!} + \ldots$$

Deler på 2, og får

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k+1)!} = 1 - \frac{2^2}{3!} + \frac{2^4}{5!} - \frac{2^6}{7!} + \ldots = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}\sin(2)}} \approx \underline{\underline{0.45465}}.$$

d)
$$\int_0^1 \sqrt{x}\cdot \sin x\,dx \approx \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\left( x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots \right) dx = \int_0^1 \left( x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3!}x^{\frac{7}{2}} + \cdots \right) dx$$

$$= \left[ \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3!}\cdot\frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}} + \cdots \right]_0^1 = \frac{2}{5} - \frac{1}{3!}\cdot\frac{2}{9} + \cdots \approx \underline{\underline{0.363}}$$

Rekka for sin $x$ er ei alternerende rekke. Da blir også rekka for integralet ei alternerende rekke. Feilen vi gjør ved å kutte rekka er da mindre enn absoluttverdien av det første leddet vi utelater. Verdien av dette leddet er

$$\int_0^1 \sqrt{x}\cdot\frac{1}{5!}x^5 dx = \frac{1}{5!}\int_0^1 x^{\frac{11}{2}} dx = \frac{1}{5!}\cdot\left[\frac{2}{13}x^{\frac{13}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{5!}\cdot\frac{2}{13} \approx \underline{\underline{0.0013}}.$$

e) 1) Rekka er $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty \frac{n-1}{n!}$.

Bruker forholdstesten:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{n}{(n+1)!}}{\frac{n-1}{n!}}\right| = \left|\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \left|\frac{n}{n-1}\cdot\frac{1}{n+1}\right| = \left|\frac{n}{n^2-1}\right| = \left|\frac{\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n^2}}\right| \to 0 \text{ når } n \to \infty.$$

Altså konvergerer rekka.

2) Rekka for $e^x$ er

$$e^x = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}x^n$$

slik at rekka for $\dfrac{e^x}{x}$ blir

$$\frac{e^x}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{x^n}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n-1}=\frac{1}{x}+1+\frac{1}{2!}x+\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{4!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^{n-1}+\cdots.$$

Deriverer begge sider av likhetstegnet, og får

$$\frac{e^x\cdot x-e^x\cdot 1}{x^2}=-\frac{1}{x^2}+0+\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}x+\frac{3}{4!}x^2+\cdots+\frac{n-1}{n!}x^{n-2}+\cdots.$$

Setter inn $x=1$ (som ligger innenfor konvergensområdet siden rekka for $e^x$ konvergerer for $x\in\mathbb{R}$ ) og får

$$\frac{e\cdot 1-e\cdot 1}{1^2}=-\frac{1}{1^2}+0+\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}\cdot 1+\frac{3}{4!}\cdot 1^2+\cdots+\frac{n-1}{n!}\cdot 1^{n-2}+\cdots$$

$$\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n-1}{n!}+\cdots=1}}$$

f) $$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots.$$

Da blir

$$\sin\sqrt{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\sqrt{x}^{2n+1}=\sqrt{x}-\frac{1}{3!}\sqrt{x}^3+\frac{1}{5!}\sqrt{x}^5-\frac{1}{7!}\sqrt{x}^7+\cdots$$

$$\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{\sqrt{x}^{2n+1}}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-\frac{1}{3!}\sqrt{x}^3+\frac{1}{5!}\sqrt{x}^5-\frac{1}{7!}\sqrt{x}^7+\cdots}{\sqrt{x}}$$

$$=\underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^n}}=\underline{\underline{1-\frac{1}{3!}x+\frac{1}{5!}x^2-\frac{1}{7!}x^3+\cdots}}$$

g) Vet at

$$\ln(1+z)=z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n,\qquad -1<z\le 1.$$

Erstatter $z$ med $2x$, og setter inn i funksjonen:

$$f(x)=\frac{1}{x^2}\big(2x-\ln(1+2x)\big)=\frac{1}{x^2}\left(2x-\left(2x-\frac{1}{2}(2x)^2+\frac{1}{3}(2x)^3-\ \cdots\right)\right)$$

$$=\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{2}(2x)^2-\frac{1}{3}(2x)^3+\ \cdots\right)=\underline{\underline{\frac{2^2}{2}-\frac{2^3}{3}x+\frac{2^4}{4}x^2+\ \cdots}}=\underline{\underline{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n}x^{n-2}}}$$

Konvergensintervall: $-1<z\le 1 \quad\Leftrightarrow\quad -1<2x\le 1 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{-\tfrac{1}{2}<x\le\tfrac{1}{2}}}$.

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2^2}{2}-\frac{2^3}{3}x+\frac{2^4}{4}x^2+\ \cdots\right)=\frac{2^2}{2}+0=\underline{\underline{2}}.$$

h) Benytter den binomiske rekka

$$\frac{1}{(1+t)^2} = (1+t)^{-2}$$

$$= 1 + \frac{(-2)}{1!}t + \frac{(-2)(-3)}{2!}t^2 + \quad \cdots \quad + \frac{(-2)(-3)\cdots(-(n+1))}{n!}t^n + \quad \cdots$$

$$= 1 - 2t + 3t^2 - \quad \cdots \quad + (-1)^n (n+1)t^n + \quad \cdots \quad = \underline{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) t^n}$$

for å finne Maclaurin-rekka til

$$f(x) = \frac{x}{(1-x^2)^2}.$$

Bytter ut $t$ med $-x^2$ og multipliserer med $x$:

$$\frac{x}{(1-x^2)^2} = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(-x^2)^n = \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^{2n+1}}}.$$

i) Vet at

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots.$$

Da blir

$$e^{-x} = 1 + (-x) + \frac{1}{2!}(-x)^2 + \frac{1}{3!}(-x)^3 + \frac{1}{4!}(-x)^4 + \cdots$$

$$= 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$$

slik at

$$\sinh(x) = \tfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots\right) - \left(1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots\right)\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(2x + 2\cdot\frac{1}{3!}x^3 + 2\cdot\frac{1}{5!}x^5 + \cdots\right) = \underline{\underline{x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots}} = \underline{\underline{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}}}$$

j) Benytter at

$$\sin x = x - \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{5!}x^5 - \cdots$$

og får

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{x}\sin x\,dx = \int_0^{\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{2}}\left(x - \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{5!}x^5 - \cdots\right)dx = \int_0^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{3!}x^{\frac{7}{2}} + \tfrac{1}{5!}x^{\frac{11}{2}} - \cdots\right)dx$$

$$= \left[\tfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \tfrac{1}{3!}\cdot\tfrac{2}{9}x^{\frac{9}{2}} + \tfrac{1}{5!}\cdot\tfrac{2}{13}x^{\frac{13}{2}} - \cdots\right]_0^{\frac{1}{4}}$$

Benytter at $\left(\tfrac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\tfrac{1}{4}} = \tfrac{1}{2}$, og tar med bare de to første leddene. Da blir

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{x}\sin x\,dx = \tfrac{2}{5}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^5 - \tfrac{1}{3!}\cdot\tfrac{2}{9}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^9 - 0 \approx 0.012500 - 0.000072 \approx \underline{\underline{0.012428}}.$$

Usikkerheten er mindre enn absoluttverdien av det første leddet som kuttes ut, d.v.s. mindre enn

$$\tfrac{1}{5!}\cdot\tfrac{2}{13}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^{13} \approx \underline{\underline{1.6\cdot 10^{-7}}}.$$

**Oppgave 4**

a1) $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}x^n}{\frac{n}{2^n}x^{n-1}}\right| = \left|\frac{n+1}{2n}x\right| = \frac{1+\frac{1}{n}}{2}|x|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2}|x| = \frac{1+0}{2}|x| = \tfrac{1}{2}|x|.$$

Rekka konvergerer når

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \quad\Leftrightarrow\quad \tfrac{1}{2}|x| < 1 \quad\Leftrightarrow\quad |x| < 2 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{-2 < x < 2}$$

Undersøker endepunktene:

$x = -2$: Rekka blir

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}(-2)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{2}$$

som divergerer fordi leddene får stadig større tallverdi.

$x = 2$: Rekka blir

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}\cdot 2^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2}$$

som divergerer av samme grunn.

Rekka konvergerer altså når $\underline{\underline{-2 < x < 2}}$.

2) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2^3} + \cdots$$

er ei geometrisk rekke med første ledd lik 1 og kvotient $k = \tfrac{1}{2}x$.

Summen av denne rekka er da

$$\frac{a_0}{1-k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}x} = \underline{\underline{\frac{2}{2-x}}}.$$

Konvergens når $-1 < k < 1 \quad\Leftrightarrow\quad -1 < \tfrac{1}{2}x < 1 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{-2 < x < 2}}$.

Deriverer sammenhengen

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n} = \frac{2}{2-x}$$

og får

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\cdot x^{n-1}}{2^n} = \frac{0(2-x)-2(-1)}{(2-x)^2} \quad\Leftrightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot x^{n-1}}{2^n} = \underline{\frac{2}{(2-x)^2}}.$$

Setter $x = 1$ og får

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n} = \frac{2}{(2-1)^2} = \underline{\underline{2}}.$$

b) $$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots.$$

Dette er en geometrisk rekke med første ledd $a_1 = 1$ og kvotient $k = -x$.

Summen av denne rekka er

$$\frac{a_1}{1-k}=\frac{1}{1-(-x)}=\underline{\underline{\frac{1}{1+x}}}\ \text{ når } -1<x<1.$$

Integrerer sammenhengen

$$1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots=\frac{1}{1+x}$$

og får

$$x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n+1}x^{n+1}+\cdots=\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=\ln(1+x).$$

Integrerer en gang til:

$$\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}x^5+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n+2}x^{n+2}+\cdots$$

$$=\int_0^x\ln(1+t)=\left[(1+t)(\ln(1+t)-1)\right]_0^x=\Big((1+x)(\ln(1+x)-1)-1\cdot\big(\underbrace{\ln 1}_{=0}-1\big)\Big)$$

$$=(1+x)\ln(1+x)-1-x+1=\underline{\underline{(1+x)\ln(1+x)-x}}$$

Under integrajonen har jeg satt $u=1+t$, og benyttet at $\int \ln u\,du=u(\ln u-1)+C$.

c) $\sin(2x)=2\sin x\cos x \quad\Leftrightarrow\quad \sin x\cos x=\tfrac{1}{2}\sin(2x)$.

Siden $\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$ for alle $x$, blir

$$\sin x\cos x=\tfrac{1}{2}\sin(2x)=\tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(2x)^{2k+1}=\underline{\underline{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,2^{2k}}{(2k+1)!}x^{2k+1}}}$$

$$=\underline{\underline{x-\frac{2^2}{3!}x^3+\frac{2^4}{5!}x^5-\frac{2^6}{7!}x^7+\cdots}}$$

Da blir

$$\int\frac{\sin x\cos x}{x}dx=\int\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,2^{2k}}{(2k+1)!}x^{2k+1}dx=\sum_{k=0}^{\infty}\int\frac{(-1)^k\,2^{2k}}{(2k+1)!}x^{2k}dx$$

$$=\underline{\underline{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,2^{2k}}{(2k+1)!\cdot(2k+1)}x^{2k+1}}}=\underline{\underline{x-\frac{2^2}{3!\cdot 3}x^3+\frac{2^4}{5!\cdot 5}x^5-\frac{2^6}{7!\cdot 7}x^7+\cdots}}$$

d)
$$\int\frac{1}{x}\ln(x+1)dx=\int\frac{1}{x}\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots\right)dx=\int\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^4+\cdots\right)$$

$$=x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}x^4+\cdots=\underline{\underline{x-\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1}{3^2}x^3-\frac{1}{4^2}x^4+\cdots}}$$

Rekka kan skrives

$$\underline{\underline{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}x^n}}$$

Denne rekka konvergerer når

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1 \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}x^{n+1}}{\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}x^n}\right|<1 \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}|x|<1$$

$$\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}|x|<1 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{1+0}|x|<1 \;\Leftrightarrow\; \underline{-1<x<1}$$

Må også kontrollere endepunktene:

$x=1$: Rekka blir da $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cdot 1^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ som vi vet konvergerer.

$x=-1$: Rekka blir da $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cdot(-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{n^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ som vi vet konvergerer.

Altså konvergerer rekka når $\underline{\underline{-1\le x\le 1}}$.

e) Benytter at

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$$

Da blir

$$\frac{\cos\left(\sqrt{x}\right)}{x}=\frac{1-\frac{1}{2!}\sqrt{x}^2+\frac{1}{4!}\sqrt{x}^4-\frac{1}{6!}\sqrt{x}^6+\cdots}{x}$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}x-\frac{1}{6!}x^2+\cdots=\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{k-1}$$

Integrerer ledd for ledd:

$$\int\frac{\cos\sqrt{x}}{x}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}x-\frac{1}{6!}x^2+\cdots\right)dx=\underline{\underline{\ln x-\frac{1}{2!}x+\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6!}\cdot\frac{1}{3}x^3+\cdots}}$$

Rekka kan skrives

$$-\frac{1}{2!}x+\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6!}\cdot\frac{1}{3}x^3+\cdots=\underline{\underline{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!\cdot k}x^k}}\,.$$

Den konvergerer når

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1 \;\Leftrightarrow\; \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{k+1}}{(2(k+1))!\cdot(k+1)}x^{k+1}}{\frac{(-1)^k}{(2k)!\cdot k}x^k}\right|<1$$

$$\Leftrightarrow\; \lim_{k\to\infty}\frac{(2k)!\cdot k}{(2k+2)!(k+1)}|x|<1 \;\Leftrightarrow\; \lim_{k\to\infty}\frac{k}{(2k+1)(2k+2)(k+1)}|x|<1$$

Men $\lim_{k\to\infty}\frac{k}{(2k+1)(2k+2)(k+1)}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{(2k+1)(2k+2)\left(1+\frac{1}{k}\right)}\to 0$

slik at rekka konvergerer for alle verdier av $x$.

Første ledd ( $\ln x$ ) er definert for alle positive verdier av *x*. Rekka som består av de øvrige leddene konvergerer for all verdier av *x*. Altså konvergerer rekka for alle $x > 0$.

f)
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{3^n}=\frac{1}{1}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{3^2}+\frac{x^6}{3^3}+\cdots=1+\frac{x^2}{3}+\left(\frac{x^2}{3}\right)^2+\left(\frac{x^2}{3}\right)^3+\cdots$$

Dette er ei geometrisk rekke med første ledd $a_0=1$ og kvotient $k=\frac{x^2}{3}$. Vi vet at slike rekker konvergerer når

$$-1<k<1 \quad\Leftrightarrow\quad -1<\tfrac{x^2}{3}<1 \quad\Leftrightarrow\quad x^2<3 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{-\sqrt{3}<x<3}}.$$

Da er summen av rekka

$$S=\frac{a_0}{1-k}=\frac{1}{1-\frac{x^2}{3}}=\underline{\underline{\frac{3}{3-x^2}}}.$$

Vet nå at

$$\frac{1}{1}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{3^2}+\frac{x^6}{3^3}+\cdots=\frac{3}{3-x^2}.$$

Deriverer, og får

$$\frac{1}{3}\cdot 2x+\frac{1}{3^2}\cdot 4x^3+\frac{1}{3^3}\cdot 6x^5+\cdots=\frac{0\left(3-x^2\right)-3\left(0-2x\right)}{\left(3-x^2\right)^2} \quad\Leftrightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3^n}x^{2n-1}=\underline{\underline{\frac{6x}{\left(3-x^2\right)^2}}}.$$

g) Benytter at

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}.$$

Da blir

$$1-\cos\sqrt{x}=1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\sqrt{x}^{2n}=1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n=1-\left(1-\frac{1}{2!}x+\frac{1}{4!}x^2-\frac{1}{6!}x^6+\cdots\right)$$
$$=\frac{1}{2!}x-\frac{1}{4!}x^2+\frac{1}{6!}x^6-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}x^n$$

slik at

$$\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{x}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}x^n=\underline{\underline{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}x^{n-1}}}.$$

Bruker forholedstesten for å finne konvergensintervallet:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{(n+1)-1}}{(2(n+1))!}x^{(n+1)-1}}{\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}x^{n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n)!}{(2n+2)!}x\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}|x|=0$$

slik at rekka konvergerer for alle $x\in\mathbb{R}$.

De tre første leddene i rekka blir

$$\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}x+\frac{1}{6!}x^2.$$

Da blir

$$\int_0^1 \frac{1-\cos\left(\sqrt{x}\right)}{x}dx \approx \int_0^1\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}x+\frac{1}{6!}x^2\right)dx = \left[\frac{1}{2!}x-\frac{1}{4!}\cdot\tfrac{1}{2}x^2+\frac{1}{6!}\cdot\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 1-\frac{1}{24\cdot 2}\cdot 1+\frac{1}{720\cdot 3}-0 \approx \underline{\underline{0.47963}}$$

Siden dette er ei alternerende rekke, er unøyaktigheten mindre enn absoluttverdien av det første leddet som sløyfes. Denne absoluttverdien er

$$\int_0^1 \frac{1}{8!}x^3 dx = \left[\frac{1}{8!}\cdot\tfrac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{40320\cdot 4}(1-0) \approx \underline{\underline{0.000006}} = \underline{\underline{6\cdot 10^{-6}}}.$$

**Oppgave 5**

a) Skriver ut noen av de første leddene:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}x^n = x-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{4}x^3-\tfrac{1}{8}x^4+\cdots$$

Ser at dette er ei geometrisk rekke med første ledd lik $x$ og kvotient $-\tfrac{1}{2}x$.

Da blir summen

$$\frac{x}{1-\left(-\tfrac{1}{2}x\right)} = \underline{\underline{\frac{2x}{x+2}}}.$$

b) Rekka konvergerer når

$$-1<-\tfrac{1}{2}x<1 \quad \Leftrightarrow \quad 2>x>-2 \text{ d.v.s. } \underline{\underline{x\in\left\langle -2,\, 2\right\rangle}}.$$

Det er ikke nødvendig å undersøke endepunktene for ei geometrisk rekke.

c) Deriverer rekka i a) ledd for ledd, og får:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}n\left(-\tfrac{1}{2}x\right)^{n-1}.$$

Deriverer formelen for summen, og får

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2x}{x+2}\right) = \frac{2(x+2)-2x\cdot 1}{(x+2)^2} = \underline{\frac{4}{(x+2)^2}}.$$

Altså er

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\left(-\tfrac{1}{2}x\right)^{n-1} = \underline{\underline{\frac{4}{(x+2)^2}}}.$$

**Oppgave 6**

a) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}x^{2n+1}.$$

Bruker forholdstesten:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{1}{2^{2(n+1)}}x^{2(n+1)+1}}{\frac{1}{2^{2n}}x^{2n+1}}\right| = \left|\frac{1}{2^2}\cdot x^2\right| = \underline{\left(\frac{x}{2}\right)^2}.$$

Rekka konvergerer når $\left(\frac{1}{2}x\right)^2 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < \frac{1}{2}x < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{-2 < x < 2}$.

Når $x = 2$, blir rekka $2+2+2+\cdots+2+\cdots$ som divergerer.

Når $x = -2$, blir rekka $-2-2-2-\cdots-2-\cdots$ som divergerer.

Altså konvergerer rekka når $\underline{\underline{-2 < x < 2}}$.

b) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} x^{2n+1} = x + \frac{x^3}{2^2} + \frac{x^5}{2^4} + \cdots \ .$$

Dette er ei geometrisk rekke med første ledd lik $x$ og kvotient lik $\dfrac{x^2}{2^2}$.

Denne rekka har summen

$$S(x) = \frac{x}{1-\dfrac{x^2}{2^2}} = \underline{\underline{\frac{4x}{4-x^2}}}.$$

c) Vet at innenfor konvergensintervallet er

$$\frac{4x}{4-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} x^{2n+1} = x + \frac{x^3}{2^2} + \frac{x^5}{2^4} + \cdots \ .$$

Integrerer på begge sider:

$$\int_0^x \frac{4t}{4-t^2} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} t^{2n+1} dt = \int_0^x \left( t + \frac{t^3}{2^2} + \frac{t^5}{2^4} + \quad \cdots \right) dt \, .$$

På venstre sider setter jeg

$$u = 4 - t^2 \quad \Rightarrow \quad du = -2t dt \quad \Rightarrow \quad 4t dt = -2du$$

slik at

$$\int \frac{4t}{4-t^2} dt = \int \frac{-2du}{u} = -2\ln|u| + C = -2\ln\left|4-x^2\right| + C\,,$$

og

$$\int_0^x \frac{4t}{4-t^2} dt = \left[-2\ln\left|4-t^2\right| + C\right]_0^x = \underline{-2\ln\left(4-x^2\right) + 2\ln 4} \text{ når } -2 < x < 2\,.$$

Når også høyre side integreres, får vi

$$-2\ln\left(4-x^2\right) + 2\ln 4 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4\cdot 2^2}x^4 + \frac{1}{6\cdot 2^4}x^6 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 2^{2n-1}} \cdot x^{2n}\,,$$

slik at

$$\ln\left(4-x^2\right) = \underline{\underline{\ln 4 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 2^{2n}} x^{2n}}}\,.$$

Denne rekka har samme konvergensradius som rekka i a), d.v.s. når $-2 < x < 2$. Videre ser vi at når $x = \pm 2$ blir leddene i summen lik den harmoniske rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ som vi vet divergerer. Altså vil rekka for $\ln\left(4-x^2\right)$ konvergere når $\underline{\underline{-2 < x < 2}}$.

**Oppgave 7**

a) Gitt rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} x^n$ .

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{x^n}{n^2}}\right| = \left|\frac{n^2}{(n+1)^2} x\right| = \frac{n^2}{n^2+2n+1}|x| = \frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}|x|$$

Konvergens når

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}|x| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1+0+0}|x| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{-1 < x < 1}$$

Endepunkter:

Når $x = -1$ blir rekka

$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$ som vi vet konvergerer (*p*-rekke).

Når $x = 1$ blir rekka

$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots$ som også konvergerer. (Alternerende rekke).

Altså konvergerer rekka når $\underline{\underline{-1 \le x \le 1}}$.

b)
$$\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt = \int_0^x \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} t^n dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \int_0^x t^{n-1} dt$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{1}{n} \left[t^n\right]_0^x = \underline{\underline{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} x^n}}$$

Konvergensområdet blir $\underline{\underline{-1 \le x \le 1}}$ (funnet i a). Forskjellen i fortegn betyr intet for konvergens.

**Oppgave 8**

a) Bruker forholdstesten:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}}{\frac{x^n}{n\cdot 2^n}}\right| = \left|\frac{n\cdot x}{(n+1)2}\right| = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \cdot \left|\frac{x}{2}\right| \to \left|\frac{x}{2}\right| \quad \text{når} \quad n \to \infty .$$

Da konvergerer rekka når $-1 < \frac{1}{2}x < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{-2 < x < 2}$ .

Undersøker endepunktene:

$x = -2$ : Rekka blir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n\cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

som er den alternerende harmoniske rekka. Denne rekka vet vi konvergerer.

$x = 2$: Rekka blir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

som er den harmoniske rekka. Denne rekka vet vi divergerer.

Altså konvergerer rekka når $\underline{\underline{-2 \le x < 2}}$.

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + \cdots$$

Dette er en geometrisk rekke med første ledd $\frac{1}{2}$ og kvotient $\frac{1}{2}x$.

Rekka konvergerer når

$$-1 < \tfrac{1}{2}x < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{-2 < x < 2}}.$$

Når rekka konvergerer, er summen

$$f(x) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}x} = \underline{\underline{\frac{1}{2-x}}}.$$

c) Vet at innenfor konvergensområdet er

$$\int_0^x \left( \frac{1}{2} + \frac{t}{4} + \cdots + \frac{t^{n-1}}{2^n} + \cdots \right) dt = \int_0^x \frac{1}{2-t}\, dt$$

Integrerer ledd for ledd:

$$\left[ \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{t^2}{8} + \cdots + \frac{1}{n} \cdot \frac{t^n}{2^n} + \cdots \right]_0^x = \left[ -\ln|2-t| \right]_0^x$$

$$\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \cdots + \frac{x^n}{n \cdot 2^n} + \cdots = -\ln|2-x| + \ln 2$$

$$\underline{\underline{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n} = \ln \frac{2}{2-x}}}$$

Vi kan sløyfe absoluttverditegnene fordi vi vet fra a) at rekka konvergerer når $-2 \le x < 2$

**Oppgave 9**

a) $$f(x) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^2} = \left(1 - \tfrac{1}{2}x\right)^{-2}.$$

Dette er en binomisk rekke. Benytter da at

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots.$$

Setter $m = -2$ og erstatter $x$ med $-\frac{1}{2}x$. Får da

$$\left(1 - \tfrac{1}{2}x\right)^{-2} = 1 + (-2)\left(-\tfrac{1}{2}x\right) + \frac{(-2)(-2-1)}{2!}\left(-\tfrac{1}{2}x\right)^2 + \frac{(-2)(-2-1)(-2-2)}{3!}\left(-\tfrac{1}{2}x\right)^3 + \cdots$$

$$= 1 + x + \frac{2 \cdot 3}{2!} \cdot \left(-\tfrac{1}{2}x\right)^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{3!}\left(-\tfrac{1}{2}x\right)^3 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{2}{2^1}x + \frac{3}{2^2}x^2 + \frac{4}{2^3}x^3 + \cdots = \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} x^n}}$$

b) Bruker forholdstesten:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n+2}{2^{n+1}}x^{n+1}}{\frac{n+1}{2^n}x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+2}{2(n+1)}x\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)}|x| = \underline{\tfrac{1}{2}|x|}.$$

Konvergens når

$$\tfrac{1}{2}|x|<1 \quad \Leftrightarrow \quad |x|<2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{-2<x<2}.$$

Undersøker endepunktene:

$\underline{x=-2}$: Rekka blir

$$1+\frac{2}{2^1}\cdot(-2)+\frac{3}{2^2}\cdot(-2)^2+\frac{4}{2^3}\cdot(-2)^3 = 1-2+3-4+\cdots$$

som åpenbart divergerer.

$\underline{x=2}$: Rekka blir

$$1+\frac{2}{2^1}\cdot(2)+\frac{3}{2^2}\cdot(2)^2+\frac{4}{2^3}\cdot(2)^3 = 1+2+3+4+\cdots$$

som også divergerer.

Divergens i begge endepunkter. Rekka konvergerer når $\underline{\underline{-2<x<2}}$.

c1) Rekka

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{2^n}$$

framkommer direkte ved å sette $x=-1$ inn i rekka fra a. De blir

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{2^n} = \left(1-\tfrac{1}{2}(-1)\right)^{-2} = \left(\tfrac{3}{2}\right)^{-2} = \underline{\underline{\tfrac{9}{4}}}.$$

c2) Skrives rekka i a) ut ledd for ledd, får vi

$$\frac{0+1}{2^0}x^0+\frac{1+1}{2^1}x^1+\frac{2+1}{2^2}x^2+\frac{3+1}{2^3}x^3\cdots+\frac{n+1}{2^n}x^n+\cdots = \left(1-\tfrac{1}{2}x\right)^{-2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1+\frac{2}{2}x+\frac{3}{2^2}x^2+\frac{4}{2^3}x^3+\cdots+\frac{n+1}{2^n}x^n+\cdots = \left(1-\tfrac{1}{2}x\right)^{-2}$$

Deriverer ledd for ledd:

$$\frac{2}{2}\cdot 1+\frac{3}{2^2}\cdot 2x+\frac{4}{2^3}\cdot 3x^2+\cdots+\frac{n+1}{2^n}\cdot nx^{n-1}+\cdots = -2\left(1-\tfrac{1}{2}x\right)^{-3}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)$$

som ordnes til

$$\frac{1\cdot 2}{2}+\frac{2\cdot 3}{2^2}x+\frac{3\cdot 4}{2^3}x^2+\cdots+\frac{n(n+1)}{2^n}x^{n-1}+\cdots = \underline{\underline{\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}x\right)^3}}}.$$

**Oppgave 10**

a)
$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(n+1)-n} = \underline{\underline{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}}.$$

Dette gir:

$$S_N = \sum_{n=0}^{N}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \left(\sqrt{1}-\sqrt{0}\right)+\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\cdots+\left(\sqrt{N+1}-\sqrt{N}\right)$$
$$= \underline{\underline{\sqrt{N+1}}}$$

Vi ser at $S_N \to \infty$ når $N \to \infty$. Altså divergerer rekka.

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\dfrac{x^{n+1}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}}{\dfrac{x^n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}\right| = \left|\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}\cdot x\right| = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\cdot|x|$$

slik at

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\cdot|x| = \frac{1+1}{1+1}\cdot|x| = \underline{|x|}.$$

Rekka konvergerer når $|x|<1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{-1<x<1}$.

Må undersøke endepunktene:

$x=1$: Vi får nå rekka i a), som vi vet divergerer.

$x=-1$: Vi får nå ei alternerende rekke der $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

Vi ser at $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Videre er $|a_{n+1}|<|a_n|$ fordi nevnerne blir stadig større.

Altså konvergerer rekka etter testen for alternerende rekker.

Rekka konvergerer når $\underline{\underline{-1\le x<1}}$.

**Oppgave 11**

a) Bruker uttrykket for binomisk rekke med $n=-\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1+\frac{-\frac{1}{2}}{1}x+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}x^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}x^3+\quad\cdots$$
$$+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\cdots\left(-n+\frac{1}{2}\right)}{n!}x^n+\quad\cdots$$
$$\underline{\underline{=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^3+\quad\cdots\quad+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^n+\quad\cdots}}$$

b) $u=\dfrac{1}{x}=x^{-1} \quad\Rightarrow\quad x=\dfrac{1}{u}$. $\qquad \dfrac{du}{dx}=-x^{-2} \quad\Rightarrow\quad dx=-x^2du=-\dfrac{du}{u^2}$

$$\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{-\dfrac{du}{u^2}}{\sqrt{1+u^{-4}}} = \frac{-du}{\sqrt{u^4+1}}$$

Nye grenser: $x=2 \quad\Rightarrow\quad u=\frac{1}{2}$, $\qquad x\to\infty \quad\Rightarrow\quad u\to 0$.

Da blir

$$\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{-du}{\sqrt{u^4+1}} = \underline{\underline{\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{du}{\sqrt{u^4+1}}}}\ .$$

Erstatter $x$ med $u^4$ i rekka i a), og får:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{du}{\sqrt{1+u^4}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{2}u^4 + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}u^8 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}u^{12} + \cdots + (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdots\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}u^{4n} + \cdots\right) du$$

$$= \left[u - \frac{1}{2\cdot 5}u^5 + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!\cdot 9}u^9 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!\cdot 13}u^{13} + \cdots + (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdots\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!\cdot(4n+1)}u^{4n+1} + \cdots\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 5\cdot 2^5} + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!\cdot 9\cdot 2^9} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!\cdot 13\cdot 2^{13}} + \cdots + (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdots\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!\cdot(4n+1)\cdot 2^{4n+1}} + \cdots$$

Vi får tilstrekkelig stor nøyaktighet når vi tar med 5 ledd. Da blir

$$\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\,dx \approx \underline{\underline{0.496953}}\,.$$

**Oppgave 12**

a) $$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(x-1)^n\,.$$

Her er $a_n = (-1)^n (n+1)(x-1)^n$ slik at forholdstesten gir:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}(n+2)(x-1)^{n+1}}{(-1)^n(n+1)(x-1)^n}\right| = \frac{n+2}{n+1}\cdot\left|(x-1)\right| = \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}\cdot\left|(x-1)\right|.$$

Men

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1+0}{1+0} = 1$$

slik at rekka komvergerer når

$$|x-1| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < x-1 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{0 < x < 2}\,.$$

Både når $x=0$ og når $x=2$ blir $|a_n| = n+1$, og da er rekka åpenbart divergent.

Konvergensområdet blir derfor $\underline{\underline{0 < x < 2}}$.

b) $$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -2x^{-3} \quad \Rightarrow \quad f''(x) = (-2)(-3)x^{-4}$$

$$\Rightarrow \quad \cdots \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(x) = (-2)(-3)\cdots(-(n+1))x^{-(n+2)} = \underline{(-1)^n\cdot(n+1)!\cdot x^{-(n+2)}}$$

Rekka blir da:

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-1)^n + \cdots$$

$$= 1 + \frac{-2}{1!}(x-1) + \frac{(-2)(-3)}{2!}(x-1)^2 + \cdots + \frac{(-1)^n(n+1)!}{n!}(x-1)^n + \cdots$$

$$= 1 - 2(x-1) + 3(x-1)^2 + \cdots + (-1)^n(n+1)(x-1)^n + \cdots$$

$$= \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(x-1)^n}}$$

Dette er samme rekka som i a), og konvergensområdet for rekka blir derfor $\underline{\underline{0 < x < 2}}$.

**Oppgave 13**

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f''(x) = \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad f'''(x) = \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{3}{2}\right)x^{-\frac{5}{2}}$$

Taylor-polynomet er av formen

$$a_0 + a_1(x-4) + a_2(x-4)^2 + a_3(x-4)^3$$

der

$$a_0 = f(4) = \sqrt{4} = 2\,,$$

$$a_1 = \frac{1}{1!}f'(4) = \tfrac{1}{2}(4)^{-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = \underline{\tfrac{1}{4}}\,,$$

$$a_2 = \frac{1}{2!}f''(4) = \tfrac{1}{2}\cdot\left(-\tfrac{1}{4}\right)\cdot 4^{-\frac{3}{2}} = -\tfrac{1}{8}\cdot 2^{-3} = \underline{-\tfrac{1}{64}}\,,$$

$$a_3 = \frac{1}{3!}f'''(4) = \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{3}{8}\cdot 4^{-\frac{5}{2}} = \tfrac{1}{16}\cdot 2^{-5} = \underline{\tfrac{1}{512}}\,.$$

Altså blir Taylor-polynomet

$$\underline{\underline{2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3}}\,.$$

**Oppgave 14**

a) $$f(x) = \frac{2}{x^3} = 2x^{-3}$$

$$f'(x) = 2(-3)x^{-4}$$

$$f''(x) = 2(-3)(-4)x^{-5} = (-1)^2\cdot 4!\cdot x^{-5}$$

$$f'''(x) = 2(-3)(-4)(-5)x^{-6} = (-1)^3\cdot 5!\cdot x^{-6}$$

Det ser ut til at vi har den generelle formelen

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n\cdot(n+2)!\cdot x^{-n-3}\,.$$

Dette vises ved induksjon: Hvis formelen stemmer, blir

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n(n+2)!\cdot(-n-3)x^{-n-3-1} = (-1)^{n+1}(n+3)!\cdot x^{-n-4}$$

som viser at formelen stemmer.

Da er Taylor-rekka

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-1)^n$$

der

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(1) = \frac{1}{n!} \cdot (-1)^n (n+2)! \cdot 1^{-n-3} = \underline{(-1)^n (n+1)(n+2)}.$$

Innsetting gir rekka

$$\underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n+2)(x-1)^n}}$$

som vi skulle vise.

b) Bruker forholdstesten for å finne konvergensintervallet:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+2)(n+3)(x-1)^{n+1}}{(n+1)(n+2)(x-1)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+3}{n+1}(x-1) \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}} \cdot |x-1| = \underline{|x-1|}$$

Konvergens når

$$|x-1| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < x-1 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{0 < x < 2}.$$

I begge endepunktene av intervallet vil absoluttverdien av leddene gå mot uendelig når $n \to \infty$. Da må rekka divergere i endepunktene. Konvergensintervallet blir derfor $\underline{\underline{0 < x < 2}}$.

c) Rekka konvergerer når $x = \frac{1}{2}$. Setter inn denne verdien, og får

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n+2)\left(\tfrac{1}{2}-1\right)^n = \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n+2)\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n = 16 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2^n} = 16}}$$

**Oppgave 15**

a)
$$f(x) = \ln(x+2) \quad \Leftrightarrow \quad c_0 = f(0) = \ln(0+2) = \ln 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+2} = (x+2)^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad c_1 = f'(0) = \frac{1}{0+2} = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = (-1)(x+2)^{-2} \quad \Leftrightarrow \quad c_2 = \frac{1}{2!} \cdot f''(0) = \frac{1}{2}(-1)(0+2)^{-2} = \frac{-1}{2 \cdot 2^2}$$

$$f'''(x) = (-1)(-2)(x+2)^{-3} \quad \Leftrightarrow \quad c_3 = \frac{1}{3!} \cdot f'''(0) = \frac{1}{3!} \cdot 2! \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{1}{3 \cdot 2^3}$$

$$f^{(4)}(x) = (-1)(-2)(-3)(x+2)^{-4} \quad \Leftrightarrow \quad c_4 = \frac{1}{4!} \cdot f^{(4)}(2) = \frac{-1 \cdot 3!}{4!}(0+2)^{-4} = \frac{-1}{4 \cdot 2^4}$$

Generelt:

$$f^{(n)}(x) = (-1)(-2)(-3)\cdots(-(n-1))(x+2)^{-n} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot (x+2)^{-n}$$

som gir

$$c_n = \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}(0+2)^{-n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n}.$$

Rekka blir da

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2 \cdot 2^2} x^2 + \frac{1}{3 \cdot 2^3} x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n} x^n + \cdots$$

$$= \underline{\underline{\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n} x^n}}$$

b) Gitt rekka

$$\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n} x^n .$$

Undersøker konvergensen med forholdstesten:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left| \frac{\frac{(-1)^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}} x^{n+1}}{\frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n} x^n} \right| = \left| \frac{-nx}{2(n+1)} \right| = \frac{n}{2(n+1)} |x| .$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2(n+1)} |x| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)} |x| = \frac{1}{2(1+0)} |x| = \tfrac{1}{2} |x| .$$

Rekka konvergerer når

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}|x| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < \tfrac{1}{2} x < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{-2 < x < 2} .$$

Undersøker endepunktene:

$x = -2$: Rekka blir

$$\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n} (-2)^n = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}$$

som divergerer (harmonisk rekke).

$x = 2$: Rekka blir

$$\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n} 2^n = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

som konvergerer (alternerende harmonisk rekke).

Konvergensintervall: $\underline{\underline{-2 < x \leq 2}}$.

c) Rekka konvergerer for $x = 1$. Da blir

$$f(1) = \ln(1+2) = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n} \cdot 1^n \quad \Leftrightarrow \quad \ln 3 = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}=\frac{1}{1\cdot 2^1}-\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}-\frac{1}{4\cdot 2^4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}+\cdots=\ln 3-\ln 2=\ln\frac{3}{2}$$

d) $1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots$

er en geometrisk rekke med første ledd $a_0=1$ og kvotient $k=-x$.
Da blir summen

$$S=\frac{a_0}{1-k}=\frac{1}{1+x}.$$

Konvergens når $|k|<1 \quad\Leftrightarrow\quad -1<x<1$. Altså er

$$1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots=\frac{1}{1+x} \text{ når } -1<x<1.$$

Integrerer ledd for ledd:

$$\int_0^x\left(1-t+t^2-t^3+\cdots+(-1)^n t^n+\cdots\right)dx=\int_0^x\frac{1}{1+t}dt$$

$$x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots+(-1)^n\cdot\frac{1}{n+1}x^{n+1}+\cdots=\left[\ln(1+t)\right]_0^x=\ln(1+x)$$

Rekka konvergerer for $x=\frac{1}{2}$. Setter inn, og får

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots+(-1)^n\cdot\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\cdots=\ln\left(\frac{1}{2}+1\right)$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}-\frac{1}{4\cdot 2^4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}+\cdots=\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

**Oppgave 16**

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$.

Bruker forholdstesten:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{\frac{1}{2(n+1)+1}x^{2(n+1)+1}}{\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}}\right|=\left|\frac{2n+1}{2n+3}\frac{x^{2n+3}}{x^{2n+1}}\right|=\left|\frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}}\cdot x^2\right|\to x^2 \text{ når } n\to\infty.$$

Rekka konvergerer når $x^2<1 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{-1<x<1}$.
Undersøker endepunktene:

$x=1$: Rekka blir $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\cdot 1^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$.

Sammenlikner med den harmoniske rekka $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ som jeg vet divergerer:

$\displaystyle\frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{n}}=\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2+\frac{1}{n}}\to\frac{1}{2}$ når $n\to\infty$. Da må også $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ divergere.

$x=-1$: Rekka blir $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\cdot(-1)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}(-1)}{2n+1} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ som divergerer.

Rekka $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$ konvergerer altså når $\underline{\underline{-1<x<1}}$.

b1) Vet at

$$\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n \ .$$

Da blir

$$\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(-x)^n = \underline{\underline{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n}} \ .$$

b2)
$$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2}\big(\ln(1+x)-\ln(1-x)\big) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n - \left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots+\left(\frac{1}{1}x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+\cdots\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(2x+2\cdot\frac{1}{3}x^3+2\cdot\frac{1}{5}x^5+\cdots\right) = x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots = \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}}}$$

b3) Setter inn $x=\frac{1}{2}$ (som ligger innenfor konvergensområdet):

$$\ln\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n+1} \quad\Leftrightarrow\quad \ln\sqrt{\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}}$$
$$\Leftrightarrow\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}} = \underline{\underline{\ln\sqrt{3} = \tfrac{1}{2}\ln 3}}$$

**Oppgave 17**

a)
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}x^n \ .$$

Bruker forholdstesten:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{n+3}x^{n+1}}{\frac{(-1)^n}{n+2}x^n}\right| = \left|\frac{n+2}{n+3}x\right| = \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n}}|x|$$

slik at

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n}}|x| = \frac{1+0}{1+0}|x| = |x| .$$

Rekka konvergerer når $L<1 \quad\Leftrightarrow\quad |x|<1 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{-1<x<1}$.

Sjekker endepunktene:

Når $x=-1$ blir rekka

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}(-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}(-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots.$$

Dette er den harmoniske rekka (minus første ledd) som divergerer.

Når $x=1$ blir rekka

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}1^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\cdots.$$

Dette er den alternerende harmoniske rekka (minus første ledd) som konvergerer.

Rekka $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}x^n$ konvergerer altså for $\underline{\underline{-1<x\le 1}}$.

b) Benytter at

$$\ln(x+1)=x-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{4}x^4+\cdots$$

slik at

$$f(x)=\frac{x-\ln(x+1)}{x^2}=\frac{x-\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots\right)}{x^2}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4-\cdots}{x^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x^2-\cdots=\underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}x^n}}$$

Dette er den rekka som vi undersøkte i a). Vi vet at den konvergerer for $x=-\frac{1}{2}$. Setter inn denne verdien, og får:

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right)=\frac{-\frac{1}{2}-\ln\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n \quad\Leftrightarrow\quad \frac{-\frac{1}{2}-\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{4}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+2}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\cdot 2^n}=-2-4(\ln 1-\ln 2)=\underline{\underline{-2+4\ln 2}}$$

**Oppgave 18**

a) Benytter at Maclaurin-rekka til $\sin x$ er

$$\sin x=x-\tfrac{1}{3!}x^3+\tfrac{1}{5!}x^5-\tfrac{1}{7!}x^7+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}x^{2n+1}.$$

Da blir

$$f(x)=\sqrt{x}\cdot\sin\left(\sqrt{x}\right)=\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-\tfrac{1}{3!}\sqrt{x}^3+\tfrac{1}{5!}\sqrt{x}^5-\tfrac{1}{7!}\sqrt{x}^7+\cdots\right)$$

$$=\underline{\underline{x-\tfrac{1}{3!}x^2+\tfrac{1}{5!}x^3-\tfrac{1}{7!}x^4+\cdots}}=\underline{\underline{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}x^n}}$$

b) Setter inn $x=2$ i rekka ovenfor, og får at

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}2^n=\underline{\underline{\sqrt{2}\cdot\sin\left(\sqrt{2}\right)}}\approx 1.397.$$

c) Integrerer rekka fra a), og får

$$\int_0^1 \sqrt{x}\sin\left(\sqrt{x}\right)dx = \int_0^1 \left(x - \tfrac{1}{3!}x^2 + \tfrac{1}{5!}x^3 - \tfrac{1}{7!}x^4 + \cdots\right)dx$$
$$= \left[\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3!}\cdot\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5!}\cdot\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{7!}\cdot\tfrac{1}{5}x^5 + \cdots\right]_0^1$$
$$= \tfrac{1}{2}\cdot 1^2 - \tfrac{1}{3!}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot 1^3 + \tfrac{1}{5!}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot 1^4 - \tfrac{1}{7!}\cdot\tfrac{1}{5}\cdot 1^5 + \cdots - 0 \approx \underline{\underline{0.4465}}$$

**Oppgave 19a**

Siden $f(-t) = (-t)^3 = -t^3 = -f(t)$, er funksjonen odde. Funksjonen har periode

$$p = 2L = 2 \quad \Leftrightarrow \quad L = 1.$$

Da er:

$$a_n = 0 \text{ for } n = 0, 1, 2, \cdots.$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\sin\left(n\frac{\pi}{L}t\right)dt = 2\int_0^1 t^3\sin(n\pi t)\,dt$$
$$= 2\cdot\frac{-1}{\pi^4 n^4}\left[\left(\pi^3 n^3 t^3 - 6\pi n t\right)\cos(\pi n t) - \left(3\pi^2 n^2 t^2 - 6\right)\sin(\pi n t)\right]_0^1$$
$$= \frac{-2}{\pi^4 n^4}\left(\left(\pi^3 n^3 - 6\pi n\right)\underbrace{\cos(\pi n)}_{=(-1)^n} - 0 - \left(3\pi^2 n^2 - 6\right)\underbrace{\sin(\pi n)}_{=0} + (0-6)\underbrace{\sin 0}_{=0}\right)$$
$$= \frac{-2}{\pi^4 n^4}\left(\pi^3 n^3 - 6\pi n\right)(-1)^n = \underline{\frac{2(-1)^n}{\pi^3 n^3}\left(6 - \pi^2 n^2\right)}$$

Rekka blir derfor

$$\underline{\underline{\frac{2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\left(6 - \pi^2 n^2\right)\sin(n\pi t)}}.$$

**Oppgave 19b**

$$f(t) = t^3 - t \text{ når } -1 < t < 1, \qquad f(t+2) = f(t).$$

Ser at *f* er odde fordi

$$f(-t) = (-t)^3 - (-t) = -t^3 + t = -\left(t^3 - t\right) = -f(t), \quad -1 < t < 1.$$

Videre er funksjonen periodisk med periode

$$p = 2L = 2 \quad \Leftrightarrow \quad L = 1$$

slik at $\dfrac{\pi}{L} = \dfrac{\pi}{1} = \pi$.

Da er Fourier-rekka på formen

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\frac{\pi}{L}t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi t)$$

der

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\sin\left(n\frac{\pi}{L}t\right)dt = 2\int_0^1 \left(t^3 - t\right)\sin(n\pi t)\,dt$$
$$= 2\frac{-1}{\pi^4 n^4}\left[\left(6 + \pi^2 n^2 - 3\pi^2 n^2 t^2\right)\sin(n\pi t) + \left(\pi^3 n^3 t^3 - \pi^3 n^3 t - 6\pi n t\right)\cos(n\pi t)\right]_0^1$$

Vi ser at faktoren $\sin(n\pi t)$ blir lik null ved innsetting av begge grensene. Da står vi igjen med

$$b_n = \frac{-2}{\pi^4 n^4}\left(\left(\pi^3 n^3 - \pi^3 n^3 - 6\pi n\right)\underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} - 0\right) = \frac{12n\pi(-1)^n}{n^4\pi^4} = \underline{\frac{12(-1)^n}{n^3\pi^3}}.$$

Rekka blir

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi t) = \underline{\underline{\frac{12}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin(n\pi t)}}.$$

**Oppgave 19c**

Når $-2 \le t < 2$, er

$$f(-t) = (-t)^3 - 4\cdot(-t) = -t^3 + 4t = -\left(t^3 - 4t\right) = -f(t)$$

slik at *f* er odde i dette intervallet. Når *t* ligger utenfor dette intervallet, vil periodisiteten føre til at funksjonen er odde også der.

Siden *f* er odde, er Fourier-rekka en ren sinus-rekke. Videre er perioden

$$P = 2L = 4 \quad \Leftrightarrow \quad L = 2$$

slik at rekka er av formen

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\tfrac{\pi}{2}t\right)$$

der

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) = \int_0^2 \left(t^3 - 4t\right)\cdot\sin\left(n\tfrac{\pi}{2}t\right)dt$$
$$= -\frac{1}{\pi^4 n^4}\left[\left(96 + 16\pi^2 n^2 - 12\pi^2 n^2 t^2\right)\sin\left(n\tfrac{\pi}{2}t\right) + \left(-8\pi^3 n^3 t - 48\pi n t + 2\pi^3 n^3 t^3\right)\cos\left(n\tfrac{\pi}{2}t\right)\right]_0^2$$

Vi ser at faktoren $\sin\left(n\tfrac{\pi}{2}t\right)$ blir lik null for alle verdier av *n* ved innsetting av begge grensene.

Videre benytter vi at $\cos(n\pi) = (-1)^n$. Da blir

$$b_n = -\frac{1}{\pi^4 n^4}\left(\left(-8\pi^3 n^3\cdot 2 - 48\pi n\cdot 2 + 2\pi^3 n^3\cdot 8\right)\cdot(-1)^n\right) - 0 = \underline{\frac{96\cdot(-1)^n}{\pi^3 n^3}}$$

slik at Fourier-rekka blir

$$\underline{\underline{\frac{96}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin\left(n\tfrac{\pi}{2}t\right)}}.$$

**Oppgave 19d**

$$f(t) = \begin{cases}\cos t & \text{når} \quad 0 \le t < \pi \\ 0 & \text{når} \quad \pi \le t < 2\pi\end{cases}, \qquad f(t + 2\pi) = f(t).$$

Ser at *f* har periode $p = 2L = 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad L = \pi$.

Fourier-rekka blir

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\cdot t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\cdot t)$$

der

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \cos t\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[\sin t\right]_0^{\pi} = \underline{0}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(n\cdot t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos t\cdot\cos(n\cdot t)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{\sin((1+n)t)}{1+n} + \frac{\sin((1-n)t)}{1-n}\right]_0^{\pi}$$

Vet at $\sin\big((1+n)\pi\big) = \sin\big((1-n)\pi\big) = 0$ for alle heltallige verdier av *n*. Dessuten er $\sin 0 = 0$.

Da blir $a_n = 0$ for alle $n = 2, 3, 4, \cdots$.

Men uttrykket gjelder ikke for $n = 1$ på grunn av faktoren $1-n$ i den ene nevneren. Da blir

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos t\cdot\cos t\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^2 t\,dt = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{4}\left[\sin(2t) + 2t\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\Big(\underbrace{\sin(2\pi)}_{=0} + 2\pi - \sin 0 - 0\Big) = \underline{\frac{1}{2}}$$

Videre blir

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\sin(n\cdot t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos t\cdot\sin(n\cdot t)\,tdt$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{\cos((1-n)t)}{1-n} - \frac{\cos((1+n)t)}{1+n}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\cos((1-n)\pi) - \cos 0}{1-n} - \frac{\cos((1+n)\pi) - \cos 0}{1+n}\right)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{n}{n^2-1} & \text{når} \quad n = 2, 4, 6, \cdots \\ 0 & \text{når} \quad n = 3, 5, 7, \cdots \end{cases}$$

Vi vet at cosinus-funksjonen er jamn. Da er

$$\cos((1-n)\pi) = \cos(-(n-1)\pi) = \cos((n-1)\pi) = (-1)^{n-1} = (-1)^{n+1}.$$

Da blir

$$b_n = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{(-1)^{n+1}-1}{1-n} - \frac{(-1)^{n+1}-1}{1+n}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\big((-1)^{n+1}-1\big)(1+n)}{1-n^2} - \frac{\big((-1)^{n+1}-1\big)(1-n)}{1-n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{2n\big((-1)^{n+1}-1\big)}{1-n^2} = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{n}{n^2-1} & \text{når} \quad n = 2, 4, 6, \cdots \\ 0 & \text{når} \quad n = 3, 5, 7, \cdots \end{cases}$$

Også her må tilfellet $n = 1$ spesialbehandles:

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos t\cdot\sin t\,dt = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{-1}{4}\left[\cos(2t)\right]_0^{\pi} = \frac{-1}{4\pi}\big(\cos(2\pi) - \cos 0\big) = \underline{0}.$$

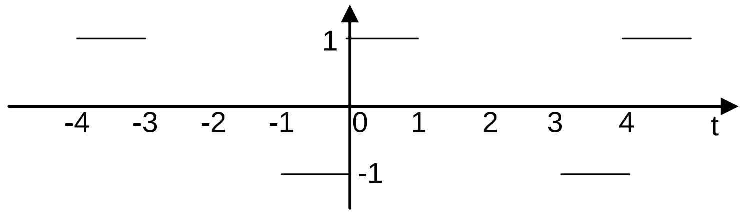
Fourier-rekka blir altså:

$$\underline{\underline{\tfrac{1}{2}\cos t + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k}{(2k)^2-1}\sin(2k\cdot t)}}$$

**Oppgave 19e**

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{når} \quad 0 \le t < 1 \\ 0 & \text{når} \quad 1 \le t < 3 \\ -1 & \text{når} \quad 3 \le t < 4 \end{cases}, \qquad f(t+4) = f(t).$$

Grafen blir slik




Dette er en odde funksjon med periode $2L = 4 \quad \Leftrightarrow \quad L = 2$.
Da blir Fourier-koeffisientene:

$a_n = 0$ for alle $n$.

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\sin\left(n\frac{\pi}{L}t\right)dt = \int_0^1 \sin\left(n \cdot \tfrac{1}{2}\pi t\right)dt = -\frac{2}{n\pi}\left[\cos\left(n \cdot \tfrac{1}{2}\pi t\right)\right]_0^1$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\left(\cos\left(n \cdot \tfrac{1}{2}\pi\right) - 1\right) = \underline{\frac{2}{n\pi}\left(1 - \cos\left(n \cdot \tfrac{1}{2}\pi\right)\right)}$$

Altså blir Fourier-rekka

$$\underline{\underline{\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1 - \cos\left(n \cdot \tfrac{1}{2}\pi\right)\right)\sin\left(n \cdot \tfrac{1}{2}\pi t\right)}}.$$

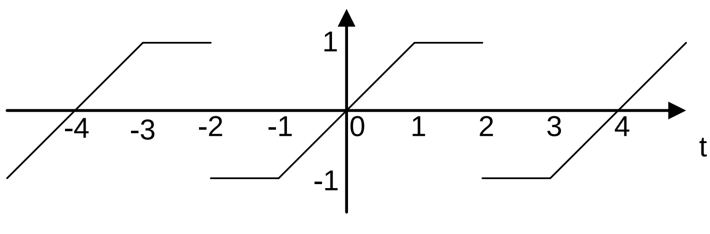
Her er

$$b_n = \frac{2}{n\pi}\left(1 - \cos\left(n \cdot \tfrac{1}{2}\pi\right)\right) = \begin{cases} 0 & \text{når} \quad n = 4, 8, 12, \cdots \\ \dfrac{2}{n\pi} & \text{når} \quad n = 1, 3, 5, \cdots \\ \dfrac{4}{n\pi} & \text{når} \quad n = 2, 6, 10, \cdots \end{cases}$$

**Oppgave 19f**

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{når} \quad -2 < t < -1 \\ t & \text{når} \quad -1 < t < 1 \\ 1 & \text{når} \quad 1 < t < 2 \end{cases}, \qquad f(t+4) = f(t).$$

Tegner graf for å få oversikt:



Dette er en odde funksjon, slik at $a_n = 0$ for alle *n*. Videre er $p = 2L = 4$ slik at $L = 2$.

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^2 f(t)\sin\left(n\frac{\pi}{L}t\right)dt = \int_0^1 t\sin\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi t\right)dt + \int_1^2 1\cdot\sin\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi t\right)dt$$

$$= \frac{-1}{\left(n\frac{\pi}{2}\right)^2}\left[n\tfrac{\pi}{2}t\cos\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi t\right) - \sin\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi t\right)\right]_0^1 - \frac{1}{n\frac{\pi}{2}}\left[\cos\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi t\right)\right]_1^2$$

$$= \frac{-4}{n^2\pi^2}\left(n\tfrac{\pi}{2}\cos\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right) - \sin\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right) - 0 + 0\right) - \frac{2}{n\pi}\left(\cos(n\pi) - \cos\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right)\right)$$

$$= \underline{\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right) - \frac{2}{n\pi}\cos(n\pi)}$$

Tabellen nedenfor viser koeffisientene:

| $n$ | $\sin\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right)$ | $\cos(n\pi)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | -1 |
| 2 | 0 | 1 |
| 3 | -1 | -1 |
| 4 | 0 | 1 |
| 5 | . . . | . . . |

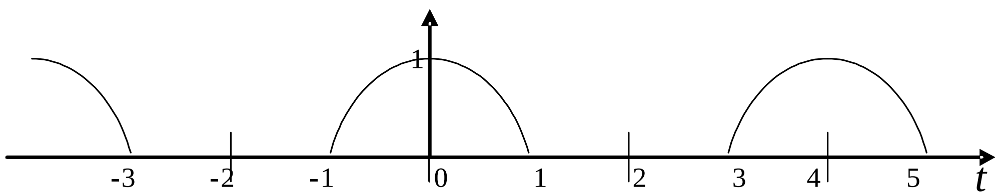
Videre gjentas samme mønster. Altså er

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi t\right) \text{ der } b_n = \begin{cases} \dfrac{4}{n^2\pi^2}(-1)^{\frac{n-1}{2}} + \dfrac{2}{n\pi} & \text{når } \quad n = 1, 3, 5, \cdots \\ -\dfrac{2}{n\pi} & \text{når } \quad n = 2, 4, 6, \cdots \end{cases}$$

**Oppgave 19g**

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t^2 & \text{når } \quad -1 \le t \le 1 \\ 0 & \text{når } \quad 1 < t < 3 \end{cases}, \qquad f(t+4) = f(t).$$

Skisserer grafen til *f*:




Skissen viser at dette er en jamn funksjon. Dette kan også vises slik:

Når $0 \le t \le 1$, er $f(-t) = 1 - (-t)^2 = 1 - t^2 = f(t)$.

Når $1 < t < 2$, er $f(-t) = 0 = f(t)$.

Altså er $f(-t) = f(t)$ i hele perioden, slik at funksjonen er jamn.

Ser at perioden er

$p = 2L = 4 \quad \Leftrightarrow \quad L = 2$,

og bruker de generelle formlene for å finne koeffisientene:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1-t^2\right)dt = \tfrac{1}{2}\left[t - \tfrac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \tfrac{1}{2}\left(1-\tfrac{1}{3}\right) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3} = \underline{\tfrac{1}{3}}.$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos\left(n\frac{\pi}{L}t\right)dt = \frac{2}{2}\int_0^1 \left(1-t^2\right)\cos\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi t\right)dt$$

$$= \frac{1}{n\cdot\frac{1}{2}\pi}\left[\sin\left(n\tfrac{\pi}{2}t\right)\right]_0^1 - \frac{1}{\left(n\cdot\frac{1}{2}\pi\right)^3}\left[2n\cdot\tfrac{1}{2}\pi t\cos\left(n\tfrac{\pi}{2}t\right) + \left(\left(n\tfrac{\pi}{2}t\right)^2 - 2\right)\sin\left(n\tfrac{\pi}{2}t\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left(\sin\left(n\tfrac{\pi}{2}\right) - 0\right) - \frac{8}{n^3\pi^3}\left(n\pi\cos\left(n\tfrac{\pi}{2}\right) - 0 + \left(\left(n\tfrac{\pi}{2}\right)^2 - 2\right)\sin\left(n\tfrac{\pi}{2}\right) - 0\right)$$

$$= \frac{2}{n\pi}\sin\left(n\tfrac{\pi}{2}\right) - \frac{8}{n^2\pi^2}\cos\left(n\tfrac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{n\pi}\sin\left(n\tfrac{\pi}{2}\right) + \frac{16}{n^3\pi^3}\sin\left(n\tfrac{\pi}{2}\right)$$

$$= \underline{\frac{8}{n^3\pi^3}\left(2\sin\left(n\tfrac{\pi}{2}\right) - n\pi\cos\left(n\tfrac{\pi}{2}\right)\right)}$$

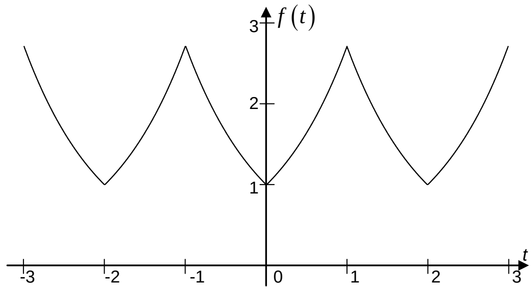
Rekka blir da

$$\underline{\underline{\tfrac{1}{3} + \frac{8}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n^3}\sin\left(n\tfrac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{n^2}\cos\left(n\tfrac{\pi}{2}\right)\right)\cos\left(n\tfrac{\pi}{2}t\right)}}.$$

**Oppgave 20a**

$$f(t) = e^t,\ 0 \le t \le 1.$$

Et utsnitt av grafen til den jamne halvperiodiske utvidelsen er vist til høyre.




Siden *f* er en jamn funksjon med periode $p = 2L = 2 \quad \Leftrightarrow \quad L = 1$, blir Fourier-rekka

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(n\pi t\right)$$

der

$$a_0 = \tfrac{1}{L}\int_0^L f(t)\,dt = \tfrac{1}{1}\int_0^1 e^t\,dt = \left[e^t\right]_0^1 = e^1 - e^0 = \underline{e-1}.$$

$$a_n = \tfrac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = 2\int_0^1 e^t\cos\left(n\pi t\right)dt$$

$$= \frac{2}{1+n^2\pi^2}\left[e^t\left(\cos\left(n\pi t\right) + n\pi\sin\left(n\pi t\right)\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{\pi^2 n^2 + 1}\left(e\underbrace{\cos\left(\pi n\right)}_{=(-1)^n} + \pi n e\underbrace{\sin\left(\pi n\right)}_{=0} - 1(1+0)\right) = \underline{\frac{2}{\pi^2 n^2 + 1}\left(e\cdot(-1)^n - 1\right)}$$

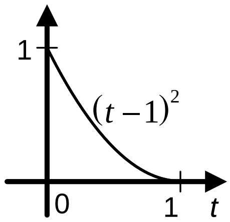
Fourier-rekka blir altså

$$\underline{\underline{e-1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi^2n^2+1}\left(e\cdot(-1)^n-1\right)\cos(n\pi t).}}$$

Et data-plot av de 10 første leddene i denne rekka er vist til høyre.

**Oppgave 20b**

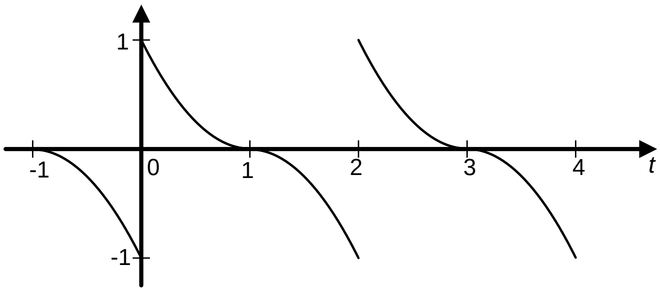
b)




Starter med å tegne grafen til

$$f(t)=(t-1)^2,\ t\in\langle 0,1\rangle$$

til venstre. ”Speiler” denne grafen om origo, og benytter denne to-delte grafen til å lage den odde halvperiodiske utvidelsen som er vist nedenfor:




Perioden er $p=2L=2 \quad\Leftrightarrow\quad L=1.$

Siden dette er en odde funksjon, blir rekka ei ren sinus-rekke:

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\pi t)$$

der

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(t)\sin\left(n\frac{\pi}{L}t\right)dt=\frac{2}{1}\int_0^1(t-1)^2\sin(n\pi t)\,dt$$

$$=2\cdot\frac{1}{n^3\pi^3}\left[\left(2-\pi^2n^2+2\pi^2n^2t-\pi^2n^2t^2\right)\cos(n\pi t)+(2\pi nt-2\pi n)\sin(n\pi t)\right]_0^1$$

$$=\frac{2}{n^3\pi^3}\left(\left(2-\pi^2n^2+2\pi^2n^2-\pi^2n^2\right)\underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n}-\left(2-\pi^2n^2\right)\cos 0+0-0\right)$$

$$=\frac{2}{n^3\pi^3}\left(2(-1)^n-2+\pi^2n^2\right)=\underline{\frac{4}{n^3\pi^3}\left((-1)^n-1\right)+\frac{2}{n\pi}}$$

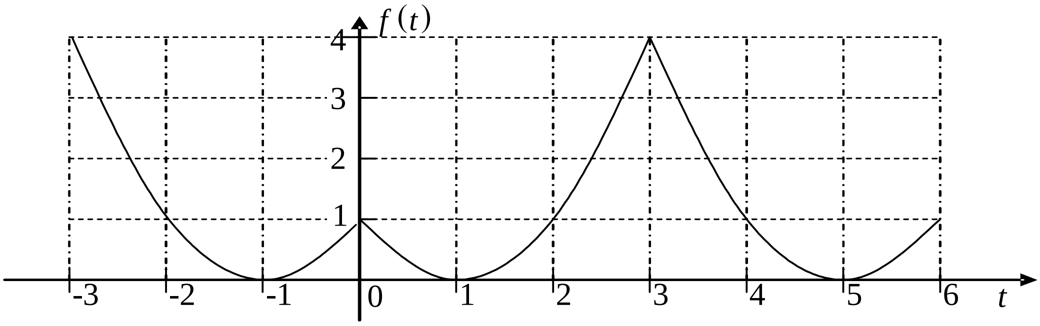
$$=\begin{cases}\dfrac{2}{n\pi} & \text{når}\quad n=2,4,6,\cdots\\[2ex] \dfrac{2}{n\pi}-\dfrac{8}{n^3\pi^3} & \text{når}\quad n=1,3,5,\cdots\end{cases}$$

Rekka blir altså

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n\pi}+\frac{2}{n^3\pi^3}\left((-1)^n-1\right)\right)\sin(n\pi t).$$

**Oppgave 20c**

Utsnitt av grafen til den jamne halvperiodisk utvidelsen:




Benytter formlene for en jamn funksjon. Da er Fourier-rekka

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{L}\cdot t\right)$$

der perioden $p=2L=6 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{L=3}$.

Videre er

$$a_0=\frac{1}{L}\int_0^L f(t)\,dt=\frac{1}{3}\int_0^3(t-1)^2\,dt=\tfrac{1}{3}\left[\tfrac{1}{3}t^3-t^2+t\right]_0^3=\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3}\cdot3^3-3^2+3-0\right)=\underline{1}$$

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos\left(n\frac{\pi}{L}t\right)dt=\tfrac{2}{3}\int_0^3(t-1)^2\cos\left(n\tfrac{1}{3}\pi t\right)dt$$

$$=\tfrac{2}{3}\cdot\frac{-1}{\pi^3n^3}\left[\left(54-3\pi^2n^2+6\pi^2n^2t-3\pi^2n^2t^2\right)\sin\left(\tfrac{1}{3}n\pi t\right)+\left(18\pi n-18\pi nt\right)\cos\left(\tfrac{1}{3}n\pi t\right)\right]_0^3$$

Her ser vi at sinus-faktorene blir lik null ved innsetting av begge grensene. Dermed står vi igjen med

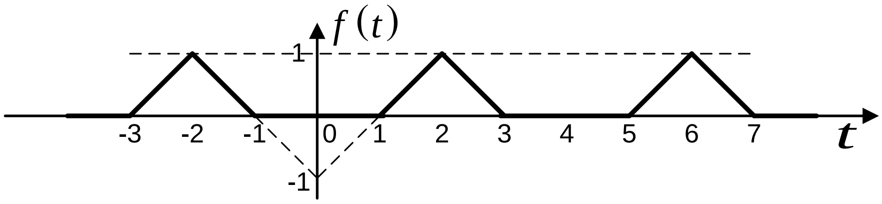
$$a_n=\frac{-2}{3\pi^3n^3}\left(\left(18\pi n-54\pi n\right)\underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n}-18\pi n\underbrace{\cos 0}_{=1}\right)=\frac{-2}{3\pi^3n^3}\left(-36\pi n(-1)^n-18\pi n\right)$$

$$=\underline{\frac{12}{\pi^2n^2}\left(2(-1)^n+1\right)}=\begin{cases}\dfrac{-12}{\pi^2n^2} & \text{når} \quad n=1,\,3,\,5,\,\cdots\\[2ex] \dfrac{36}{\pi^2n^2} & \text{når} \quad n=2,\,4,\,6,\end{cases}$$

Fourier-rekka blir da

$$1+\frac{12}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n+1}{n^2}\cos\left(n\tfrac{\pi}{3}t\right).$$

**Oppgave 21**




Funksjonen kan uttrykkes på flere måter. Den enkleste er kanskje:

$$f(t)=\begin{cases}-t-1 & \text{når} \quad -2<t<-1 \\ 0 & \text{når} \quad -1\le t\le 1 \\ t-1 & \text{når} \quad 1<t<2\end{cases}, \qquad f(t+4)=f(t)$$

Funksjonen er periodisk med periode $p=2L=4 \quad \Leftrightarrow \quad L=2$.

Videre ser vi at $f(t)$ er en jamn funksjon. Da blir Fourier-koeffisientene:

$$a_0=\frac{1}{L}\int_0^2 f(t)\,dt=\tfrac{1}{2}\int_1^2(t-1)\,dt=\tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2}t^2-t\right]_1^2=\tfrac{1}{2}\left(2-2-\tfrac{1}{2}+1\right)=\underline{\underline{\tfrac{1}{4}}}.$$

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^2 f(t)\cos\left(n\frac{\pi}{L}t\right)dt=\frac{2}{2}\int_1^2(t-1)\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi t\right)dt$$

$$=\left[\frac{1}{\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)^2}\left(\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi t\right)+\tfrac{1}{2}n\pi t\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi t\right)-\frac{1}{\tfrac{1}{2}n\pi t}\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi t\right)\right)\right]_1^2$$

$$=\left[\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi t\right)+\frac{1}{\tfrac{1}{2}n\pi}\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi t\right)-\frac{1}{\tfrac{1}{2}n\pi}\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi t\right)\right]_1^2$$

$$=\underline{\frac{4}{n^2\pi^2}\left(\cos(n\pi)-\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)\right)}$$

Altså kan Fourier-rekka skrives på formen

$$\underline{\underline{\tfrac{1}{4}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\cos(n\pi)-\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)\right)\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi t\right)}}$$

For oversiktens skyld kan vi lage en tabell over $\cos(n\pi)-\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)$:

| $n$ | $\cos(n\pi)$ | $\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)$ | $\cos(n\pi)-\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | -1 | 0 | -1 |
| 2 | 1 | -1 | 2 |
| 3 | -1 | 0 | -1 |
| 4 | 1 | 1 | 0 |

Deretter vil mønsteret gjentas for høyere verdier av *n*. Dette indikerer at:

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{-4}{n^2\pi^2} & \text{når} \quad n = 1,\ 3,\ 5,\cdots \\ \dfrac{8}{n^2\pi^2} & \text{når} \quad n = 2,\ 6,\ \cdots \\ 0 & \text{når} \quad n = 4,\ 8,\ \cdots \end{cases}$$

**Oppgave 22**

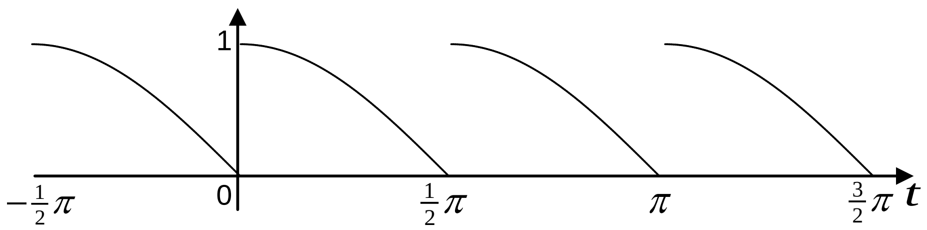
a) Sammenlikner med rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ som jeg vet konvergerer, og bruker grense-sammenlikningstesten siden leddene i rekka åpenbart er monotont avtakende:

$$\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{16n^2-1}} = \frac{16n^2-1}{n^2} = 16 - \frac{1}{n^2} \to 16 \text{ når } n \to \infty .$$

Siden denne grensen eksisterer og er forskjellig fra 0, må rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^2-1}$ også konvergere.

b) $f(t) = \cos t$ når $0 \le t < \frac{1}{2}\pi$ , $f\left(t + \frac{1}{2}\pi\right) = f(t)$.

Grafen til funksjonen er vist nedenfor.




Perioden er

$$p = 2L = \tfrac{1}{2}\pi \quad \Leftrightarrow \quad L = \tfrac{1}{4}\pi .$$

Da er

$$\frac{\pi}{L} = \frac{\pi}{\frac{1}{4}\pi} = 4 .$$

Rekka er av formen

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\frac{\pi}{L}t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\frac{\pi}{L}t\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(4nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(4nt)$$

der

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_0^{2L} f(t)\,dt = \frac{1}{2\cdot\frac{1}{4}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos t\,dt = \frac{2}{\pi}[\sin t]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) - \sin 0\right) = \underline{\frac{2}{\pi}}.$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(t)\cos\left(n\frac{\pi}{L}t\right)dt = \frac{1}{\frac{1}{4}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos t\cdot\cos(4nt)\,dt$$

$$= \frac{4}{\pi}\cdot\tfrac{1}{2}\left[\frac{\sin((1+4n)t)}{1+4n}+\frac{\sin((1-4n)t)}{1-4n}\right]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin((4n+1)t)}{4n+1}+\frac{\sin((4n-1)t)}{4n-1}\right]_0^{\frac{1}{2}\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin\left(2n\pi+\frac{1}{2}\pi\right)-\sin 0}{4n+1}+\frac{\sin\left(2n\pi-\frac{1}{2}\pi\right)-\sin 0}{4n-1}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)}{4n+1}+\frac{\sin\left(-\frac{1}{2}\pi\right)}{4n-1}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{4n+1}+\frac{-1}{4n-1}\right) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{(4n-1)-(4n+1)}{(4n)^2-1} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{-2}{16n^2-1} = \underline{\frac{-4}{\pi}\cdot\frac{1}{16n^2-1}}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(t)\sin\left(n\frac{\pi}{L}t\right)dt = \frac{1}{\frac{1}{4}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos t\cdot\sin(4nt)\,dt$$

$$= \frac{4}{\pi}\cdot\tfrac{1}{2}\left[\frac{\cos((1-4n)t)}{1-4n}-\frac{\cos((1+4n)t)}{1+4n}\right]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos((4n-1)t)}{-(4n-1)}-\frac{\cos((4n+1)t)}{4n+1}\right]_0^{\frac{1}{2}\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\cos\left(2n\pi-\frac{1}{2}\pi\right)-\cos 0}{4n-1}-\frac{\cos\left(2n\pi+\frac{1}{2}\pi\right)-\cos 0}{4n+1}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\cos\left(-\frac{1}{2}\pi\right)-1}{4n-1}-\frac{\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right)-1}{4n+1}\right) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{0-1}{4n-1}-\frac{0-1}{4n+1}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{(4n+1)+(4n-1)}{(4n)^2-1} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{8n}{16n^2-1} = \underline{\frac{16}{\pi}\cdot\frac{n}{16n^2-1}}$$

Rekka blir

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(4nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(4nt)$$

$$= \underline{\underline{\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{16n^2-1}\cos(4nt)+\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{16n^2-1}\sin(4nt)}}$$

c) Når $t \to 0$ vil Fourier-rekka konvergere mot $\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$.

Da blir Fourier-rekka

$$\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{16n^2-1}\cos(4n\cdot 0)+\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{16n^2-1}\sin(4n\cdot 0)=\frac{1}{2}$$

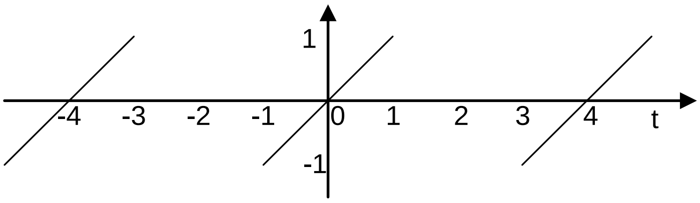
$$\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{16n^2-1}\cdot 1+0=\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{16n^2-1}=\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{16n^2-1}=\frac{\pi}{4}\left(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}\right)=\underline{\underline{\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}}}$$

**Oppgave 23**

$$f(t)=\begin{cases}0 & \text{når} \quad -2<t<-1\\ t & \text{når} \quad -1\le t\le 1\\ 0 & \text{når} \quad 1<t<2\end{cases}, \qquad\qquad f(t+4)=f(t).$$

Grafen blir omtrent slik:




Vi ser at perioden er $p=2L=4 \quad \Leftrightarrow \quad L=2$.

Dette er en odde funksjon, slik at $a_n=\underline{\underline{0}}$, $n=0, 1, 2, \cdots$.

Videre blir

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L t\sin\left(n\frac{\pi}{L}t\right)dt=\frac{2}{2}\int_0^2 t\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi t\right)dt$$

$$=-\frac{1}{\left(\frac{1}{2}n\pi\right)^2}\left[\tfrac{1}{2}n\pi t\cdot\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi t\right)-\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi t\right)\right]_0^1$$

$$=\frac{-4}{n^2\pi^2}\left(\tfrac{1}{2}n\pi\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)-0-\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)+\sin 0\right)=\underline{\frac{-4}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{-4}{n^2\pi^2}\right)-\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{-4}{n^2\pi^2}\right)}$$

Fourier-rekka blir

$$\underline{\underline{\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n^2}\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)-\frac{\pi}{n}\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)\right)\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi t\right)}}.$$

Setter opp en tabell over $\sin\left(\frac{1}{2}n\pi\right)$ og $\cos\left(\frac{1}{2}n\pi\right)$:

| $n$ | $\sin\left(\frac{1}{2}n\pi\right)$ | $\cos\left(\frac{1}{2}n\pi\right)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | -1 |
| 3 | -1 | 0 |
| 4 | 0 | 1 |

Av tabellen ser vi at

$$b_n=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot 4}{n^2\pi^2} & \text{når} \quad n=1, 3, 5, \cdots\\[2ex] \dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}+1}\cdot 2}{n\pi} & \text{når} \quad n=2, 4, 6, \cdots\end{cases}$$

Vi skal nå bruke dette til å finne summen av rekka

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots.$$

Av tabellen ser vi at $\cos\left(\frac{1}{2}n\pi\right)=0$ når $n=1, 3, 5, \cdots$, og at $\sin\left(\frac{1}{2}n\pi\right)=0$ når $n=2, 4, 6, \cdots$.
Vi setter derfor inn $t=1$ i Fourier-rekka. Da forsvinner alle ledd med $n=2, 4, 6, \cdots$. Vi skriver ut noen av de første leddene:

$$\frac{2}{\pi^2}\left(\left(\frac{2}{1^2}\cdot 1-0\right)\cdot 1+\left(\frac{2}{3^2}\cdot(-1)-0\right)\cdot(-1)+\left(\frac{2}{5^2}\cdot 1-0\right)\cdot 1+\cdots\right)$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots\right)$$

Rekka konvergerer mot

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{t\to 1^-} f(t)+\lim_{t\to 1^+} f(t)\right)=\frac{1}{2}(1+0)=\underline{\frac{1}{2}} \text{ når } t=1.$$

Altså er

$$\frac{4}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots\right)=\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}}}.$$

**Oppgave 24**

a) Bruker grensesammenlikningstesten, og sammenlikner med rekka $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ som jeg vet konvergerer:

$$\frac{\frac{1}{(2n-1)^2}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{n^2}{(2n-1)^2}=\frac{n^2}{4n^2-4n+1}=\frac{1}{4-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}.$$

Ser at når $n\to\infty$, vil dette forholdet gå mot $\frac{1}{4}$. Ifølge grensesammenlikningstesten vil da rekka $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$ konvergere siden rekka $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergerer.

b) Forholdstesten gir nå:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{\frac{(n+1)+1}{(n+1)!}(x-1)^{n+1}}{\frac{n+1}{n!}(x-1)^n}\right|=\left|\frac{(n+2)(x-1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{(n+1)(x-1)^n}\right|$$

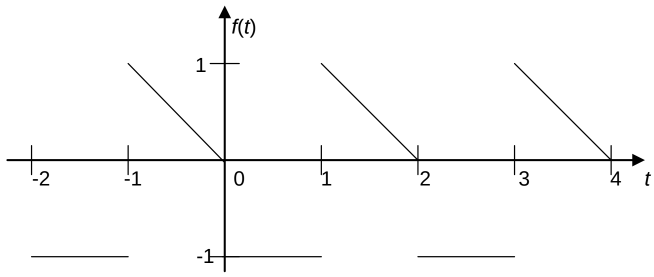
$$=\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}|x-1|=\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{1}{n+1}|x-1|$$

Her ser vi at når $n\to\infty$, blir

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1+0}{1+0}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Altså er $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0\cdot|x-1|$, som viser at dette forholdet er mindre enn 1 for alle verdier av *x*. Altså konvergerer rekka for alle $x\in\mathbb{R}$.

c1)




c2) Vi ser at perioden er $p = 2L = 2 \quad \Leftrightarrow \quad L = 1$.
Da er Fourier-rekka

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi t)$$

der

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\,dt = \frac{1}{2\cdot 1}\left(\int_{-1}^{0}(-t)\,dt + \int_{0}^{1}(-1)\,dt\right) = \tfrac{1}{2}\left(\left[-\tfrac{1}{2}t^2\right]_{-1}^{0} - [t]_0^1\right) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2} - 1\right) = \underline{-\tfrac{1}{4}}.$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\left(n\frac{\pi}{L}t\right)dt = \frac{1}{1}\left(\int_{-1}^{0}(-t)\cos(n\pi t)\,dt + \int_{0}^{1}(-1)\cos(n\pi t)\,dt\right)$$

$$= -\frac{1}{(n\pi)^2}\left[\cos(n\pi t) + n\pi t\sin(n\pi t)\right]_{-1}^{0} - \frac{1}{n\pi}\left[\sin(n\pi t)\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{(n\pi)^2}\left(\underbrace{\cos 0}_{=1} - \underbrace{\cos(-n\pi)}_{=(-1)^n} + 0 - (-n\pi)\underbrace{\sin(-n\pi)}_{=0}\right) - \frac{1}{n\pi}\left(\underbrace{\sin(n\pi)}_{=0} - \underbrace{\sin 0}_{=0}\right)$$

$$= \underline{\frac{-1 + (-1)^n}{n^2\pi^2}} = \begin{cases} \dfrac{-2}{n^2\pi^2} & \text{når} \quad n = 1, 3, 5, \cdots \\ 0 & \text{når} \quad n = 2, 4, 6, \cdots \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\left(n\frac{\pi}{L}t\right)dt = \frac{1}{1}\left(\int_{-1}^{0}(-t)\sin(n\pi t)\,dt + \int_{0}^{1}(-1)\sin(n\pi t)\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{(n\pi)^2}\left[n\pi t\cos(n\pi t) - \sin(n\pi t)\right]_{-1}^{0} + \frac{1}{n\pi}\left[\cos(n\pi t)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{n^2\pi^2}\left(0 - \underbrace{\sin 0}_{=0} + n\pi\underbrace{\cos(-n\pi)}_{=(-1)^n} + \underbrace{\sin(-n\pi)}_{=0}\right) + \frac{1}{n\pi}\left(\underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} - \underbrace{\cos 0}_{=1}\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{n\pi} + \frac{(-1)^n}{n\pi} - \frac{1}{n\pi} = \frac{2(-1)^n - 1}{n\pi} = \begin{cases} \frac{-3}{n\pi} & \text{når} \;\; n = 1, 3, 5, \cdots \\ \frac{1}{n\pi} & \text{når} \;\; n = 2, 4, 6, \cdots \end{cases}$$

Rekka blir altså

$$\underline{\underline{-\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\left((2k-1)\pi t\right) + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n - 1}{n}\sin(n\pi t)}}.$$

c3) Når vi setter inn $t = 0$ i rekka, vil den konvergere mot

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{t\to 0^-} f(t) + \lim_{t\to 0^+} f(t)\right) = \frac{1}{2}\left(0 + (-1)\right) = -\frac{1}{2}.$$

Videre ser vi at alle cosius-faktorene i Fourier-rekka blir lik 1, mens alle sinusleddene blir lik 0. Altså er

$$-\frac{1}{4}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cdot 1+\frac{1}{\pi}\cdot 0=-\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$$

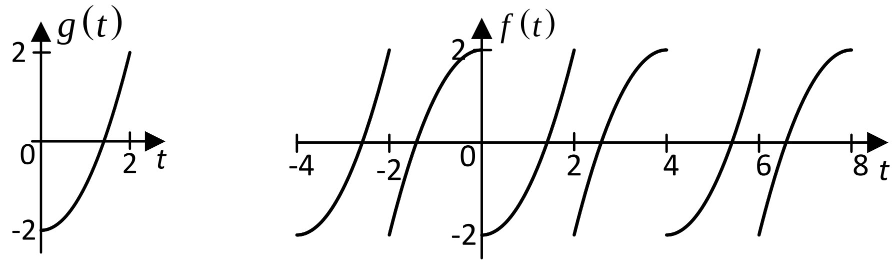
$$\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\underline{\underline{\frac{\pi^2}{8}}}$$

**Oppgave 25**

a1) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3}=\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\cdots.$$

Dette er en alternerende rekke der absoluttverdien av leddene åpenbart går mot null. Da konvergerer rekka.

b) Grafene til del b1) og del b2) er tegnet nedenfor.




b3) Ser at $f$ har periode $p=2L=4 \quad\Leftrightarrow\quad L=2$.

Siden $f$ er en odde funksjon, blir Fourier-rekka av formen

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(n\frac{\pi}{L}t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(n\frac{\pi}{2}t\right)$$

der

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(t)\sin\left(n\frac{\pi}{L}t\right)dt=\frac{2}{2}\int_0^2\left(t^2-2\right)\sin\left(n\frac{\pi}{2}t\right)dt=\int_0^2\left(t^2-2\right)\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi t\right)dt$$

$$=-\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\pi n\right)^3}\left[\left(\left(\tfrac{1}{2}\pi nt\right)^2-2\right)\cos\left(\tfrac{1}{2}\pi nt\right)-2\cdot\tfrac{1}{2}\pi nt\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi nt\right)\right]_0^2-\frac{-2}{\frac{1}{2}\pi n}\left[\cos\left(\tfrac{1}{2}\pi nt\right)\right]_0^2$$

$$=\frac{-8}{\pi^3n^3}\left(\left(\pi^2n^2-2\right)\underbrace{\cos(\pi n)}_{=(-1)^n}-(-2)\underbrace{\cos 0}_{=1}-2\pi n\underbrace{\sin(\pi n)}_{=0}\right)+\frac{4}{\pi n}\left(\underbrace{\cos(\pi n)}_{=(-1)^n}-\underbrace{\cos 0}_{=1}\right)$$

$$=\frac{-8}{\pi^3n^3}\left(\left(\pi^2n^2-2\right)(-1)^n+2\right)+\frac{4}{\pi n}\left((-1)^n-1\right)$$

$$=\frac{-8\cdot(-1)^n}{\pi n}+\frac{16\cdot(-1)^n}{\pi^3n^3}-\frac{16}{\pi^3n^3}+\frac{4\cdot(-1)^n}{\pi n}-\frac{4}{\pi n}$$

$$=\underline{\frac{16}{\pi^3n^3}\left((-1)^n-1\right)-\frac{4}{\pi n}\left(1+(-1)^n\right)}=\begin{cases}\dfrac{-32}{\pi^3n^3} & \text{når} \quad n=1,3,5,\cdots\\[2ex] \dfrac{-8}{\pi n} & \text{når} \quad n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

Setter at $n = 2k - 1$ når $n = 1, 3, 5, \cdots, 2k-1, \cdots$, og at $n = 2k$ når $n = 2, 4, 6, \cdots, 2k, \cdots$, $k = 1, 2, 3, \cdots$. Fourier-rekka blir da

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\tfrac{1}{2} n\pi t\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-32}{(2k-1)^3 \pi^3} \sin\left(\tfrac{1}{2}(2k-1)\pi t\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-8}{(2k)\pi} \sin\left(\tfrac{1}{2} \cdot 2k \cdot \pi t\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{-32}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \sin\left(\tfrac{1}{2}(2k-1)\pi t\right) - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(k\pi t)}}$$

b4) Når $t = 1$, er $f(1) = 1^2 - 2 = -1$.

Vet at Fourier-rekka konvergerer mot denne verdien. Ser at $\sin(k\pi \cdot 1) = 0$ og at

$$\sin\left(\tfrac{1}{2}(2k-1)\pi \cdot 1\right) = \sin\left(k\pi - \tfrac{1}{2}\pi\right) = (-1)^{k+1}.$$

Da blir

$$-1 = \frac{-32}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} (-1)^{k+1} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}}}.$$

**Oppgave 26**

a) Rekka $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n^2}$ konvergerer når

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{(-1)^{n+2} x^{n+1}}{(n+1)^2}}{\dfrac{(-1)^{n+1} x^n}{n^2}} \right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n^2}{(n+1)^2} x \right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} \cdot |x| < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad |x| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{-1 < x < 1}$$

Må også undersøke endepunktene:

$x = -1$: Rekka blir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

som konvergerer (konvergens av $p$-rekke).

$x = 1$: Rekka blir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 1^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

som også konvergerer (konvergens av $p$-rekke, eller av alternerende rekke).

Altså konvergerer rekka for $\underline{\underline{-1 \le x \le 1}}$.

b1) Benytter at

$$\ln(t+1) = t - \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{3}t^3 - \tfrac{1}{4}t^4 + \cdots.$$

Da blir

$$\int_0^x \frac{\ln(t+1)}{t}\,dt = \int_0^x \frac{1}{t}\left(t - \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{3}t^3 - \tfrac{1}{4}t^4 + \cdots\right)dt = \int_0^x \left(1 - \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{3}t^2 - \tfrac{1}{4}t^3 + \cdots\right)dt$$

$$= \left[t - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3}t^3 - \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{4}t^4 + \cdots\right]_0^x = \underline{\underline{x - \tfrac{1}{2^2}x^2 + \tfrac{1}{3^2}x^3 - \tfrac{1}{4^2}x^4 + \cdots}}$$

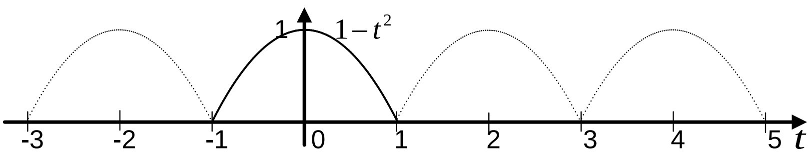
$$= \underline{\underline{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} x^n}}$$

b2) $$\int_0^1 \frac{\ln(t+1)}{t}\,dt \approx 1 - \tfrac{1}{4}\cdot 1^2 + \tfrac{1}{9}\cdot 1^3 - \tfrac{1}{16}\cdot 1^4 + \tfrac{1}{25}\cdot 1^5 \approx \underline{\underline{0.8386}}.$$

Øvre grense for unøyaktigheten er

$$\left|-\tfrac{1}{6^2}\cdot 1\right| = \underline{\underline{\tfrac{1}{36}}} \approx \underline{\underline{0.03}}.$$

c1)




c2) Dette er åpenbart en jamn funksjon med periode $p = 2L = 2 \quad \Leftrightarrow \quad L = 1$.

Da er Fourier-rekka gitt ved

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\frac{\pi}{L}t\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi t)$$

der

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(t)\,dt = \frac{1}{1}\int_0^1 (1-t^2)\,dt = \left[t - \tfrac{1}{3}t^3\right]_0^1 = 1 - \tfrac{1}{3} = \underline{\tfrac{2}{3}}$$

og

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos\left(n\frac{\pi}{L}t\right)dt = 2\int_0^1 (1-t^2)\cos(n\pi t)\,dt$$

$$= 2\cdot\frac{1}{\pi^3 n^3}\left[(2 + \pi^2 n^2 - \pi^2 n^2 t^2)\sin(n\pi t) - 2n\pi t\cos(n\pi t)\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{\pi^3 n^3}\left((2 + \pi^2 n^2 - \pi^2 n^2)\underbrace{\sin(n\pi)}_{=0} - 2n\pi\underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} - 0 + 0\right) = \underline{\frac{-4}{\pi^2 n^2}.(-1)^n}$$

Da blir Fourier-rekka

$$\underline{\underline{\frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi t)}}.$$

c3) Ser at $f(0) = 1$, og at Fourier-rekka blir

$$\frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(0) = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cdot 1 = \frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

når $t = 0$. Dermed er

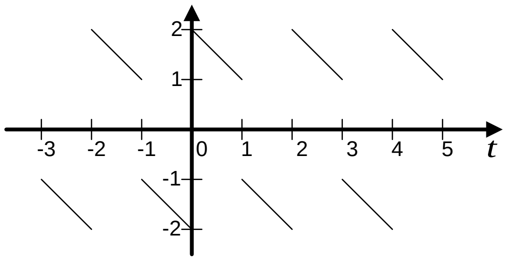
$$\frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Men fra del b) av oppgaven har vi at

$$\int_0^1 \frac{\ln(t+1)}{t}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cdot 1^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{12}}}.$$

**Oppgave 27**

a)




Vi har en odde funksjon med periode

$$p = 2L = 2 \quad \Leftrightarrow \quad L = 1,$$

slik at vi får ei Fourier-sinus-rekke av formen

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi t)$$

der

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = 2\int_0^1 (2-t)\sin(n\pi t)\,dt$$

$$= -\frac{2}{\pi^2 n^2}\left[\sin(\pi n t) + (2\pi n - \pi n t)\cos(\pi n t)\right]_0^1$$

$$= -\frac{2}{\pi^2 n^2}\left(\sin(\pi n) + (2\pi n - \pi n)\cos(\pi n) - \sin 0 - (2\pi n \cos 0)\right)$$

$$= -\frac{2}{\pi^2 n^2}\left(0 + \pi n \cdot (-1)^n - 0 - 2\pi n \cdot 1\right) = \underline{\frac{2}{\pi n}\left(2 - (-1)^n\right)}$$

Da blir Fourier-rekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n}\left(2-(-1)^n\right)\sin(n\pi t) = \underline{\underline{\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(2-(-1)^n\right)\sin(n\pi t)}}.$$

b) Når vi setter $t = \frac{1}{2}$, blir

$$\sin\left(n\pi \cdot \tfrac{1}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{når} \quad n = 2,4,6,\cdots \\ 1 & \text{når} \quad n = 1,5,9,\cdots \\ -1 & \text{når} \quad n = 3,7,11,\cdots \end{cases}$$

Videre ser vi at

$$2 - (-1)^n = 2 - (-1) = 3 \;\text{ når }\; n = 1,3,5,7,\cdots.$$

Da blir Fourier-rekka

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1}\cdot 3 \cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 3\cdot(-1) + \frac{1}{5}\cdot 3\cdot 1 + \frac{1}{7}\cdot 3 \cdot(-1) + \cdots\right)$$

$$= \frac{6}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right) = \underline{\underline{\frac{6}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}}}$$

Når $t = \frac{1}{2}$, blir $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Vet at Fourier-rekka konvergerer mot denne verdien når $t = \frac{1}{2}$, slik at

$$\frac{6}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{6} = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}.$$

# 5. Tillegg.

## *5.1. Tabell over ubestemte integral.*

Nedenfor finner du en liten tabell over de ubestemte integralene som er mest aktuelle når du beregner Fourier-koeffisienter. Integrasjonskonstanten er ikke tatt med.

$$\int \cos(ax)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax)$$

$$\int \sin(ax)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax)$$

$$\int x\cos(ax)\,dx = \frac{1}{a^2}\big(\cos(ax) + ax\sin(ax)\big)$$

$$\int x\sin(ax)\,dx = -\frac{1}{a^2}\big(ax\cos(ax) - \sin(ax)\big)$$

$$\int x^2\cos(ax)\,dx = \frac{1}{a^3}\big(2ax\cos(ax) + (a^2x^2 - 2)\sin(ax)\big)$$

$$\int x^2\sin(ax)\,dx = -\frac{1}{a^3}\big((a^2x^2 - 2)\cos(ax) - 2ax\sin(ax)\big)$$

$$\int x^3\cos(ax)\,dx = \frac{1}{a^4}\big((3a^2x^2 - 6)\cos(ax) + (a^3x^3 - 6ax)\sin(ax)\big)$$

$$\int x^3\sin(ax)\,dx = -\frac{1}{a^4}\big((a^3x^3 - 6ax)\cos(ax) - (3a^2x^2 - 6)\sin(ax)\big)$$

$$\int x^4\cos(ax)\,dx = \frac{1}{a^5}\big((4a^3x^3 - 24ax)\cos(ax) + (a^4x^4 - 12a^2x^2 + 24)\sin(ax)\big)$$

$$\int x^4\sin(ax)\,dx = -\frac{1}{a^5}\big((a^4x^4 - 12a^2x^2 + 24)\cos(ax) - (4a^3x^3 - 24ax)\sin(ax)\big)$$

$$\int \cos(ax)\cos(bx)\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin((a+b)x)}{a+b} + \dfrac{\sin((a-b)x)}{a-b}\right) & \text{når} \quad a \neq b \\[2ex] \dfrac{1}{4a}\big(\sin(2ax) + 2ax\big) & \text{når} \quad a = b \end{cases}$$

$$\int \cos(ax)\sin(bx)\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos((a-b)x)}{a-b} - \dfrac{\cos((a+b))}{a+b}\right) & \text{når} \quad a \neq b \\[2ex] -\dfrac{1}{4a}\cos(2ax) & \text{når} \quad a = b \end{cases}$$

$$\int \sin(ax)\sin(bx)\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin((a-b)x)}{a-b} - \dfrac{\sin((a+b)x)}{a+b}\right) & \text{når} \quad a \neq b \\[2ex] -\dfrac{1}{4a}\big(\sin(2ax) - 2ax\big) & \text{når} \quad a = b \end{cases}$$

$$\int e^{ax}\cos(bx)\,dt = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}\big(a\cos(bx) + b\sin(bx)\big)$$

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dt = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}\big(a\sin(bx) - b\cos(bx)\big)$$

## 5.2. Zenons paradoks.

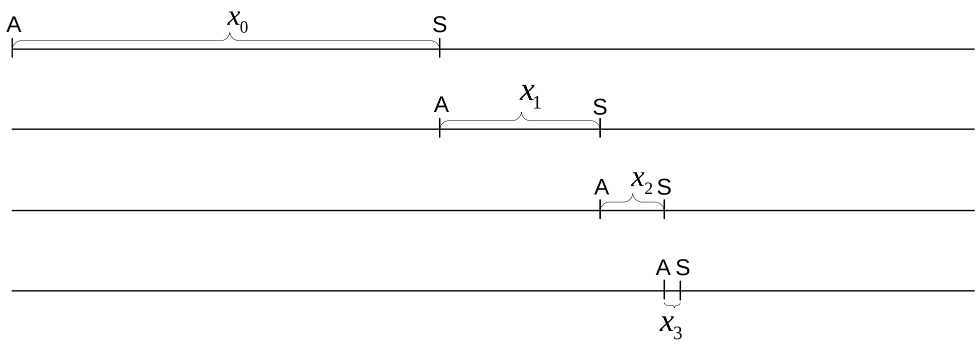
Oldtidens greske filosofer var svært opptatt av den sunne fornuft og logiske resonnement. Men noen ganger kunne den rene, sunne fornuften føre til merkelige resultater som åpenbart var i strid med vår erfaring. ***Zenons paradoks*** er kanskje det mest kjente av disse. Det er omtrent slik:

*En dag møtte den store atleten Akilles en skilpadde. Skilpadden spurte om Akilles ville løpe om kapp med den. Men siden Akilles var en så sprek atlet, ville skilpadden ha et lite forsprang. Akilles gikk selvfølgelig med på det, og lot skilpadden få et godt forsprang før han selv begynte å løpe.*

*Først måtte Akilles komme til det stedet der skilpadden var da Akilles begynte å løpe. Men da var skilpadden kommet litt lenger fram. Så måtte Akilles komme dit skilpadden nå var kommet. Men da var skilpadden kommet enda lenger fram. Og slik fortsatte det. Hele tiden måtte Akilles først komme til det stedet der skilpadden befant seg, og da var skilpadden kommet enda litt lenger fram. Altså var det umulig for Akilles å nå igjen skilpadden, og enda mer umulig å løpe forbi.*

Resonnementet synes å være uangripelig fra et rent logisk synspunkt. Likevel strider det mot all praktisk erfaring. Hva er galt?

For å finne feilen, kan vi formulere kappløpet mer matematisk ved hjelp av figuren nedenfor, der Akilles' posisjon er A mens skilpaddens posisjon er S:




Anta at skilpadden fikk et forsprang $x_0$ før Akilles begynte å løpe. Når Akilles hadde løpt strekningen $x_0$, hadde skilpadden kravlet en ny strekning $x_1$. Når Akilles hadde løpt denne strekningen, hadde skilpadden kravlet en ny strekning $x_2$. Og slik fortsatte det.

Anta at Akilles løp med konstant fart $v_A$, mens skilpadden kravlet med konstant fart $v_S$. Akilles brukte da en tid

$$t_0 = \frac{x_0}{v_A}$$

på å løpe strekningen $x_0$. På denne tiden kravlet skilpadden en strekning

$$x_1 = v_S t_0 = v_S \cdot \frac{x_0}{v_A} = x_0 \cdot \frac{v_S}{v_A}.$$

Denne strekningen løp Akilles på en tid

$$t_1 = \frac{x_1}{v_A} = \frac{1}{v_A}\left(x_0 \cdot \frac{v_S}{v_A}\right) = x_0 \cdot \frac{v_S}{v_A^{\,2}}.$$

Men nå har skilpadden kravlet en ny strekning

$$x_2 = v_S t_1 = v_S \cdot \left(x_0 \cdot \frac{v_S}{v_A^{\,2}}\right) = x_0 \cdot \frac{v_S^{\,2}}{v_A^{\,2}}$$

som Akilles tilbakelegger på en tid

$$t_2 = \frac{x_2}{v_A} = \frac{1}{v_A}\left(x_0 \cdot \frac{v_S^{\,2}}{v_A^{\,2}}\right) = x_0 \cdot \frac{v_S^{\,2}}{v_A^{\,3}}.$$

Og slik fortsetter det. På strekning nr. $n$ kravler skilpadden en strekning

$$x_n = x_0 \cdot \frac{v_S^{\,n}}{v_A^{\,n}}$$

som Akilles tilbakelegger på en tid

$$t_n = x_0 \cdot \frac{v_S^{\,n}}{v_A^{\,n+1}}.$$

Den samlede tiden Akilles bruker på å løpe $n$ slike stadig mindre strekninger, er derfor

$$T_n = t_0 + t_1 + t_2 + \cdots t_n = \frac{x_0}{v_A} + x_0 \cdot \frac{v_S}{v_A^{\,2}} + x_0 \cdot \frac{v_S^{\,2}}{v_A^{\,3}} + \cdots + x_0 \cdot \frac{v_S^{\,n}}{v_A^{\,n+1}}.$$

Men dette er en geometrisk rekke med første ledd $a_1 = \frac{x_0}{v_A}$ og kvotient $k = \frac{v_S}{v_A}$. Summen blir

$$T_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} = \frac{x_0}{v_A} \cdot \frac{\left(\frac{v_S}{v_A}\right)^n - 1}{\frac{v_S}{v_A} - 1} = \frac{x_0}{v_S - v_A}\left(\left(\frac{v_S}{v_A}\right)^n - 1\right) = \underline{\frac{x_0}{v_A - v_S}\left(1 - \left(\frac{v_S}{v_A}\right)^n\right)}.$$

Men siden skilpadden beveger seg langsommere enn Akilles, er $v_S < v_A$. Da er $\frac{v_S}{v_A} < 1$, slik at $\left(\frac{v_S}{v_A}\right)^n \to 0$ når $n \to \infty$. Dette betyr at når $n \to \infty$, vil $T \to \frac{x_0}{v_A - v_S}$. Dermed vil det ta en endelig tid $T$ før Akilles har løpt uendelig mange slike stadig mindre strekninger, og det tar en endelig tid $T$ før Akilles tar igjen skilpadden.

Dette resultatet kan vi etterprøve med å bruke bevegelseslikninger for konstant fart. Vi legger origo der Akilles starter. Skilpaddens posisjon ved tiden $t$ er da

$$x_S = x_0 + v_S t$$

mens Akilles' posisjon er

$$x_A = v_A t.$$

Idet Akilles tar igjen skilpadden, er

$$x_S = x_A \quad \Leftrightarrow \quad x_0 + v_S t = v_A t \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{x_0}{v_A - v_S}.$$

Og det er (heldigvis) samme tid som vi fant da vi analyserte tidsforbruket i Zenons paradoks.

## *5.3. Litt finansmatematikk.*

Geometriske rekker er svært viktige innen finansmatematikk. Utgangspunktet er at dersom et beløp $K_0$ får forrente seg til *p* % rente i *n* terminer, og renten legges til kapitalen etter hver termin, vil kapitalen ved *starten* av termin nr. *n* ha vokst til

$$K_n = K_0\left(1+\tfrac{p}{100}\right)^n.$$

Hvis man nå etter et fast beløp $K_0$ inn i en bank ved starten av hver termin, vil man like etter innskudd nr. *n* ha innestående et beløp

$$K = K_0 + K_0\left(1+\tfrac{p}{100}\right) + K_0\left(1+\tfrac{p}{100}\right)^2 + \cdots + K_0\left(1+\tfrac{p}{100}\right)^{n-1}.$$

Men dette er en geometrisk rekke med *n* ledd og kvotient $\left(1+\tfrac{p}{100}\right)$, slik at

$$K = a_1\frac{\left(1+\tfrac{p}{100}\right)^n - 1}{\left(1+\tfrac{p}{100}\right)-1} = \underline{K_0\cdot\tfrac{100}{p}.\left(\left(1+\tfrac{p}{100}\right)^n-1\right)}.$$

***Eksempel 5.3.1:*** Du setter inn 10 000 kroner i banken hvert år til 4% årlig rente.
a) Hvor mye har du stående i banken like etter det 10. innskuddet?
b) Hvor lang tid tar det før det oppsamlede beløpet har vokst til 200 000 kroner?

*Løsning:*
a) Bruker formelen over, og får

$$K = K_0\cdot\tfrac{100}{p}.\left(\left(1+\tfrac{p}{100}\right)^n-1\right) = 10000\cdot\tfrac{100}{4}\cdot\left(1.04^{10}-1\right) = 10000\cdot 25\cdot 0.480244 = \underline{\underline{120061}}.$$

b) Må nå løse *n* av likningen

$$200000 = 10000\cdot\tfrac{100}{4}.\left(\left(1+\tfrac{4}{100}\right)^n-1\right) \quad\Leftrightarrow\quad 20 = 25\left(1.04^n-1\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad 1.04^n - 1 = 0.80 \quad\Leftrightarrow\quad 1.04^n = 1.80$$

$$\ln\left(1.04^n\right) = \ln 1.80 \quad\Leftrightarrow\quad n\cdot\ln 1.04 = \ln 1.80 \quad\Leftrightarrow\quad n = \frac{\ln 1.80}{\ln 1.04} \approx \underline{\underline{15}}.$$

Det vil altså ta 15 år før oppsamlet beløp er vokst til 200 000 kroner. Da er beløpet vokst til 200 236 kroner ved hjelp av formelen i a).

Dersom du får utbetalt et beløp en gang i framtiden, har dette en ***nåverdi*** som er lik det innskuddet som du kan sette i banken i dag til en kjent rente for å få beløpet. Mer presist kan vi si at dersom du får et beløp $K_n$ om *n* terminer, er nåverdien $K_0$ ved *p* % rente gitt ved

$$K_n = K_0\left(1+\tfrac{p}{100}\right)^n \quad\Leftrightarrow\quad K_0 = \frac{K_n}{\left(1+\tfrac{p}{100}\right)^n}.$$

Et ***annuitetslån*** er et lån der tilbakebetalingen skjer med like store beløp. I starten betaler du mest bare renter av lånet, men etter hvert vil en stadig større del av terminbeløpet være avdrag på lånet. Terminbeløpet beregnes ved å sette at summen nåverdiene av alle terminbeløpene skal være lik størrelsen av lånet. Vi setter lånebeløpet lik *L*, terminbeløpet som du betaler tilbake er *T*, renten er *p*, og vi har *n* terminer. Dersom første terminbeløp betales etter 1 termin, får vil likningen

$$L = \frac{T}{1+\frac{p}{100}} + \frac{T}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^2} + \cdots + \frac{T}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n}.$$

Dette er en geometrisk rekke med første ledd $a_1 = \frac{T}{1+\frac{p}{100}}$ og kvotient $k = \frac{1}{1+\frac{p}{100}}$. Dette gir

$$L = a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k-1} = \frac{T}{1+\frac{p}{100}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1+\frac{p}{100}}\right)^n - 1}{\frac{1}{1+\frac{p}{100}} - 1} = T \cdot \frac{\left(\frac{1}{1+\frac{p}{100}}\right)^n - 1}{1 - \left(1+\frac{p}{100}\right)} = T \cdot \frac{\left(\frac{1}{1+\frac{p}{100}}\right)^n - 1}{-\frac{p}{100}}$$

$$= T \cdot \tfrac{100}{p} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{1+\frac{p}{100}}\right)^n\right) \quad \Leftrightarrow \quad T = L \cdot \tfrac{p}{100} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{1+\frac{p}{100}}\right)^n} = L \cdot \tfrac{p}{100} \cdot \frac{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n - 1}$$

Det er flere måter å beregne størrelsen av restlånet under veis. Det enkleste er kanskje å si at størrelsen av restlånet er nåverdien av de terminbeløpene som *ikke* er betalt hittil, beregnet til det aktuelle tidspunktet.

***Eksempel 5.3.2:*** Du låner 200 000 kroner, som skal betales tilbake i 15 årlige terminer med like store terminbeløp (annuitetsprinsippet) med 8% rente. Første tilbakebetaling ett år etter låneopptak.

a) Hvor stort blir terminbeløpet?
b) Hvor mye av dette er avdrag, og hvor mye er renter ved første terminbeløp?
c) Hvor mye er avdrag, og hvor mye er renter ved 10. terminbeløp?

*Løsning:*

a) Bruker formelen ovenfor:

$$T = L \cdot \tfrac{p}{100} \cdot \frac{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n - 1} = 200000 \cdot \tfrac{8}{100} \cdot \frac{1.08^{15}}{1.08^{15} - 1} = \underline{\underline{23361.91}}.$$

b) Du betaler rente av hele beløpet, slik at renten er $\frac{8}{100} \cdot 200000 = \underline{\underline{16000}}$.

Da blir avdraget $23361.91 - 16000 = \underline{\underline{7361.91}}$.

c) Like etter at det 9. terminbeløpet ble betalt, sto det igjen 6 terminer. Nåverdien av disse (beregnet til tidspunktet da 9. terminbeløp ble betalt) var

$$R = \frac{T}{1+\frac{p}{100}} + \frac{T}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^2} + \cdots + \frac{T}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^6}.$$

Dette er en geometrisk rekke av samme form som ovenfor, med $n = 6$. Vi får

$$R = T \cdot \tfrac{100}{p} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{1+\frac{p}{100}}\right)^n\right) = 23361.91 \cdot \tfrac{100}{8} \cdot \left(1 - \left(\tfrac{1}{1.08}\right)^6\right) = \underline{107999.30}.$$

Renten av dette beløpet (som betales ved den 10. terminen) er $\frac{8}{100} \cdot 107999.30 = \underline{\underline{8639.94}}$.

Da blir avdraget $23361.91 - 8639.94 = \underline{\underline{14725.97}}$.

### *5.4. Utledning av formlene for Fourier-koeffisientene.*

Vi skal først vise at

$$\int_T^{T+2L} \sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = \int_T^{T+2L} \cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = 0\,.$$

Vi benytter da at

$$\int \sin(a\cdot t)\,dt = -\tfrac{1}{a}\cos(a\cdot t) + C$$

og at

$$\int \cos(a\cdot t)\,dt = \tfrac{1}{a}\sin(a\cdot t) + C\,.$$

Da blir

$$\int_T^{T+2L} \sin\left(n\tfrac{\pi}{L}\cdot t\right)dt = \left[-\tfrac{L}{n\pi}\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)\right]_T^{T+2L} = -\tfrac{L}{n\pi}\left(\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}(T+2L)\right) - \cos\left(n\tfrac{\pi}{L}T\right)\right)$$

$$= -\tfrac{L}{n\pi}\left(\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}T + n\cdot 2\pi\right) - \cos\left(n\tfrac{\pi}{L}T\right)\right) = \underline{0}$$

fordi

$$\cos(v + n\cdot 2\pi) = \cos v\,.$$

På samme måte får vi at

$$\int_T^{T+2L} \cos\left(n\tfrac{\pi}{L}\cdot t\right)dt = \left[\tfrac{L}{n\pi}\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)\right]_T^{T+2L} = \tfrac{L}{n\pi}\left(\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}(T+2L)\right) - \sin\left(n\tfrac{\pi}{L}T\right)\right)$$

$$= \tfrac{L}{n\pi}\left(\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}T + n\cdot 2\pi\right) - \sin\left(n\tfrac{\pi}{L}T\right)\right) = \underline{0}$$

Så var det de tre andre integrasjonsformlene. Vi får nå bruk for disse trigonometriske identitetene:

a) $\sin u \cdot \cos v = \tfrac{1}{2}\left(\sin(u-v) + \sin(u+v)\right)$

b) $\cos u \cdot \cos v = \tfrac{1}{2}\left(\cos(u-v) + \cos(u+v)\right)$

c) $\sin u \cdot \sin v = \tfrac{1}{2}\left(\cos(u-v) - \cos(u+v)\right)$

Det er mulig at du ikke har sett dem før. Jeg vil derfor utlede dem, og tar da utgangspunkt i formlene for $\sin(u \pm v)$ og $\cos(u \pm v)$ som jeg går ut fra at du kjenner fra før:

$$\sin(u-v) + \sin(u+v) = (\sin u\cdot\cos v - \cos u\cdot\sin v) + (\sin u\cdot\cos v + \cos u\cdot\sin v)$$

$$= 2\sin u\cdot\cos v$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin u\cdot\cos v = \underline{\tfrac{1}{2}\left(\sin(u-v) + \sin(u+v)\right)}$$

$$\cos(u-v) + \cos(u+v) = (\cos u\cdot\cos v + \sin u\cdot\sin v) + (\cos u\cdot\cos v - \sin u\cdot\sin v)$$

$$= 2\cos u\cdot\cos v$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos u\cdot\cos v = \underline{\tfrac{1}{2}\left(\cos(u-v) + \cos(u+v)\right)}$$

$$\cos(u-v) - \cos(u+v) = (\cos u\cdot\cos v + \sin u\cdot\sin v) - (\cos u\cdot\cos v - \sin u\cdot\sin v)$$

$$= 2\sin u\cdot\sin v$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin u \cdot \sin v = \underline{\tfrac{1}{2}\left(\cos(u-v) - \cos(u+v)\right)}$$

Nå er jeg klar til å vise at

$$\int_T^{T+2\pi} \cos\left(m\tfrac{\pi}{L}t\right) \cdot \cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) dt = \begin{cases} 0 & \text{når} \quad m \neq n \\ L & \text{når} \quad m = n \end{cases}$$

Ved å benytte identitet b) får jeg nå at

$$\int \cos\left(m\tfrac{\pi}{L}t\right) \cdot \cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) dt = \tfrac{1}{2}\int \left(\cos\left(m\tfrac{\pi}{L}t - n\tfrac{\pi}{L}t\right) + \cos\left(m\tfrac{\pi}{L}t + n\tfrac{\pi}{L}t\right)\right) dt$$

$$= \tfrac{1}{2}\int \cos\left((m-n)\tfrac{\pi}{L}t\right) dt + \tfrac{1}{2}\int \cos\left((m+n)\tfrac{\pi}{L}t\right) dt$$

Siden både *m* og *n* er hele, positive tall, og vi integrerer fra $t = T$ til $t = T + 2L$, vil begge integralene bli av typen

$$\int_T^{T+2L} \cos\left(k \cdot \tfrac{\pi}{L}t\right) dt$$

forutsatt at $m \neq n$, og dette integralet vet vi er lik null.

Men tilfellet $m = n$ må spesialbehandles. Vi benytter da identiteten

$$\cos(2v) = 2\cos^2 v - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2 v = \tfrac{1}{2}\left(\cos(2v) + 1\right).$$

Da blir

$$\int_T^{T+2L} \cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) \cdot \cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) dt = \int_T^{T+2L} \cos^2\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) dt = \tfrac{1}{2}\int_T^{T+2L} \left(\cos\left(2 \cdot n\tfrac{\pi}{L}t\right) + 1\right) dt$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{L}{2n\pi}\sin\left(2n\tfrac{\pi}{L}t\right) + t\right]_T^{T+2L}$$

$$= \tfrac{L}{4n\pi}\left(\sin\left(2n\tfrac{\pi}{L}(T+2L)\right) - \sin\left(2n\tfrac{\pi}{L}T\right)\right) + \tfrac{1}{2}\left((T+2L) - T\right)$$

$$= \tfrac{L}{4n\pi}\left(\sin\left(2n\tfrac{\pi}{L}T + 4n\pi\right) - \sin\left(2n\tfrac{\pi}{L}T\right)\right) + \tfrac{1}{2} \cdot 2L$$

$$= \tfrac{L}{4n\pi} \cdot 0 + L = \underline{L}$$

Vi samler trådene, og får at

$$\int_T^{T+2\pi} \cos\left(m\tfrac{\pi}{L}t\right) \cdot \cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) dt = \begin{cases} 0 & \text{når} \quad m \neq n \\ L & \text{når} \quad m = n \end{cases}$$

For å vise at

$$\int_T^{T+2L} \sin\left(m\tfrac{\pi}{L}t\right) \cdot \sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) dt = \begin{cases} 0 & \text{når} \quad m \neq n \\ L & \text{når} \quad m = n \end{cases}$$

benytter jeg identitet c), og får at

$$\int \sin\left(m\tfrac{\pi}{L}t\right) \cdot \sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) dt = \tfrac{1}{2}\int \left(\cos\left(m\tfrac{\pi}{L}t - n\tfrac{\pi}{L}t\right) - \cos\left(m\tfrac{\pi}{L}t + n\tfrac{\pi}{L}t\right)\right) dt$$

$$= \tfrac{1}{2}\int \cos\left((m-n)\tfrac{\pi}{L}t\right) dt - \tfrac{1}{2}\int \cos\left((m+n)\tfrac{\pi}{L}t\right) dt$$

Dette er akkurat samme uttrykk som før, bare med minus istedenfor pluss mellom integralene. Som før får vi da at

$$\int_T^{T+2L} \sin\left(m\tfrac{\pi}{L}t\right) \cdot \sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) dt = 0$$

forutsatt at $m \neq n$.

Også her må tilfellet $m = n$ må spesialbehandles. Vi benytter da identiteten

$$\cos(2v) = 1 - 2\sin^2 v \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2 v = \tfrac{1}{2}\big(1 - \cos(2v)\big).$$

Da blir

$$\int_T^{T+2L} \sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)\cdot\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = \int_T^{T+2L}\sin^2\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = \tfrac{1}{2}\int_T^{T+2L}\left(1-\cos\left(2\cdot n\tfrac{\pi}{L}t\right)\right)dt$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[t - \frac{1}{2n\frac{\pi}{L}}\sin\left(2n\tfrac{\pi}{L}t\right)\right]_T^{T+2L}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(T + 2L - T - \frac{1}{2n\frac{\pi}{L}}\left(\sin\left(2n\tfrac{\pi}{L}(T+2L)\right) - \sin\left(2n\tfrac{\pi}{L}\cdot T\right)\right)\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(2L - \frac{1}{2n\frac{\pi}{L}}\left(\sin\left(2n\tfrac{\pi}{L}T + 4n\pi\right) - \sin\left(2n\tfrac{\pi}{L}T\right)\right)\right) = \underline{L}$$

Vi samler trådene, og får at

$$\int_T^{T+2L}\sin\left(m\tfrac{\pi}{L}t\right)\cdot\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = \begin{cases} 0 & \text{når} \quad m \neq n \\ L & \text{når} \quad m = n \end{cases}$$

Nå gjenstår det bare å vise at

$\int_T^{T+2L}\cos\left(m\tfrac{\pi}{L}t\right)\cdot\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = 0$ for alle verdier av *m* og *n*.

Da benytter jeg identitet a), og får at

$$\int \cos\left(m\tfrac{\pi}{L}t\right)\cdot\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = \tfrac{1}{2}\int\left(\sin\left(m\tfrac{\pi}{L}t - n\tfrac{\pi}{L}t\right) + \sin\left(m\tfrac{\pi}{L}t + n\tfrac{\pi}{L}t\right)\right)dt$$

$$= \tfrac{1}{2}\int \sin\left((m-n)\tfrac{\pi}{L}t\right)dt + \tfrac{1}{2}\int \sin\left((m+n)\tfrac{\pi}{L}t\right)dt$$

Som før blir begge integralene lik null når vi integrerer fra $t = T$ til $t = T + 2L$, forutsatt at $m \neq n$. Dersom $m = n$, benytter jeg identiteten

$$\sin(2v) = 2\sin v\cdot\cos v \quad \Leftrightarrow \quad \sin v\cdot\cos v = \tfrac{1}{2}\sin(2v)$$

og får

$$\int_T^{T+2L}\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)\cdot\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = \tfrac{1}{2}\int_T^{T+2\pi}\sin\left(2n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = 0.$$

Altså er

$\int_T^{T+2L}\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)\cdot\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = 0$ for alle verdier av *m* og *n*.

## *5.5. Fourier-koeffisientene for jamne og odde funksjoner.*

Vi skal nå utlede formlene for beregning av Fourier-koeffisienter for jamne og odde funksjoner. Vi tar naturligvis utgangspunkt i de generelle formlene for beregning av Fourier-koeffisienter, og viser hvordan de forenkles når *f* er jamn eller odde.

Vi trenger da noen hjelpesetninger, og starter med disse to:

1. Dersom *f* er *jamn*, er $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$.
2. Dersom *f* er *odde*, er $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$.

Begge disse setningene framkommer ”intuitivt” av en figur. Men la oss bevise hjelpesetning 1 mer formelt:

Vi starter med å merke oss at

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{-a}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt$$

Så omformer vi $\int_{-a}^{0} f(t)dt$ slik:

$$\int_{-a}^{0} f(t)dt \overset{(1)}{=} \int_{a}^{0} f(-t)d(-t) \overset{(2)}{=} -\int_{a}^{0} f(t)dt \overset{(3)}{=} \int_{0}^{a} f(t)dt .$$

Merknader:

(1) Erstatter *t* med –*t*. Da må også nedre grense endres fra –*a* til *a*.
(2) Benytter at $f(-t) = f(t)$ siden *f* er jamn, og at $d(-t) = -dt$ der minustegnet settes utenfor integraltegnet.
(3) Dette er (forhåpentlig) en kjent setning fra integrasjonsteorien.

Altså blir

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{-a}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt = \int_{0}^{a} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$$

som vi skulle vise. Prøv å vise hjelpesetning 2 selv!

Så trenger vi et par hjelpesetninger til:

3. Anta at *f* er *jamn*. Da har vi at:
$$f(t)\cdot\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) \text{ er } odde$$
mens
$$f(t)\cdot\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) \text{ er } jamn.$$
4. Anta at *f* er *odde*. Da har vi at:
$$f(t)\cdot\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) \text{ er } jamn$$
mens
$$f(t)\cdot\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) \text{ er } odde.$$

Jeg nøyer meg med å vise hjelpesetning 3:

Definerer

$$g(t) = f(t)\cdot\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)$$

og

$$h(t) = f(t)\cdot\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right).$$

Da er

$$g(-t) = f(-t)\cdot\sin\left(-n\tfrac{\pi}{L}t\right) = f(t)\cdot\left(-\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)\right) = -f(t)\cdot\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) = -g(t)$$

og

$$h(-t) = f(t)\cdot\cos\left(-n\tfrac{\pi}{L}t\right) = f(t)\cdot\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) = h(t)$$

som viser at

$$g(t) = f(t)\cdot\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) \text{ er odde}$$

mens

$$h(t) = f(t)\cdot\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) \text{ er jamn.}$$

Du klarer sikkert å vise setning 4 selv!

Nå er vi klar til selve beviset. Jeg nøyer meg med å bevise setningen for det tilfellet at $f$ er *jamn*. Da blir:

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\,dt = \frac{1}{2L}\cdot 2\int_0^L f(t)\,dt = \underline{\underline{\frac{1}{L}\int_0^L f(t)\,dt}}\,.$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = \frac{1}{L}\cdot 2\int_0^L f(t)\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = \underline{\underline{\frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt}}\,.$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = \frac{1}{\pi}\cdot 0 = \underline{\underline{0}}\,.$$

Bevis selv setningen for det tilfellet at $f$ er odde!

## 5.6. Forskyvning til jamne eller odde funksjoner.

Noen ganger kan en periodisk funksjon som i utgangspunktet verken er jamne eller odde, danne utgangspunkt for en jamn eller en odde funksjon ved å forskyve funksjonen i koordinatsystemet (eller ved å forskyve koordinatsystemet). På denne måten kan vi forenkle beregningen av Fourier-koeffisientene. Denne forenklingen må da veies opp mot det ekstra arbeidet med å forskyve funksjonen (eller koordinatsystemet).

***Eksempel 5.5.1:*** Vi tar utgangspunkt i funksjonen i Eksempel 3.3.1, som var slik:

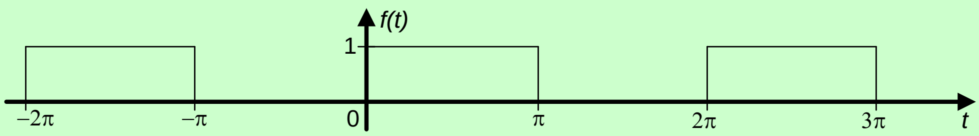
$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{når} \quad t\in\langle -\pi, 0\rangle \\ 1 & \text{når} \quad t\in[0, \pi\rangle \end{cases}, \qquad f(t+2\pi) = f(t)$$

Vis at denne funksjonen kan forskyves slik at det oppstår en

a) Odde funksjon.
b) Jamn funksjon.

Bruk disse funksjonene til å finne Fourier-rekka til $f$ på en enklere måte enn i Eksempel 3.1.

*Løsning*: Grafen til funksjonen $f$ ser slik ut:



a) Dersom vi forskyver grafen en strekning på $\frac{1}{2}$ nedover i koordinatsystemet, får vi en odde funksjon som vi kan kalle

$$g(t) = f(t) - \tfrac{1}{2} = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{når} \quad t \in \langle -\pi, 0 \rangle \\ \frac{1}{2} & \text{når} \quad t \in [0, \pi\rangle \end{cases}.$$

Fourier-rekka til $g$ blir da en ren sinus-rekke der koeffisientene er

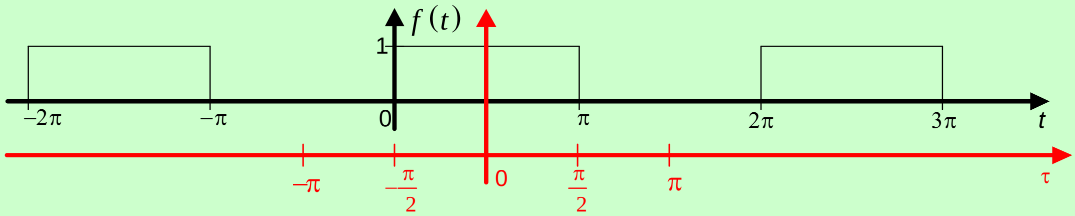
$$b_n = \tfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(t)\sin\left(n\tfrac{\pi}{\pi}t\right)dt = \tfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\tfrac{1}{2}\sin(nt)\,dt = \tfrac{1}{\pi}\left[-\tfrac{1}{n}\cos(nt)\right]_0^{\pi}$$

$$= -\tfrac{1}{\pi n}\left(\cos(n\pi) - \cos 0\right) = -\tfrac{1}{\pi n}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} -\frac{1}{\pi n}\cdot(-2) = \frac{2}{\pi n} & \text{når} \quad n = 1,3,5,\cdots \\ -\frac{1}{\pi n}\cdot(0) = 0 & \text{når} \quad n = 2,4,6,\cdots \end{cases}$$

Dermed blir

$$f(t) = g(t) + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt) = \underline{\underline{\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{1}{2k+1}\sin\left((2k+1)t\right)}}.$$

b) Dersom vi definerer en ny variabel $\tau = t - \frac{\pi}{2}$, får vi et nytt koordinatsystem som vist nedenfor (der det nye koordinatsystemet er forskjøvet litt nedover for oversiktens skyld).




I dette nye koordinatsystemet blir funksjonen $f$ omformet til

$$g(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{når} \quad \tau \in \langle -\pi, -\frac{\pi}{2}\rangle \\ 1 & \text{når} \quad \tau \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle \\ 0 & \text{når} \quad \tau \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi\rangle \end{cases}$$

Funksjonen $g$ er åpenbart jamn, og Fourier-rekka til $g$ blir derfor ei cosinus-rekke der koeffisientene er:

$$a_1 = \tfrac{1}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,d\tau + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0\,d\tau\right) = \tfrac{1}{\pi}[\tau]_0^{\frac{\pi}{2}} = \tfrac{1}{\pi}\left(\tfrac{\pi}{2} - 0\right) = \underline{\tfrac{1}{2}}.$$

$$a_n = \tfrac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot\cos\left(n\tfrac{\pi}{\pi}\tau\right)dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0\cdot\cos\left(n\tfrac{\pi}{\pi}\tau\right)d\tau\right) = \tfrac{2}{\pi}\cdot\left[\tfrac{1}{n}\sin(n\tau)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \tfrac{2}{\pi n}\left(\sin\left(n\tfrac{\pi}{2}\right) - \sin 0\right).$$

Nå må vi benytte at

$$\sin\left(n\tfrac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{når} \quad n = 2,4,6,\cdots \\ 1 & \text{når} \quad n = 1,5,9,\cdots \\ -1 & \text{når} \quad n = 3,7,11,\cdots \end{cases}$$

Dermed blir Fourier-rekka til $g$ slik:

$$a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(n\tfrac{\pi}{\pi}\tau\right) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{\pi}\left(\tfrac{1}{1}\cos(1\tau) - \tfrac{1}{3}\cos(3\tau) + \tfrac{1}{5}\cos(5\tau) - \tfrac{1}{7}\cos(7\tau) + \cdots\right).$$

For å finne Fourier-rekka til $f$, må vi erstatte $\tau$ med $\tau = t - \frac{\pi}{2}$, og får

$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{\pi}\left(\tfrac{1}{1}\cos(1\tau)-\tfrac{1}{3}\cos(3\tau)+\tfrac{1}{5}\cos(5\tau)-\tfrac{1}{7}\cos(7\tau)+\cdots\right)$$
$$=\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{\pi}\left(\cos\left(t-\tfrac{\pi}{2}\right)-\tfrac{1}{3}\cos\left(3\left(t-\tfrac{\pi}{2}\right)\right)+\tfrac{1}{5}\cos\left(5\left(t-\tfrac{\pi}{2}\right)\right)-\tfrac{1}{7}\cos\left(7\left(t-\tfrac{\pi}{2}\right)\right)+\cdots\right)$$
$$=\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{\pi}\left(\sin t-\tfrac{1}{3}\left(-\sin(3t)\right)+\tfrac{1}{5}\sin(5t)-\tfrac{1}{7}\left(-\sin(7t)\right)+\cdots\right)$$
$$=\underline{\underline{\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{1}{2k+1}\sin\left((2k+1)t\right)}}$$

Vi får samme resultat som før, men en del ekstra arbeid på grunn av innføringen av den nye variabelen $\tau$ .

# 6. Småoppgaver i teksten.

## *6.1. Oppgaver.*

Du finner løsningsforslag ved å klikke på oppgavenummeret.

**Oppgave 1.1.1**
Skriv ut de 5 første leddene i disse rekkene:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)^2$

b) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{(2n-1)^2}$

**Oppgave 1.1.2**
Skriv ut de 5 første leddene i disse rekkene:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^2}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)!}{(2n)!}$

**Oppgave 1.1.3**
Skriv rekkene nedenfor med summetegn, gjerne på flere forskjellige måter:

a) $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{64}+\cdots$

b) $\frac{2}{3}-\frac{3}{5}+\frac{4}{7}-\frac{5}{9}+\cdots$

**Oppgave 1.2.1**
Finn summen av de uendelige rekkene nedenfor:

a) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2}{k^2-1}$

b) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{3}{k^2+k-2}$

**Oppgave 1.3.1**
I ei aritmetisk rekke er summen av de 5 første leddene lik 50, mens produktet av første og femte ledd er lik 64. Sett opp de 5 første leddene i denne rekka.

## Oppgave 1.3.2

a) Det første leddet i ei geometrisk rekke er 4, mens summen av de tre første leddene er $\frac{37}{4}$. Undersøk om ei slik rekke kan konvergere, og finn eventuelt summen av den uendelige rekka.

b) En gummiball er slik at når den slippes i gulvet fra en høyde *h*, spretter den opp igjen en høyde $0.9h$. Vi slipper en slik ball 1.00 m over gulvet. Hvor lang er den samlede strekningen ballen tilbakelegger før den kommer til ro?

## Oppgave 1.4.1

Bruk integraltesten til å undersøke om rekkene nedenfor konvergerer:

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \cdot \ln k}$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2 + 2k}$

## Oppgave 1.4.2

Vis at *p*-rekka $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ konvergerer dersom $p > 1$, og divergerer dersom $p \le 1$.

## Oppgave 1.4.3

Bruk grensesammenlikningstesten til å undersøke om rekkene nedenfor konvergerer:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{k^2 + k - 3}$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3k}}{k^2 - 2k + 3}$

## Oppgave 1.4.4

Undersøk om rekkene nedenfor konvergerer:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k-1)}{k^2 + k + 1}$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k \cos(k\pi)}$

## Oppgave 1.4.5

Beregn summen av rekka

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3}$$

slik at feilen blir mindre enn 1%.

## Oppgave 1.4.6

Bruk forholdstesten til å undersøke konvergensen av rekkene nedenfor:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{k \cdot 2^{2k}}$

## Oppgave 1.4.7

Bruk rottesten til å undersøke om disse rekkene konvergerer:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{\sqrt{2^k}}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(2 - \frac{1}{k}\right)^k}$

## Oppgave 2.1.1

I denne oppgaven skal du benytte at

$$\sin x \equiv x - \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{5!}x^5 - \tfrac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

a) Lag ei potensrekke for funksjonen

$$f(x) = \frac{\sin x - x}{x^3}.$$

Det er tilstrekkelig at du skriver ned de 3 første leddene i denne rekka.

b) Bruk de to første leddene i rekka ovenfor til å finne et tilnærmet uttrykk for

$$\int_0^1 \frac{\sin x - x}{x^3} dx$$

Finn også en øvre grense for unøyaktigheten ved beregningen.

c) Bruk rekka til å beregne grenseverdien

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}.$$

Kontroller svaret ved å bruke L'Hôpitals regel.

## Oppgave 2.3.1

Undersøk konvergensegenskapene for rekkene nedenfor:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(x-1)^k$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot k^2 x^k$

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k^2}{k!} x^k$

## Oppgave 2.4.1

a) Vis at

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \frac{1}{1+x^2}$$

når $-1 < x < 1$.

b) Finn summen av rekka

$$1 - 2x^2 + 3x^4 - 4x^6 + \cdots$$

bl. a. ved å derivere rekka ovenfor.

c) Ta utgangspunkt i rekka i a), og finn ei potensrekke for

$$f(x) = \arctan x\,.$$

Bestem også konvergensintervallet for denne rekka.

## Oppgave 2.4.2

Sett opp ei potensrekke for $\cos\left(\sqrt{x}\right)$, og bruk den til å finne en tilnærmet verdi for

$$\int_0^1 \frac{\cos\left(\sqrt{x}\right)-1}{x}\,dx\,.$$

## Oppgave 2.5.1

Sett opp Taylor-rekkene til funksjonen:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

rundt $a = 1$, og undersøk konvergensen.

Skisser grafene til noen Taylor-polynom med de første leddene i rekka, gjerne ved hjelp av dataverktøy.

## Oppgave 3.3.1

a) Gitt funksjonen

$$f(t) = t^2 \text{ når } 0 \le t < 2, \qquad f(t+2) = f(t)\,.$$

1) Skisser grafen til funksjonen, og angi perioden *p*.

2) Finn Fourier-rekka til funksjonen.

3) Bruk resultatet ovenfor til å finne summen av rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

b) En periodisk funksjon er gitt ved

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{når} \quad -1 \le t < 0 \\ t & \text{når} \quad 0 \le t < 1 \end{cases}, \quad f(t+2) = f(t)\,.$$

1) Tegn grafen til funksjonen i området $-3 \le t \le 5$.

2) Finn Fourier-rekka til funksjonen.

**Oppgave 3.3.2**

a) En periodisk funksjon *f* er gitt ved

$$f(t) = \begin{cases} 3t & \text{når} \quad 0 \le t < 1 \\ 4 - t & \text{når} \quad 1 \le t < 4 \end{cases}, \qquad f(t+4) = f(t).$$

Finn koeffisientene i Fourier-rekka til *f*. Du kan uttrykke dem ved hjelp av $\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right)$ og $\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right)$. Skriv ut de første leddene i denne Fourier-rekka til og med $n = 3$.

b) Vi har gitt funksjonen

$$f(t) = e^{-t} \text{ når } t \in [0, 2\pi\rangle, \qquad f(t+2\pi) = f(t).$$

1) Tegn en skisse av grafen til *f*.
2) Finn Fourier-rekka til *f*.

c) Vi har gitt funksjonen

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{når} \quad -2 \le t < 0 \\ 0 & \text{når} \quad 0 \le t < 2 \end{cases}, \qquad f(t+4) = f(t).$$

1) Tegn grafen til funksjonen.
2) Finn Fourier-rekka til funksjonen.

d) Finn Fourier-rekka til den periodiske funksjonen

$$f(t) = \begin{cases} \cos t & \text{når} \quad 0 \le t < \pi \\ 0 & \text{når} \quad \pi \le t < 2\pi \end{cases}, \qquad f(t+2\pi) = f(t).$$

**Oppgave 3.4.1**

I disse oppgavene skal du først påvise at den gitte periodiske funksjonen er enten jamn eller odde, og benytte det til å beregne koeffisientene i Fourier-rekka til funksjonen. Jeg vil anbefale at du tegner et par perioder av funksjonen til kontroll.

a) Finn Fourier-rekka til funksjonen

$$f(t) = \sin t \quad \text{når } -\frac{\pi}{2} \le t < \frac{\pi}{2}, \qquad f(t+\pi) = f(t).$$

b) En funksjon er gitt ved

$$f(t) = 1 - \frac{t}{\pi} \quad \text{når } 0 < t < 2\pi, \qquad f(t+2\pi) = f(t).$$

1) Vis at Fourier-rekka til funksjonen er

$$F(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n}.$$

2) Finn summen av rekka $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$

c) Gitt funksjonen

$$f(t) = t^2 \text{ når } -1 < t < 1, \qquad f(t+2) = f(t).$$

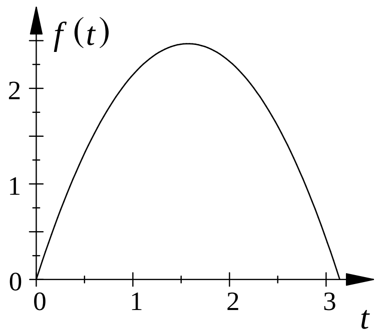
1) Finn Fourier-rekka til funksjonen.

2) Bruk resultatet ovenfor til å finne summen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

**Oppgave 3.4.2**

a)

1)




Figuren til venstre viser grafen til funksjonen

$$f(t) = t(\pi - t) \text{ for } 0 < t < \pi.$$

Skisser grafen til den jamne halvperiodiske utvidelsen av $f(t)$.

Vis at Fourier-rekka til den jamne halvperiodiske utvidelsen av $f(t)$ er

$$F(t) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(2nt).$$

2) Finn summen av rekka

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

b) En funksjon *f* er gitt ved

$$f(t) = 1 - t^2, \ 0 < t < 1.$$

Finn Fourier-rekka til den odde halvperiodiske utvidelsen til *f*.

c) En funksjon er gitt ved

$$f(t) = t + 1, \ 0 \le t < 1.$$

Tegn grafen og finn Fourier-rekka til den odde halvperiodiske utvidelsen av *f*.

## 6.2. Løsninger på småoppgaver.

**Oppgave 1.1.1**

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)^2 = (1-1)^2 + (2-1)^2 + (3-1)^2 + (4-1)^2 + (5-1)^2 + \cdots = 0 + 1 + 4 + 9 + 16 + \cdots.$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\tfrac{1}{2}\right)^n = \left(-\tfrac{1}{2}\right)^0 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^1 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^3 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^4 + \cdots = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} - \cdots.$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{0}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \cdots = 0 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{4} + \cdots.$

d) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{(2n-1)^2}=\frac{(-1)^2\cdot 1}{(2\cdot 1-1)^2}+\frac{(-1)^3\cdot 2}{(2\cdot 2-1)^2}+\frac{(-1)^4\cdot 3}{(2\cdot 3-1)^2}+\frac{(-1)^5\cdot 4}{(2\cdot 4-1)^2}+\frac{(-1)^6\cdot 5}{(2\cdot 5-1)^2}+\cdots$$
$$=\frac{1}{1^2}-\frac{2}{3^2}+\frac{3}{5^2}-\frac{4}{7^2}+\frac{5}{9^2}-\cdots=1-\tfrac{2}{9}+\tfrac{3}{25}-\tfrac{4}{49}+\tfrac{5}{81}-\cdots$$

**Oppgave 1.1.2**

a) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1\cdot \cancel{2}}{2^{\cancel{2}}}+\frac{1\cdot 2\cdot \cancel{3}}{3^{\cancel{2}}}+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cancel{4}}{4^{\cancel{2}}}+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \cancel{5}}{5^{\cancel{2}}}+\cdots=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{3}+\tfrac{3}{2}+\tfrac{24}{5}+\cdots.$$

b) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)!}{(2n)!}=\frac{1!}{0!}+\frac{2!}{(2\cdot 1)!}+\frac{3!}{(2\cdot 2)!}+\frac{4!}{(2\cdot 3)!}+\frac{5!}{(2\cdot 4)!}+\cdots=\frac{1}{1}+\frac{2!}{2!}+\frac{3!}{4!}+\frac{4!}{6!}+\frac{5!}{8!}+\cdots$$
$$=1+1+\frac{3!}{3!\cdot 4}+\frac{4!}{4!\cdot 5\cdot 6}+\frac{5!}{5!\cdot 6\cdot 7\cdot 8}+\cdots=1+1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{30}+\tfrac{1}{336}+\cdots$$

**Oppgave 1.1.3**

For hver av oppgavene er to former vist:

a) $$1-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{16}-\tfrac{1}{64}+\cdots=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^6}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}.$$

b) $$\frac{2}{3}-\frac{3}{5}+\frac{4}{7}-\frac{5}{9}+\cdots=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{2n+1}.$$

**Oppgave 1.2.1**

a) $$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2}{k^2-1}$$

Delbrøkoppspalting gir
$$\frac{2}{k^2-1}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}$$
slik at
$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2}{k^2-1}=\left(\frac{1}{2-1}-\frac{1}{2+1}\right)+\left(\frac{1}{3-1}-\frac{1}{3+1}\right)+\left(\frac{1}{4-1}-\frac{1}{4+1}\right)+\left(\frac{1}{5-1}-\frac{1}{5+1}\right)+\cdots$$
$$=\left(1-\tfrac{1}{3}\right)+\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}\right)+\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{5}\right)+\left(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{6}\right)+\cdots$$

Når leddene sorteres i fallende rekkefølge, ser vi at alle ledd i starten unntatt 1 og $\tfrac{1}{2}$ vil falle bort. Dersom vi stanser etter *n* ledd, blir vi også stående igjen med to ledd i slutten av rekka som ikke faller bort, slik at den *n*'te partialsummen blir
$$S_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{2}{k^2-1}=1+\tfrac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Men begge de to siste leddene går mot 0 når $n\to\infty$. Da får vi at
$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2}{k^2-1}=1+\tfrac{1}{2}=\underline{\underline{\tfrac{3}{2}}}.$$

b) $$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{3}{k^2+k-2}$$

Delbrøkoppspalting gir

$$\frac{3}{k^2+k-2}=\frac{3}{(k-1)(k+2)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+2}$$

slik at

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{3}{k^2+k-2}=\left(\frac{1}{2-1}-\frac{1}{2+2}\right)+\left(\frac{1}{3-1}-\frac{1}{3+2}\right)+\left(\frac{1}{4-1}-\frac{1}{4+2}\right)+\left(\frac{1}{5-1}-\frac{1}{5+2}\right)+\cdots$$

$$=\left(1-\tfrac{1}{4}\right)+\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{5}\right)+\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{6}\right)+\left(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{7}\right)+\left(\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{8}\right)+\cdots$$

Når leddene sorteres i fallende rekkefølge, ser vi at alle ledd i starten unntatt 1, $\frac{1}{2}$ og $\frac{1}{3}$ vil falle bort. Dersom vi stanser etter *n* ledd, blir vi også stående igjen med tre ledd i slutten av rekka som ikke faller bort, slik at den *n*'te partialsummen blir

$$S_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{3}{k^2+k-2}=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}.$$

Men alle de tre siste leddene går mot 0 når $n\to\infty$. Da får vi at

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{3}{k^2+k-2}=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}=\underline{\underline{\tfrac{11}{6}}}.$$

*Merknad:* I disse løsningene har jeg ført opp uttrykk for de siste leddene som ikke faller bort i den *n*'te partialsummen. I praksis er det tilstrekkelig å påvise hvilke ledd som går mot hverandre underveis, og begrunne at gjenværende ledd mot slutten av rekka går mot 0 når $n\to\infty$. Til slutt summerer vi opp de leddene som står igjen i starten av rekka.

**Oppgave 1.3.1**

Kaller første ledd $a_1$ og femte ledd $a_5$. Da er summen av de 5 første leddene

$$(a_1+a_5)\cdot\tfrac{5}{2}=50 \quad\Leftrightarrow\quad a_1+a_5=20 \quad\Leftrightarrow\quad a_5=20-a_1.$$

Produktet av første og femte ledd er

$$a_1\cdot a_5=64 \quad\Leftrightarrow\quad a_1\cdot(20-a_1)=64 \quad\Leftrightarrow\quad a_1^2-20a_1+64=0$$

$$a_1=\frac{20\pm\sqrt{20^2-4\cdot 64}}{2}=\frac{20\pm 12}{2}=\begin{cases}16\\ 4\end{cases}.$$

Dersom $a_1=16$, blir $a_5=20-16=4$ slik at differensen $d=\frac{1}{4}(a_5-a_1)=\frac{1}{4}(4-16)=-3$.

Da blir de 5 første leddene i rekka: 16, 13, 10, 7, 4.

Dersom $a_1=4$, blir $a_5=20-4=16$ slik at differensen $d=\frac{1}{4}(a_5-a_1)=\frac{1}{4}(16-4)=3$.

Da blir de 5 første leddene i rekka: 4, 7, 10, 13, 16.

**Oppgave 1.3.2**

a) Vi starter med å finne kvotienten *k* i rekka:

$$4+k\cdot 4+k^2\cdot 4=\tfrac{37}{4} \quad\Leftrightarrow\quad k^2+k+1=\tfrac{37}{16} \quad\Leftrightarrow\quad k^2+k-\tfrac{21}{16}=0.$$

$$k=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\left(-\frac{21}{16}\right)}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{\frac{25}{4}}}{2}=\frac{1\pm\frac{5}{2}}{2}=\begin{cases}\frac{7}{4}\\ \frac{3}{4}\end{cases}.$$

Av disse to løsningene er det kun løsningen $k=\frac{3}{4}$ som gir ei konvergent rekke. Med denne *k*-verdien blir summen av rekka

$$S=\frac{a_1}{1-k}=\frac{4}{1-\frac{3}{4}}=\frac{4}{\frac{1}{4}}=\underline{\underline{16}}.$$

b) Når ballen slippes fra en høyde $h$, og den spretter opp en strekning $0.9h$, har den tilbakelagt en strekning

$$s_1 = h + 0.9h = 1.9h\,.$$

Neste gang den spretter, starter den en høyde $0.9h$ over gulvet, slik at den tilbakelegger en strekning

$$s_2 = 1.9 \cdot 0.9h = 0.9 s_1\,.$$

Slik fortsetter det, slik at vi generelt får

$$s_n = 0.9^{n-1} \cdot s_1\,.$$

Dette er ledd i ei geometrisk rekke med kvotient $k = 0.9$ og første ledd

$$s_1 = 1.9 \cdot 1.00\,\text{m} = 1.90\,\text{m}\,.$$

Summen av ei slik rekke er

$$S = \frac{s_1}{1-k} = \frac{1.90\,\text{m}}{1-0.9} = \underline{\underline{19.0\,\text{m}}}\,.$$

**Oppgave 1.4.1**

a) $$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \cdot \ln k}\,.$$

Beregner integralet

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \cdot \ln x}\,dx$$

ved hjelp av substitusjonen

$$u = \ln x \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad du = \frac{1}{x}\,dx\,.$$

Da blir

$$\int \frac{1}{x \cdot \ln x}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C = \ln|\ln x| + C\,.$$

Vi ser at når $x \to \infty$, vil $\ln(\ln x) \to \infty$. Integralet divergerer. Da må også rekka divergere.

b) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2 + 2k}\,.$$

Beregner integralet

$$\int_1^{\infty} \frac{2}{x^2 + 2x}\,dx$$

Benytter delbrøkoppspaltingen

$$\frac{2}{x^2 + 2x} = \frac{2}{x(x+2)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}$$

og får

$$\int \frac{2}{x^2 + 2x}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x+2}\,dx = \ln|x| - \ln|x+2| + C = \ln\left|\frac{x}{x+2}\right| + C\,.$$

Men

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x}{x+2}\right) = \ln\left(\lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{x}}\right) = \ln 1 = 0$$

slik at

$$\int_1^\infty \frac{2}{x^2+2x}dx = 0 - \ln\left(\frac{1}{1+2}\right) = \underline{\ln 3}.$$

Da må rekka konvergere siden integralet konvergerer.

**Oppgave 1.4.2**

Når vi skal undersøke konvergensen til rekker av typen

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^p}$$

ser vi på integralet

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \int_1^\infty x^{-p}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t x^{-p}dx.$$

Vi skal først anta at $p \neq 1$. Da er

$$\int x^{-p}dx = \frac{1}{-p+1}x^{-p+1} + C = \underline{\frac{1}{1-p}x^{1-p} + C}$$

slik at

$$\lim_{t\to\infty}\int_1^t x^{-p}dx = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{1-p}x^{1-p}\right]_1^t = \frac{1}{1-p}\left(\lim_{t\to\infty} t^{1-p} - 1\right).$$

For at denne grenseverdien skal eksistere, må $1-p<0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{p>1}$. Dersom $p<1$, vil $t^{1-p} \to \infty$ når $t \to \infty$. Altså vil integralet eksistere og rekka konvergere dersom $p>1$.

Nå gjenstår det å undersøke hva som skjer dersom $p=1$. Da får vi integralet

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^1}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x}dx = \lim_{t\to\infty}\left(\left[\ln x\right]_1^t\right) = \lim_{t\to\infty}\ln t - 0.$$

Men denne grenseverdien går mot uendelig.

Dermed har vi påvist at rekka $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^p}$ konvergerer når $p>1$, og divergerer når $p \le 1$.

**Oppgave 1.4.3**

a) $\sum_{k=0}^\infty \frac{2}{k^2+k-3}$.

Sammenlikner med $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}$ som jeg vet konvergerer. Det spiller ingen rolle at summeringen starter på $k=0$ i den ene rekka og $k=1$ i den andre. Da blir

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{2}{k^2+k-3}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty}\frac{\frac{2k^2}{k^2+k-3}}{1} = \lim_{k\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{k}-\frac{3}{k^2}} = \frac{2}{1+0+0} = 2.$$

Siden denne grenseverdien eksisterer, må også rekka $\sum_{k=0}^\infty \frac{2}{k^2+k-3}$ konvergere.

b) $\sum_{k=1}^\infty \frac{\sqrt{3k}}{k^2-2k+3}$

Sammenlikner med $p$-rekka $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-\frac{3}{2}}$ som jeg vet konvergerer. Da blir

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{3k}}{k^2-2k+3}}{k^{-\frac{3}{2}}}=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{3k}}{k^2-2k+3}\cdot k^{\frac{3}{2}}}{1}=\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{3}\cdot k^{\frac{1}{2}}\cdot k^{\frac{3}{2}}}{k^2-2k+3}=\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{3}k^2}{k^2-2k+3}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{3}}{1-2\frac{1}{k}+\frac{3}{k^2}}=\frac{\sqrt{3}}{1-0+0}=\sqrt{3}$$

Da må også rekka $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{3k}}{k^2-2k+3}$ konvergere.

**Oppgave 1.4.4**

a) $$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(k-1)}{k^2+k+1}.$$

Rekka er alternerende. Videre ser vi at absoluttverdien av leddene blir stadig mindre. Dette vises enklest ved å benytte at absoluttverdien av leddene i rekka er punkter på grafen til

$$f(x)=\frac{x-1}{x^2+x+1}.$$

$$f'(x)=\frac{1\cdot\left(x^2+x+1\right)-(x-1)(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\frac{x^2+x+1-2x^2-x+2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$

$$=\frac{-x^2+2x+2}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\frac{-\left(x^2-2x+1\right)+3}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\frac{-(x-1)^2+3}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$

Denne brøken er negativ når $(x-1)^2>3 \quad\Rightarrow\quad x>1+\sqrt{3}$, slik at funksjonen og tallfølgen da blir avtakende. Til slutt ser vi at

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k-1}{k^2+k+1}=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2}}{1+\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}}=0.$$

Dermed har vi vist at kravene for at den alternerende rekka skal konvergere er oppfylt.

b) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k\cos(k\pi)}.$$

Her må vi merke oss at

$$\cos\pi=-1,\qquad \cos(2\pi)=1,\qquad \cos(3\pi)=-1,\qquad \cos(4\pi)=1 \text{ osv.}$$

slik at $\cos(k\pi)=(-1)^k$. Dermed kan faktoren $(-1)^k$ forkortes mot $\cos(k\pi)$, slik at rekka blir

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}.$$

Dette er den harmoniske rekka som vi vet divergerer.

**Oppgave 1.4.5**

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^3}=\frac{-1}{1}+\frac{(-1)^2}{2^3}+\frac{(-1)^3}{3^3}+\frac{(-1)^4}{4^3}+\frac{(-1)^5}{5^3}+\cdots=-1+\frac{1}{8}-\frac{1}{27}+\frac{1}{64}-\frac{1}{125}+\cdots.$$

Vi ser at summen blir nær $-1$, slik at absoluttverdien av det første leddet vi kutter ut må være mindre enn 0.01. Det er tilfelle dersom vi tar med bare de 4 første leddene. Da blir

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3} \approx -1 + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{27} + \tfrac{1}{64} \approx \underline{\underline{0.896}}.$$

**Oppgave 1.4.6**

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$.

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{(k+1)^2}{2^{k+1}}}{\frac{k^2}{2^k}} \cdot \frac{2^{k+1}}{2^{k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2+2k+1}{2k^2} \cdot \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1+\frac{2}{k}+\frac{1}{k^2}}{2} = \underline{\frac{1}{2}}.$$

Da konvergerer rekka absolutt.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{k\cdot 2^{2k}}$.

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{(2(k+1))!}{(k+1)\cdot 2^{2(k+1)}}}{\frac{(2k)!}{k\cdot 2^{2k}}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{(2k+2)!}{(k+1)\cdot 2^{2k+2}}}{\frac{(2k)!}{k\cdot 2^{2k}}} = \lim_{k\to\infty} \frac{(2k+2)!}{(k+1)\cdot 2^{2k+2}} \cdot \frac{k\cdot 2^{2k}}{(2k)!}$$

For å komme videre, må vi utnytte at definisjonen av $n!$ fører til at

$$(2k+2)! = (2k)!\cdot(2k+1)(2k+2).$$

Forkorting gir nå

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{(2k)!}\cdot(2k+1)(2k+2)}{(k+1)\cdot \cancel{2^{2k}}\cdot 2^2} \cdot \frac{k\cdot \cancel{2^{2k}}}{\cancel{(2k)!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k(2k+1)(2k+2)}{4(k+1)}.$$

Telleren er et 3.gradspolynom i $k$, mens nevneren er av 1. grad. Da må brøken gå mot uendelig når $k\to\infty$. Rekka divergerer.

**Oppgave 1.4.7**

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{\sqrt{2^k}}$.

$$\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{\frac{k^2}{\sqrt{2^k}}} = \sqrt[k]{k^2\left(\sqrt{2}\right)^{-k}} = \left(k^2\right)^{\frac{1}{k}}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{-k\cdot\frac{1}{k}} = \left(k^{\frac{1}{k}}\right)\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{-1}$$

slik at

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty}\left(k^{\frac{1}{k}}\right)\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{-1} = 1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} < 1.$$

Rekka konvergerer absolutt.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(2-\frac{1}{k}\right)^k}$.

$$\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{\frac{1}{\left(2-\frac{1}{k}\right)^k}} = \left(\frac{1}{\left(2-\frac{1}{k}\right)^k}\right)^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{2-\frac{1}{k}}$$

slik at

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2-\frac{1}{k}} = \frac{1}{2+0} < 1.$$

Rekka konvergerer absolutt.

**Oppgave 2.1.1**

$$\sin x \equiv x - \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{5!}x^5 - \tfrac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

a) $$f(x) = \frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots\right) - x}{x^3}$$

$$= \frac{-\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots}{x^3} = \underline{\underline{-\tfrac{1}{3!} + \tfrac{1}{5!}x^2 - \tfrac{1}{7!}x^4 + \cdots}}$$

b) $$\int_0^1 \frac{\sin x - x}{x^3}\,dx = \int_0^1 \left(-\tfrac{1}{3!} + \tfrac{1}{5!}x^2 - \cdots\right)dx = \left[-\tfrac{1}{3!}x + \tfrac{1}{5!}\cdot\tfrac{1}{3}x^3 - \cdots\right]_0^1$$

$$= \left(-\tfrac{1}{3!}\cdot 1 + \tfrac{1}{5!}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot 1^3 - \cdots\right) - 0 \approx \underline{\underline{-0.1639}}$$

Siden dette er en alternerende rekke, er unøyaktigheten mindre enn absoluttverdien av det første leddet som vi utelater, d.v.s. mindre enn

$$\int_0^1 \tfrac{1}{7!}x^4 dx = \left[\tfrac{1}{7!}\cdot\tfrac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \tfrac{1}{7!}\cdot\tfrac{1}{5}\cdot 1^5 - 0 \approx \underline{\underline{4\cdot 10^{-5}}}.$$

c) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(-\tfrac{1}{3!} + \tfrac{1}{5!}x^2 - \tfrac{1}{7!}x^4 + \cdots\right) = -\tfrac{1}{3!} + 0 - 0 + \cdots = \underline{\underline{-\tfrac{1}{6}}}.$$

Med L'Hôpitals regel:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}\left(= \frac{\sin 0 - 0}{0^3} = \frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2}\left(= \frac{1-1}{3\cdot 0^2} = \frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x - 0}{3\cdot 2x}\left(= \frac{-0-0}{6\cdot 0} = \frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{6\cdot 1} = \frac{-\cos 0}{6} = \underline{\underline{-\tfrac{1}{6}}}$$

**Oppgave 2.3.1**

a) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(x-1)^k$$

Her blir

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{1}{n+1}(x-1)^{n+1}}{\frac{1}{n}(x-1)^n}\right| = \frac{n}{n+1}|x-1|$$

slik at

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}|x-1| = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1}|x-1| = \frac{1+0}{1}|x-1| = |x-1|.$$

Rekka konvergerer absolutt når

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \quad\Leftrightarrow\quad |x-1| < 1 \quad\Leftrightarrow\quad -1 < x-1 < 1 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{0 < x < 2}.$$

Må undersøke endepunktene:

Når $x = 0$, får vi den alternerende harmoniske rekka

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(0-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \quad .$$

Vi vet at denne rekka konvergerer.

Når $x = 2$, får vi den harmoniske rekka

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(2-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Vi vet at denne rekka divergerer.

Altså vil rekka konvergerer når $\underline{\underline{0 \le x < 2}}$.

b) $$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot k^2 x^k$$

Her blir

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1} \cdot (n+1)^2 \cdot x^{n+1}}{(-1)^n \cdot n^2 \cdot x^n}\right| = \frac{(n+1)^2}{n^2}|x|.$$

Jeg kan sløyfe faktoren $(-1)$ på grunn av absoluttverditegnene. Da blir

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}|x| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2}|x| = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1}|x| = \frac{1+0+0}{1}|x| = |x|.$$

Rekka konvergerer absolutt når

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{-1 < x < 1}.$$

Må undersøke endepunktene:

Når $x = -1$, får vi rekka

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot k^2 (-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \ .$$

som åpenbart divergerer fordi leddene blir større og større.

Når $x = 1$, får vi rekka

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot k^2 \cdot 1^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot k^2 \ .$$

som også divergerer fordi leddene blir større og større i absoluttverdi..

Altså vil rekka konvergerer når $\underline{\underline{- < x < 1}}$.

c) $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k^2}{k!} x^k$$

Her blir

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{2(n+1)^2}{(n+1)!}x^{n+1}}{\frac{2n^2}{n!}x^n}\right| = \frac{(n+1)^2}{n^2}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}|x| = \frac{n^2+2n+1}{n^2}\cdot\frac{n!}{n!\cdot(n+1)}|x|$$

$$= \left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\cdot\frac{1}{n+1}|x|$$

Da blir

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}|x| = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\cdot\frac{1}{n+1}|x| = (1+0+0)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}|x|.$$

Men $\frac{1}{n+1}\to 0$ når $n\to\infty$. Dette fører til at rekka konvergerer absolutt for alle verdier av $x\in\mathbb{R}$.

**Oppgave 2.4.1**

a) Vi legger merke til at

$$1-x^2+x^4-x^6+\cdots$$

er de første leddene i ei uendelig geometrisk rekke som har første ledd $a_1=1$ og kvotient $k=-x^2$. Vi vet at slike rekker konvergerer mot

$$\frac{a_1}{1-k}=\frac{1}{1-(-x^2)}=\frac{1}{1+x^2}$$

når $|k|<1 \quad\Leftrightarrow\quad x^2<1 \quad\Leftrightarrow\quad -1<x<1$. Altså har vi vist at

$$1-x^2+x^4-x^6+\cdots=\frac{1}{1+x^2}$$

når $-1<x<1$.

b) Vi deriverer venstre og høyre side i rekka i a), og får:

$$-2x+4x^3-6x^5+\cdots=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

Deler på $-2x$:

$$1-2x^2+3x^4-\cdots=\underline{\underline{\frac{1}{(1+x^2)^2}}}.$$

For å bestemme konvergensintervallet, skriver vi rekka med summetegn:

$$1-2x^2+3x^4-\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot(k+1)\cdot x^{2k}.$$

Da konvergerer rekka når

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(n+2)x^{2(n+1)}}{(-1)^n(n+1)x^{2n}}\right|<1 \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}x^2<1 \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}x^2<1$$

$$\Leftrightarrow\quad x^2<1 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{-1<x<1}$$

Ved direkte innsetting ser vi at rekka divergerer både når $x=-1$ og når $x=1$. Altså konvergerer rekka når $\underline{\underline{-1<x<1}}$.

c) Her tar vi utgangspunkt i at

$$\int\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+C.$$

Vi integrerer derfor resultatet fra a):

$$\int_0^x \left(1-x^2+x^4-x^6+\cdots\right)dx = \int_0^x \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$\left[x-\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5-\tfrac{1}{7}x^7+\cdots\right]_0^x = \left[\arctan x\right]_0^x$$

$$\underline{\underline{x-\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5-\tfrac{1}{7}x^7+\cdots = \arctan x}}$$

For å bestemme konvergensintervallet, skriver vi rekka med summetegn:

$$x-\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5-\tfrac{1}{7}x^7+\cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}.$$

Da konvergerer rekka når

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)+1}x^{2(n+1)+1}}{\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}}\right|<1 \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n+1}{2n+3}x^2\right|<1 \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}}x^2<1$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2<1 \quad\Leftrightarrow\quad -1<x<1$$

Sjekker endepunktene:

$x=-1$: Rekka blir

$$(-1)-\tfrac{1}{3}(-1)^3+\tfrac{1}{5}(-1)^5-\tfrac{1}{7}(-1)^7+\cdots = -1+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}-\cdots.$$

Dette er ei alternerende rekke der absoluttverdien av leddene konvergerer mot 0. Altså konvergerer rekka for $x=-1$.

$x=1$: Rekka blir

$$1-\tfrac{1}{3}\cdot 1^3+\tfrac{1}{5}\cdot 1^5-\tfrac{1}{7}\cdot 1^7+\cdots = 1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\cdots.$$

Dette er også ei alternerende rekke der absoluttverdien av leddene konvergerer mot 0. Altså konvergerer rekka også for $x=1$.

Dermed har vi vist at

$$\arctan x = x-\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5-\tfrac{1}{7}x^7+\cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1} \quad \text{for } -1\le x\le 1.$$

**Oppgave 2.4.2**

Vi tar utgangspunkt i rekka for $\cos x$:

$$\cos x = 1-\tfrac{1}{2!}x^2+\tfrac{1}{4!}x^4-\tfrac{1}{6!}x^6+\cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}.$$

Så erstatter vi $x$ med $\sqrt{x}$:

$$\cos\left(\sqrt{x}\right) = 1-\tfrac{1}{2!}\sqrt{x}^2+\tfrac{1}{4!}\sqrt{x}^4-\tfrac{1}{6!}\sqrt{x}^6+\cdots = 1-\tfrac{1}{2!}x+\tfrac{1}{4!}x^2-\tfrac{1}{6!}x^3+\cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{(-1)^k}{(2k)!}x^k.$$

Da blir

$$\int_0^1 \frac{\cos\left(\sqrt{x}\right)-1}{x}dx = \int_0^1 \frac{\left(1-\frac{1}{2!}x+\frac{1}{4!}x^2-\frac{1}{6!}x^3+\cdots\right)-1}{x}dx$$

$$= \int_0^1 \frac{-\frac{1}{2!}x+\frac{1}{4!}x^2-\frac{1}{6!}x^3+\cdots}{x}dx = \int_0^1\left(-\tfrac{1}{2!}+\tfrac{1}{4!}x-\tfrac{1}{6!}x^2+\cdots\right)dx$$

$$= \left[-\tfrac{1}{2!}x+\tfrac{1}{4!}\cdot\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{6!}\cdot\tfrac{1}{3}x^3+\cdots\right]_0^1$$

$$= \left(-\tfrac{1}{2!}\cdot 1+\tfrac{1}{4!}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 1^2-\tfrac{1}{6!}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot 1^3+\cdots\right)-0 \approx \underline{\underline{-0.4796}}$$

Siden dette er ei alternerende rekke, er unøyaktigheten mindre enn

$$\int_0^1 \tfrac{1}{8!}x^3dx = \left[\tfrac{1}{8!}\cdot\tfrac{1}{4}x^4\right]_0^1 \approx \underline{6\cdot 10^{-6}}\,.$$

**Oppgave 2.5.1**

$$f(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=(-2)x^{-3}$$

$$\Rightarrow\quad f''(x)=(-2)(-3)x^{-4} \quad\Rightarrow\quad f'''(x)=(-2)(-3)(-4)x^{-5}$$

Vi ser at dette mønsteret vil gjenta seg, slik at

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\dots\cdot(n+1)x^{-(n+2)}=(-1)^n\cdot(n+1)!\cdot x^{-(n+2)}\,.$$

Koeffisientene i Taylor-rekka rundt $a=1$ blir da

$$c_0=f(1)=\frac{1}{1^2}=1\,.$$

$$c_1=\frac{1}{1!}\cdot f'(1)=(-2)\cdot\frac{1}{1^3}=-2\,.$$

$$c_2=\frac{1}{2!}\cdot f''(1)=\frac{1}{2!}\cdot(-1)^2\cdot 3!\cdot\frac{1}{1^4}=3\,.$$

$$c_3=\frac{1}{3!}\cdot f'''(1)=\frac{1}{3!}\cdot(-1)^3\cdot 4!\cdot\frac{1}{1^5}=-4\,.$$

Generelt blir

$$c_n=\frac{1}{n!}\cdot f^{(n)}(1)=\frac{1}{n!}\cdot(-1)^n\cdot(n+1)!\cdot\frac{1}{1^{n+2}}=(-1)^n\cdot(n+1)\,.$$

Taylor-rekka for $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ rundt $a=1$ blir da

$$c_0+c_1(x-1)+c_2(x-1)^2+c_3(x-1)^3+\dots+c_n(x-1)^n+\dots$$

$$=1-2(x-1)+3(x-1)^2-4(x-1)^3+\dots+(-1)^n(n+1)(x-1)^n+\dots$$

$$\underline{\underline{=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot(k+1)\cdot(x-1)^k}}$$

Undersøker konvergensen:

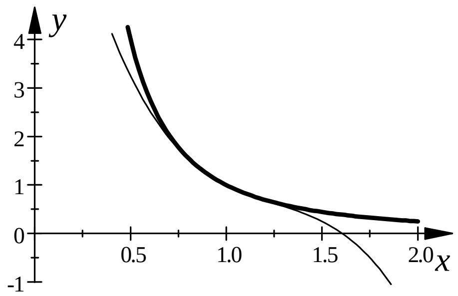
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n+2)\cdot(x-1)^{n+1}}{(-1)^n\cdot(n+1)\cdot(x-1)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}|x-1|=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}|x-1|=|x-1|\,.$$

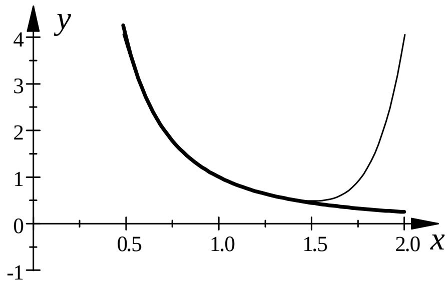
Rekka konvergerer når

$$|x-1|<1 \quad\Leftrightarrow\quad -1<x-1<1 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{0<x<2}\,.$$

Setter vi inn $x=0$, blir rekka $1+2+3+4+\cdots$ som divergerer.
Setter vi inn $x=2$, blir rekka $1-2+3-4+\cdots$ som også divergerer.
Altså konvergerer rekka når $\underline{\underline{0<x<2}}$.

Figurene nedenfor viser grafene til $f(x)=\frac{1}{x^2}$ (tykk strek) sammen med Taylor-polynom (tynn strek) med $n=3$ til venstre og $n=6$ til høyre. Konvergensforholdene vises tydelig.

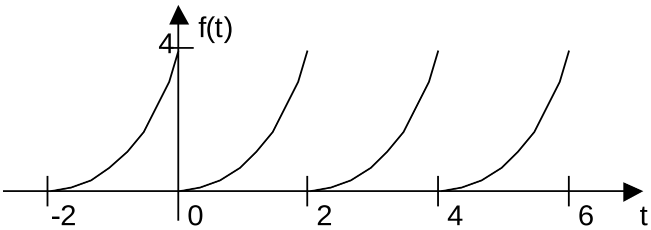



**Oppgave 3.3.1a**

$f(t) = t^2$ når $0 \le t < 2$, $\quad f(t+2) = f(t)$.

1)




$$\underline{\underline{p = 2}}$$
$$2L = 2$$
$$\underline{L = 1}$$

2) Rekka er av formen

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n \cdot t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n \cdot t)$$

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_0^2 f(t)\,dt = \frac{1}{2\cdot 1}\int_0^2 t^2 dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3} = \underline{\frac{4}{3}}.$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_0^2 f(t)\cdot\cos\left(n\frac{\pi}{L}t\right)dt = \frac{1}{1}\int_0^2 t^2\cos(n\pi t)\,dt$$

$$= \frac{2\left(2n\cos(2n\pi)\pi + \left(2n^2\pi^2 - 1\right)\sin(2n\pi)\right)}{n^3\pi^3} = \frac{2(2n\cdot 1\cdot\pi + 0)}{n^3\pi^3} = \underline{\frac{4}{n^2\pi^2}}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_0^2 f(t)\cdot\sin\left(n\frac{\pi}{L}t\right)dt = \frac{1}{1}\int_0^2 t^2\sin(n\pi t)\,dt$$

$$= \frac{-2\left(\left(2n^2\pi^2 - 1\right)\cos(2n\pi) - 2n\sin(2n\pi)\pi + 1\right)}{n^3\pi^3}$$

$$= \frac{-2\left(\left(2n^2\pi^2 - 1\right)\cdot 1 - 0 + 1\right)}{n^3\pi^3} = \frac{-2\left(2n^2\pi^2 - 1 + 1\right)}{n^3\pi^3} = \underline{\frac{-4}{n\pi}}$$

Rekka blir

$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n \cdot t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n \cdot t)$$

$$\underline{\underline{= \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos(n\cdot\pi\cdot t) - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(n\cdot\pi\cdot t)}}.$$

3) Vi får rekka $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ når $\cos(n\pi t) = 1$ samtidig som $\sin(n\pi t) = 0$, altså når $t = 0$.

Da blir rekka

$$\frac{4}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

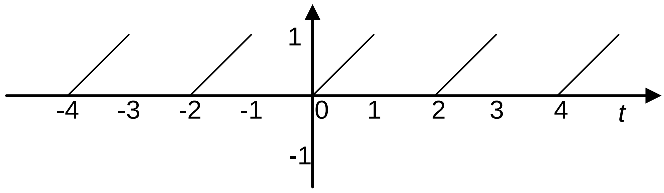
Når $t=0$ konvergerer rekka mot $\frac{4+0}{2}=2$, slik at vi får

$$\frac{4}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=2 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{4}\left(2-\frac{4}{3}\right)=\underline{\underline{\frac{\pi^2}{6}}}.$$

**Oppgave 3.3.1b**

$$f(t)=\begin{cases}0 & \text{når} \quad -1\le t<0\\ t & \text{når} \quad 0\le t<1\end{cases}, \quad f(t+2)=f(t).$$

1)




2) Funksjonen har periode $2L=2 \quad \Leftrightarrow \quad L=1$.
Da blir:

$$a_0=\frac{1}{2L}\int_{-1}^{1}f(t)\,dt=\frac{1}{2}\int_0^1 t\,dt=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=\frac{1}{4}\left(1^2-0^2\right)=\underline{\frac{1}{4}}.$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-1}^{1}f(t)\cos\left(n\frac{\pi}{L}t\right)dt=\int_0^1 t\cos(n\pi t)\,dt=\left[\frac{1}{(n\pi)^2}\cos(n\pi t)+\frac{t}{n\pi}\sin(n\pi t)\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi)+\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi)-\frac{1}{n^2\pi^2}\cos(0)-\frac{0}{n\pi}\sin(0)=\frac{(-1)^n}{n^2\pi^2}-\frac{1}{n^2\pi^2}$$

$$=\begin{cases}0 & \text{når} \quad n=2,4,6,\cdots\\ \dfrac{-2}{n^2\pi^2} & \text{når} \quad n=1,3,5,\cdots\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-1}^{1}f(t)\sin\left(n\frac{\pi}{L}t\right)dt=\int_0^1 t\cos(n\pi t)\,dt=\left[\frac{1}{(n\pi)^2}\sin(n\pi t)-\frac{t}{n\pi}\cos(n\pi t)\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{n^2\pi^2}\sin(n\pi)-\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi)-\frac{1}{n^2\pi^2}\sin(0)+\frac{0}{n\pi}\cos(0)=\underline{-\frac{(-1)^n}{n\pi}}$$

Dette gir Fourier-rekka

$$F(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(n\frac{\pi}{L}t\right)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(n\frac{\pi}{L}t\right)$$

$$\underline{\underline{=\frac{1}{4}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}\cos\big((2m-1)\pi t\big)-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin(n\pi t)}}$$

**Oppgave 3.3.2a**

$$f(t)=\begin{cases}3t & \text{når } 0\le t<1\\ 4-t & \text{når } 1\le t<4\end{cases},\qquad f(t+4)=f(t).$$

Ser at perioden $p=2L=4 \iff \underline{L=2}$.

Fourier-rekka blir da av formen

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi t\right)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi t\right)$$

der koeffisientene finnes slik:

$$a_0=\frac{1}{2\cdot 2}\int_0^4 f(t)\,dt=\frac{1}{4}\left(\int_0^1 3t\,dt+\int_1^4(4-t)\,dt\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}+\frac{9}{2}\right)=\underline{\underline{\frac{3}{2}}}.$$

$$a_n=\tfrac{1}{2}\int_0^4 f(t)\cdot\cos\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi t\right)dt=\tfrac{1}{2}\left(\int_0^1 3t\cdot\cos\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi t\right)dt+\int_1^4(4-t)\cdot\cos\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi t\right)dt\right).$$

For oversiktens skyld løses de to integralene hver for seg ved hjelp av integraltabellen:

$$\frac{3}{2}\int_0^1 t\cdot\cos\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi t\right)dt=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)^2}\left[\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi t\right)+\tfrac{1}{2}n\pi t\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi t\right)\right]_0^1$$

$$=\frac{6}{n^2\pi^2}\left(\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)+\tfrac{1}{2}n\pi\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)-\cos 0-0\right)$$

$$=\underline{\frac{6}{n^2\pi^2}\left(\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)-1\right)+\frac{3}{n\pi}\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)}$$

$$\tfrac{1}{2}\int_1^4(4-t)\cdot\cos\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi t\right)dt=2\int_1^4\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi t\right)dt-\tfrac{1}{2}\int_1^4 t\cdot\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi t\right)dt$$

$$=\frac{2}{\tfrac{1}{2}n\pi}\left[\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi t\right)\right]_1^4-\frac{\tfrac{1}{2}}{\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)^2}\left[\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi t\right)+\tfrac{1}{2}n\pi t\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi t\right)\right]_1^4$$

$$=\frac{4}{n\pi}\left(\sin(2n\pi)-\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)\right)$$

$$-\frac{2}{n^2\pi^2}\left(\cos(2n\pi)+2n\pi\sin(2n\pi)-\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)-\tfrac{1}{2}n\pi\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)\right)$$

$$=\frac{4}{n\pi}\left(0-\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)\right)-\frac{2}{n^2\pi^2}\left(1-\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)\right)+\frac{1}{n\pi}\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)$$

$$=\underline{-\frac{3}{n\pi}\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)-\frac{2}{n^2\pi^2}\left(1-\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)\right)}$$

Når disse to bidragene legges sammen, får vi

$$a_n=\frac{6}{n^2\pi^2}\left(\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)-1\right)+\frac{3}{n\pi}\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)-\frac{3}{n\pi}\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)-\frac{2}{n^2\pi^2}\left(1-\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)\right)$$

$$=\underline{\underline{\frac{8}{n^2\pi^2}\left(\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)-1\right)}}$$

På samme måte får vi at

$$b_n=\tfrac{1}{2}\int_0^4 f(t)\cdot\sin\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi t\right)dt=\tfrac{1}{2}\left(\int_0^1 3t\cdot\sin\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi t\right)dt+\int_1^4(4-t)\cdot\sin\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi t\right)dt\right)$$

De to integralene løses hver for seg ved hjelp av integraltabellen:

$$\frac{3}{2}\int_0^1 t\cdot\sin\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi t\right)dt=\frac{3}{2}\cdot\frac{-1}{\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)^2}\left[\tfrac{1}{2}n\pi t\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi t\right)-\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi t\right)\right]_0^1$$

$$=\frac{-6}{n^2\pi^2}\left(\tfrac{1}{2}n\pi\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)-\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)-0+0\right)$$

$$=\underline{\frac{-3}{n\pi}\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)+\frac{6}{n^2\pi^2}\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)}$$

$$\tfrac{1}{2}\int_1^4(4-t)\cdot\sin\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi t\right)dt=2\int_1^4\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi t\right)dt-\tfrac{1}{2}\int_1^4 t\cdot\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi t\right)dt$$

$$=\frac{-2}{\tfrac{1}{2}n\pi}\left[\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi t\right)\right]_1^4-\frac{-\tfrac{1}{2}}{\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)^2}\left[\tfrac{1}{2}n\pi t\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi t\right)-\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi t\right)\right]_1^4$$

$$=\frac{-4}{n\pi}\left(\cos(2n\pi)-\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)\right)$$

$$+\frac{2}{n^2\pi^2}\left(2n\pi\cos(2n\pi)-\sin(2n\pi)-\tfrac{1}{2}n\pi\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)+\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)\right)$$

$$=\frac{-4}{n\pi}\cos(2n\pi)+\frac{4}{n\pi}\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)+\frac{4}{n\pi}\cos(2n\pi)-0-\frac{1}{n\pi}\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)+\frac{2}{n^2\pi^2}\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)$$

$$=\underline{\frac{3}{n\pi}\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)+\frac{2}{n^2\pi^2}\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)}$$

Når disse to bidragene legges sammen, får vi

$$b_n=\frac{-3}{n\pi}\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)+\frac{6}{n^2\pi^2}\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)+\frac{3}{n\pi}\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)+\frac{2}{n^2\pi^2}\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)=\underline{\underline{\frac{8}{n^2\pi^2}\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)}}.$$

Fourier-rekka blir altså

$$\frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{n^2\pi^2}\left(\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)-1\right)\cdot\cos\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi t\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{n^2\pi^2}\cdot\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)\sin\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi t\right)$$

$$=\underline{\underline{\frac{3}{2}+\frac{8}{\pi^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)-1\right)\cdot\cos\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi t\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)\sin\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi t\right)\right)}}$$

For å finne de første leddene i Fourier-rekka, benytter jeg at:

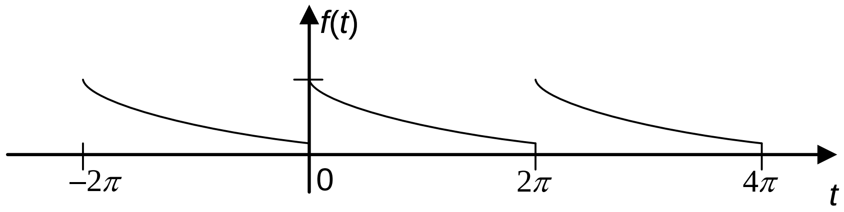
| $n$ | $\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)-1$ | $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ |
|---|---|---|
| 1 | $0-1=-1$ | 1 |
| 2 | $-1-1=-2$ | 0 |
| 3 | $0-1=-1$ | -1 |
| 4 | $1-1=0$ | 0 |

De første leddene i Fourier-rekka blir da:

$$\frac{3}{2}+\frac{8}{\pi^2}\left(\frac{-1}{1^2}\cos\left(\tfrac{1}{2}\pi t\right)+\frac{-2}{2^2}\cdot\cos(\pi t)+\frac{-1}{3^2}\cos\left(\tfrac{3}{2}\pi t\right)+\frac{1}{1^2}\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi t\right)+0+\frac{-1}{3^2}\sin\left(\tfrac{3}{2}\pi t\right)\right)$$

$$=\underline{\underline{\frac{3}{2}+\frac{8}{\pi^2}\left(\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi t\right)-\cos\left(\tfrac{1}{2}\pi t\right)-\tfrac{1}{2}\cos(\pi t)-\tfrac{1}{9}\left(\sin\left(\tfrac{3}{2}\pi t\right)+\cos\left(\tfrac{3}{2}\pi t\right)\right)\right)}}$$

### Oppgave 3.3.2b




Fourier-rekka er av formen

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\cdot t)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\cdot t)$$

der

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-t}dt=\frac{1}{2\pi}\Big[-e^{-t}\Big]_0^{2\pi}=\underline{\frac{1}{2\pi}\left(1-e^{-2\pi}\right)}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}e^{-t}\cos(n\cdot t)\,dt=\frac{1}{\pi}\left[\frac{n\cdot e^{-t}}{n^2+1}\sin(n\cdot t)-\frac{e^{-t}}{n^2+1}\cos(n\cdot t)\right]_0^{2\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{n\cdot e^{-2\pi}}{n^2+1}\cdot 0-\frac{e^{-2\pi}}{n^2+1}\cdot 1-\frac{n\cdot 1}{n^2+1}\cdot 0+\frac{1}{n^2+1}\cdot 1\right)=\underline{\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2+1}\left(1-e^{-2\pi}\right)}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}e^{-t}\sin(n\cdot t)\,dt=\frac{1}{\pi}\left[\frac{-n\cdot e^{-t}}{n^2+1}\cos(n\cdot t)-\frac{e^{-t}}{n^2+1}\sin(n\cdot t)\right]_0^{2\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{-n\cdot e^{-2\pi}}{n^2+1}\cdot 1-\frac{e^{-2\pi}}{n^2+1}\cdot 0+\frac{n\cdot 1}{n^2+1}\cdot 1+\frac{1}{n^2+1}\cdot 0\right)=\underline{\frac{1}{\pi}\cdot\frac{n}{n^2+1}\left(1-e^{-2\pi}\right)}$$

Dette gir Fourier-rekka

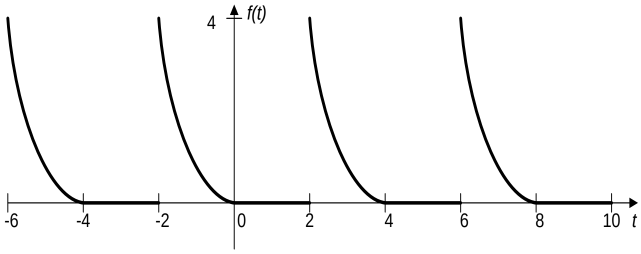
$$\frac{1}{2\pi}\left(1-e^{-2\pi}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2+1}\left(1-e^{-2\pi}\right)\cos(n\cdot t)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{n}{n^2+1}\left(1-e^{-2\pi}\right)\sin(n\cdot t)$$

$$\underline{\underline{=\frac{1}{\pi}\left(1-e^{-2\pi}\right)\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}\cos(n\cdot t)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}\sin(n\cdot t)\right)}}$$

### Oppgave 3.3.2c

$$f(t)=\begin{cases}t^2 & \text{når} \quad -2\le t<0\\ 0 & \text{når} \quad 0\le t<2\end{cases}$$

$$f(t+4)=f(t)$$




Ser at funksjonen har periode $p=2L=4 \quad\Leftrightarrow\quad L=\underline{2}$ .
Da blir:

$$a_0=\frac{1}{2L}\int_{-2}^{2}f(t)\,dt=\frac{1}{2\cdot 2}\left(\int_{-2}^{0}t^2dt+\int_0^2 0\,dt\right)=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_{-2}^{0}=\frac{1}{12}\left(0^3-(-2)^3\right)=\underline{\frac{2}{3}}\,.$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\left(n\frac{\pi}{L}t\right)dt = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} t^2\cos\left(n\frac{\pi}{2}t\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{2}n\pi\right)^3}\left[2\cdot\tfrac{1}{2}n\pi t\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi t\right)+\left(\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)^2 t^2-2\right)\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi t\right)\right]_{-2}^{0}$$

$$= \frac{4}{n^3\pi^3}\left(0+0-n\pi(-2)\cos(-n\pi)-\left(\tfrac{1}{4}n^2\pi^2\cdot(-2)^2-2\right)\sin(-n\pi)\right)$$

$$= \frac{4}{n^3\pi^3}\left(2n\pi(-1)^n+0\right) = \underline{\frac{8(-1)^n}{n^2\pi^2}}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\left(n\frac{\pi}{L}t\right)dt = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} t^2\sin\left(n\frac{\pi}{2}t\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{\left(\frac{1}{2}n\pi\right)^3}\left[\left(\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)^2 t^2-2\right)\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi t\right)-2\cdot\tfrac{1}{2}n\pi t\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi t\right)\right]_{-2}^{0}$$

$$= \frac{-4}{n^3\pi^3}\left(-2\cos 0-0-\left(\left(\tfrac{1}{2}n\pi\right)^2(-2)^2-2\right)\cos(-n\pi)-2n\pi\sin(-n\pi)\right)$$

$$= \frac{-4}{n^3\pi^3}\left(-2-\left(n^2\pi^2-2\right)\cos(n\pi)-2n\pi\cdot 0\right)$$

$$= \underline{\frac{4}{n^3\pi^3}\left(\left(n^2\pi^2-2\right)(-1)^n+2\right)} = \underline{\frac{4\left(-1^n\right)}{n\pi}+\frac{8}{n^3\pi^3}\left(1-(-1)^n\right)}$$

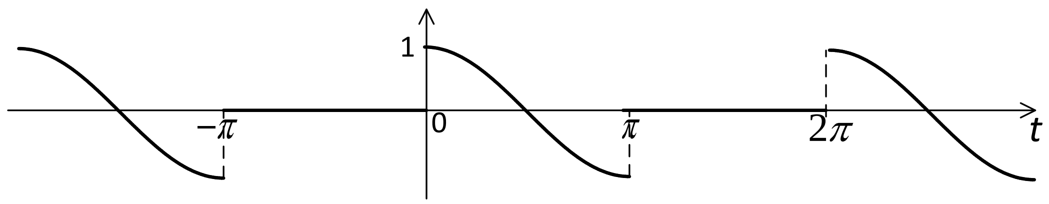
Rekka blir:

$$a_0+\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos\left(n\frac{\pi}{L}t\right)+\sum_{n=0}^{\infty}b_n\sin\left(n\frac{\pi}{L}t\right)$$

$$\underline{\underline{=\frac{2}{3}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{8(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos\left(n\frac{\pi}{2}t\right)+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4\left(-1^n\right)}{n\pi}+\frac{8}{n^3\pi^3}\left(1-(-1)^n\right)\right)\sin\left(n\frac{\pi}{2}t\right)}}$$

**Oppgave 3.3.2d**

$$f(t)=\begin{cases}\cos t & \text{når} \quad 0\le t<\pi \\ 0 & \text{når} \quad \pi\le t<2\pi\end{cases}, \qquad f(t+2\pi)=f(t).$$




Ser at $f$ har periode $p=2L=2\pi \quad\Leftrightarrow\quad L=\pi$.
Fourier-rekka blir

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\cdot t)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\cdot t)$$

der

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\cos t\,dt=\frac{1}{2\pi}\left[\sin t\right]_0^{\pi}=\underline{0}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(n\cdot t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{\pi}\cos t\cdot\cos(n\cdot t)\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2n^2-2}\Big((n+1)\sin\big((n-1)t\big) + (n-1)\sin\big((n+1)t\big)\Big)\right]_0^{\pi} = \underline{0}$$

fordi alle sinus-faktorene blir lik null når *n* er et helt, positivt tall.
Men uttrykket gjelder ikke for $n = 1$. Når $n = 1$ blir

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^2 t\,dt = \frac{1}{\pi}\cdot\left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{2}\pi - 0\right) = \underline{\frac{1}{2}}.$$

Videre blir

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\sin(n\cdot t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos t\cdot\sin(n\cdot t)\,t\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-1}{2n^2-2}\Big((n+1)\cos\big((n-1)t\big) + (n-1)\cos\big((n+1)t\big)\Big)\right]_0^{\pi}$$

forutsatt at $n \neq 1$. Benytter nå at

$$\cos 0 = 1$$

og at

$$\cos\big((n-1)\pi\big) = \cos\big((n+1)\pi\big) = (-1)^{n-1} \text{ når } n = 2,3,\cdots.$$

Dermed blir

$$b_n = \frac{-1}{2\pi(n^2-1)}\Big((n+1)\cdot(-1)^{n-1} + (n-1)\cdot(-1)^{n-1} - \big((n+1)+(n-1)\big)\Big)$$

$$= \frac{-1}{2\pi(n^2-1)}\left(2n\cdot(-1)^{n-1} - 2n\right) = \frac{n}{\pi(n^2-1)}\left(1-(-1)^{n-1}\right)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{n}{n^2-1} & \text{når } n = 2, 4, 6, \cdots \\ 0 & \text{når } n = 3, 5, 7, \cdots \end{cases}$$

Også her må tilfellet $n = 1$ spesialbehandles:

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(t)\cdot\sin(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{4}\cos(2t)\right]_0^{\pi} = \frac{-1}{4\pi}(1-1) = \underline{0}.$$

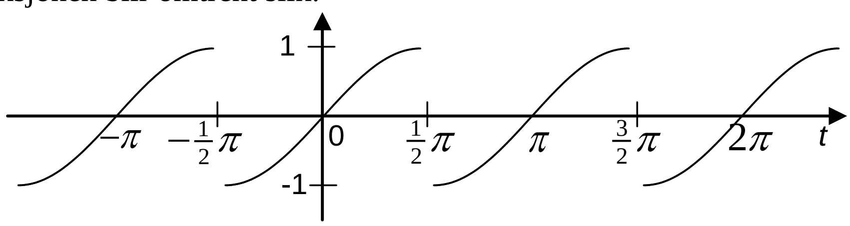
Fourier-rekka blir altså:

$$\underline{\underline{F(t) = \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k}{(2k)^2-1}\sin(2k\cdot t).}}$$

**Oppgave 3.4.1a**

$$f(t) = \sin t \quad \text{når } -\frac{\pi}{2} \le t < \frac{\pi}{2}, \qquad f(t+\pi) = f(t).$$

Grafen til funksjonen blir omtrent slik:




Perioden blir

$$p = 2L = \pi \quad \Leftrightarrow \quad L = \tfrac{1}{2}\pi \,.$$

Da blir

$$\frac{\pi}{L} = \frac{\pi}{\frac{\pi}{2}} = 2 \,.$$

Siden $\sin(-t) = -\sin t$ er *f* en odde funksjon. Da er $a_n = 0$ for alle *n*, slik at Fourier-rekka blir

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\frac{\pi}{L}t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2n \cdot t)$$

der

$$b_n = \frac{2}{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin t \cdot \sin(2n\cdot t)\,dt = \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sin((1-2n)t)}{1-2n} - \sin\frac{((1+2n)t)}{1+2n}\right)\right]_0^{\frac{1}{2}\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin\left((1-2n)\cdot\frac{1}{2}\pi\right) - \sin 0}{1-2n} - \frac{\sin\left((1+2n)\cdot\frac{1}{2}\pi\right) - \sin 0}{1+2n}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\pi - n\pi\right)}{1-2n} - \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\pi + n\pi\right)}{1+2n}\right)$$

Nå benytter vi at $\sin(-v) = -\sin v$, og at $\sin\left(v \pm \frac{1}{2}\pi\right) = \pm\cos\pi$. Da blir

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\pi - n\pi\right)}{1-2n} - \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\pi + n\pi\right)}{1+2n}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos(n\pi)}{1-2n} - \frac{\cos(n\pi)}{1+2n}\right)$$

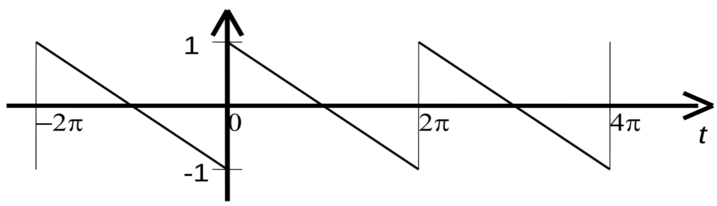
$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{(2n+1)\cos(n\pi)}{(2n-1)(2n+1)} - \frac{(2n-1)\cos(n\pi)}{(2n+1)(2n-1)}\right) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{-4\cdot(-1)^n}{4n^2-1} = \underline{\frac{8}{\pi}\cdot\frac{n(-1)^{n+1}}{4n^2-1}}$$

Rekka blir da

$$\underline{\underline{\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{4n^2-1}\sin(2n\cdot t)}}\,.$$

**Oppgave 3.4.1b**

1) $\quad f(t) = 1 - \dfrac{t}{\pi}$ når $0 < t < 2\pi$, $\qquad f(t+2\pi) = f(t)$




Ser av grafen at dette er en odde funksjon med periode

$$p = 2L = 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad L = \pi \,,$$

slik at Fourier-rekka blir av typen

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt)$$

der

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-\frac{t}{\pi}\right)\sin(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos(nt) - \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n^2}\right)\left(nt\cos(nt)-\sin(nt)\right)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\left(\underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} - \underbrace{\cos 0}_{=1}\right) + \frac{1}{n^2\pi}\left(n\pi\underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} - 0 - \underbrace{\sin(n\pi)}_{=0} + \underbrace{\sin 0}_{=0}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\left((-1)^n - 1\right) + \frac{1}{n}(-1)^n\right) = \underline{\frac{2}{n\pi}}$$

Altså er Fourier-rekka

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt) = \underline{\underline{\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(nt)}}.$$

b) Skriver ut de første leddene i rekka:

$$F(t) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin t}{1} + \frac{\sin(2t)}{2} + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(4t)}{4} + \frac{\sin(5t)}{5} + \cdots\right)$$

Dersom vi velger $t = \frac{1}{2}\pi$, blir

$$F\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)}{1} + \frac{\sin\pi}{2} + \frac{\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)}{3} + \frac{\sin(2\pi)}{4} + \frac{\sin\left(\frac{5}{2}\pi\right)}{5} + \cdots\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1} + \frac{0}{2} + \frac{-1}{3} + \frac{0}{4} + \frac{1}{5} + \cdots\right) = \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right)$$

Men

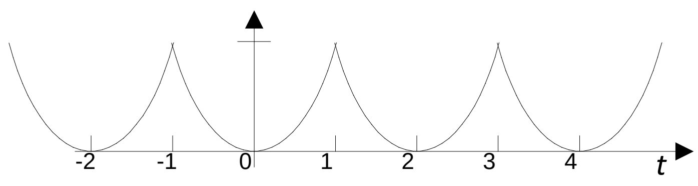
$$f\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) = 1 - \frac{\frac{1}{2}\pi}{\pi} = 1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}.$$

Siden Fourier-rekka konvergerer mot $f(t)$ når $f$ er kontinuerlig, kan vi sette

$$\frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right) = \tfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}.$$

**Oppgave 3.4.1c**

1) $f(t) = t^2$ når $-1 < t < 1$, $\qquad f(t+2) = f(t)$.




Siden $f(-t) = (-t)^2 = t^2 = f(t)$, er dette en jamn funksjon med periode

$$p = 2L = 2 \quad \Leftrightarrow \quad L = 1,$$

slik at Fourier-rekka blir av formen

$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi t)$$

der

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^1 t^2\,dt = \tfrac{1}{3}\left[t^3\right]_0^1 = \underline{\tfrac{1}{3}}$$

og

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^1 t^2\cos(n\pi t)\,dt = 2\cdot\frac{1}{\pi^3 n^3}\Big[\big(\pi^2 n^2 t^2 - 2\big)\sin(n\pi t) + 2\pi n t\cos(n\pi t)\Big]_0^1$$

$$= \frac{2}{\pi^3 n^3}\left(\big(\pi^2 n^2 - 2\big)\underbrace{\sin(n\pi)}_{=0} + 2\pi n\underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} - 0 - 0\right) = \underline{\frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}}$$

Dette gir Fourier-rekka

$$\underline{\underline{F(t) = \tfrac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi t)}}.$$

2) Når $t = 1$, blir $\cos(n\pi t) = \cos(n\pi) = (-1)^n$ slik at

$$F(1) = \tfrac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}(-1)^n = \tfrac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

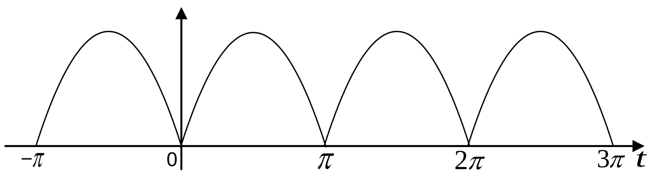
Men $f(1) = 1$ slik at

$$\tfrac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \tfrac{2}{3} \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}}.$$

**Oppgave 3.4.2a**

Nedenfor ser du grafen til den jamne halvperiodiske utvidelsen av

$f(t) = t(\pi - t)$ for $0 < t < \pi$ :




Velger å la perioden til $f(t)$ være $2\pi$ (vi får faktisk lettere regninger ved å la perioden være bare $\pi$), slik at $L = \frac{1}{2}p = \pi$ . Da blir Fourier-rekka av formen

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nt)$$

der

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi t - t^2)\,dt = \frac{1}{\pi}\Big[\pi\cdot\tfrac{1}{2}t^2 - \tfrac{1}{3}t^3\Big]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\big(\tfrac{1}{2}\pi\cdot\pi^2 - \tfrac{1}{3}\pi^3 - 0 + 0\big) = \underline{\tfrac{1}{6}\pi^2}.$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi t - t^2)\cos(nt)\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\pi\cdot\frac{1}{n^2}\big(\cos(nt) + nt\sin(nt)\big) - \frac{1}{n^3}\big(2nt\cos(nt) + (n^2t^2 - 2)\sin(nt)\big)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{n^2}\Big(\underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} + n\pi\underbrace{\sin(n\pi)}_{=0} - \underbrace{\cos 0}_{=1} - 0\Big) - \frac{1}{n^3}\Big(2n\pi\underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} + (n^2\pi^2 - 2)\underbrace{\sin(n\pi)}_{=0} - 0 + 0\Big)\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{n^2}\big((-1)^n - 1\big) - \frac{1}{n^3}\big(2n\pi\cdot(-1)^n\big)\right) = \frac{2}{n^2}\big((-1)^n - 1\big) - \frac{4}{n^2}(-1)^n = \underline{\underline{-\frac{2}{n^2}\big(1 + (-1)^n\big)}}$$

Siden $a_n = 0$ når $n = 1, 3, 5, \cdots$, setter jeg $n = 2k$ og får

$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) = \tfrac{1}{6}\pi^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{(2k)^2}\left(1+(-1)^{2k}\right)\cos(2kt)$$

$$= \tfrac{1}{6}\pi^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{(2k)^2} \cdot 2\cos(2kt) = \underline{\underline{\tfrac{1}{6}\pi^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\cos(2kt)}}$$

Setter $t = \frac{1}{2}\pi$. Da er

$$f\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) = \tfrac{1}{2}\pi\left(\pi - \tfrac{1}{2}\pi\right) = \underline{\tfrac{1}{4}\pi^2}$$

mens Fourier-rekka blir

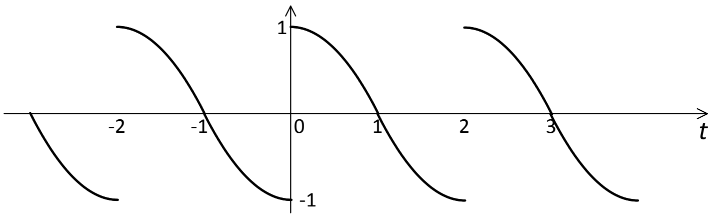
$$F\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) = \tfrac{1}{6}\pi^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\cos\left(2k \cdot \tfrac{1}{2}\pi\right) = \tfrac{1}{6}\pi^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\cos(k\pi) = \underline{\tfrac{1}{6}\pi^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}}$$

Siden Fourier-rekka konvergerer mot $f(t)$, blir

$$\tfrac{1}{6}\pi^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = \tfrac{1}{12}\pi^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = \tfrac{1}{6}\pi^2 - \tfrac{1}{12}\pi^2 = \underline{\underline{\tfrac{1}{12}\pi^2}}.$$

**Oppgave 3.4.2b**

$$f(t) = 1 - t^2,\; 0 < t < 1.$$




Den halvperiodiske utvidelsen har periode $p = 2L = 2 \quad \Leftrightarrow \quad L = 1$. Fourier-rekka til den odde halvperiodiske utvidelsen blir av formen

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\frac{\pi}{L}t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi t)$$

der

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\sin\left(n\frac{\pi}{L}t\right)dt = 2\int_0^1 \left(1-t^2\right)\sin(n\pi t)\,dt$$

$$= 2\left[-\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi t) + \frac{1}{(n\pi)^3}\left(\left(n^2\pi^2t^2 - 2\right)\cos(n\pi t) - 2n\pi t\sin(n\pi t)\right)\right]_0^1$$

$$= 2\left(\frac{-1}{n\pi}\left(\underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} - \underbrace{\cos 0}_{=1}\right) + \frac{1}{n^3\pi^3}\left(\left(n^2\pi^2 - 2\right)\underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} - (0-2)\underbrace{\cos 0}_{=1}\right) - 2n\pi\underbrace{\sin(n\pi)}_{=0} + 0\right)$$

$$= 2\left(\frac{-1}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right) + \frac{1}{n^3\pi^3}\left(n^2\pi^2 - 2\right)(-1)^n + \frac{2}{n^3\pi^3}\right)$$

$$= 2\left(-\frac{(-1)^n}{n\pi} + \frac{1}{n\pi} + \frac{(-1)^n}{n\pi} - 2\frac{(-1)^n}{n^3\pi^3} + \frac{2}{n^3\pi^3}\right)$$

$$= \underline{2\left(\frac{1}{n\pi} + \frac{2}{n^3\pi^3}\left(1-(-1)^n\right)\right)} = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi n} & \text{når} \quad n = 2, 4, 6, \cdots \\[2ex] \dfrac{2}{\pi n} + \dfrac{8}{\pi^3 n^3} & \text{når} \quad n = 1, 3, 5, \cdots \end{cases}$$

Rekka blir altså

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\frac{1}{n\pi} + \frac{2}{n^3\pi^3}\left(1-(-1)^n\right)\right)\sin(n\pi t).$$

**Oppgave 3.4.2c**

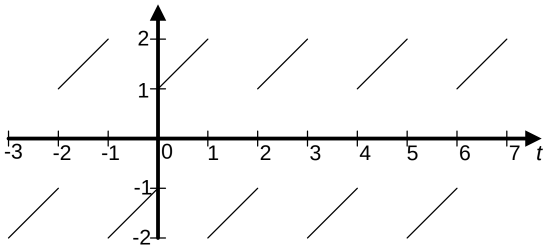
Når vi har en odde, halvperiodisk utvidelse, vil Fourier-rekka kun inneholde sinus-ledd.

Når

$$f(t) = t+1,\ 0 \le t < 1$$

blir $L=1$. Rekka er derfor av formen

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\frac{\pi}{L}t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi t)$$




der

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\sin\left(n\frac{\pi}{L}t\right)dt = \frac{2}{1}\int_0^1 (t+1)\sin(n\pi t)\,dt$$

$$= 2\left[-\frac{1}{n^2\pi^2}\left(n\pi t\cos(n\pi t) - \sin(n\pi t)\right) - \frac{1}{n\pi}\cos(n\pi t)\right]_0^1$$

$$= 2\left(\frac{-1}{n^2\pi^2}\left(n\pi\underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} - \underbrace{\sin(n\pi)}_{=0} - 0 + \underbrace{\sin 0}_{=0}\right) - \frac{1}{n\pi}\left(\underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} - \underbrace{\cos 0}_{=1}\right)\right)$$

$$= 2\left(\frac{-1}{n\pi}(-1)^n - \frac{1}{n\pi}(-1)^n + \frac{1}{n\pi}\right) = \frac{2}{n\pi}\left(1-2(-1)^n\right)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{6}{n\pi} & \text{når } n = 1, 3, 5, \cdots \\ \dfrac{-2}{n\pi} & \text{når } n = 2, 4, 6, \cdots \end{cases}$$

Rekka blir altså

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1-2(-1)^n\right)\sin(n\pi t).$$